

Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral

Juan Jesús Ortiz

Universidad de Granada, España

Nordin Mohamend

Universidad de Granada, España

Introducción

Uno de los problemas más tratados en la investigación en educación matemática es la formación de profesores (ver, por ejemplo, Llinares & Krainer, 2006; Ponte & Chapman, 2006; Wood, 2008). Sin embargo, sólo recientemente estos trabajos se centran en los conocimientos de los futuros profesores respecto a la estadística (Batanero, Burrill & Reading, 2011), debido a la reciente inclusión de la estadística y la probabilidad en la educación primaria en España y otros países (MEC, 2006; NCTM, 2000).

Dichos programas sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la educación primaria a calcular algunas probabilidades sencillas. La consecución de estos objetivos requiere una formación adecuada del futuro profesor de educación primaria, lo que requerirá una evaluación previa de sus necesidades formativas.

En este trabajo tendremos en cuenta la diferencia entre el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento de contenido pedagógico*. Este último, según Shulman (1986, pp. 8-9), sería “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza”.

Ball, Lubienski y Mewborn (2001) definen el *conocimiento matemático para la enseñanza*, como la unión del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido. Dicho conocimiento es descrito por Hill, Ball y Schilling (2008) como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (p. 374), y lo clasifican en dos grandes categorías. La primera, conocimiento del contenido matemático, donde distinguen el *Conocimiento Común del Contenido*, puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona instruida; el *Conocimiento Especializado del Contenido*, propio del profesor, que incluye por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema y el *Conocimiento en el Horizonte Matemático*, que incluye por ejemplo, el conocimiento de la relación con otras materias. En la segunda categoría, conocimiento pedagógico del contenido,

distinguen el *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes*, que incluye el conocimiento de los errores y dificultades de los alumnos y cómo evoluciona su razonamiento matemático; el *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza*, que incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para promover su aprendizaje, y el *Conocimiento del Currículo*, que se refiere a las características del currículo en los diferentes ciclos educativos.

La finalidad de este trabajo es evaluar algunos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores de educación primaria sobre conceptos probabilísticos elementales, involucrados en una tarea en la que deben identificar el suceso seguro en un experimento aleatorio y el posterior análisis didáctico de la tarea trabajando en grupos. En concreto, nos centraremos en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, en la terminología de Hill, Ball y Schilling (2008). A continuación se presenta, en primer lugar, los antecedentes del trabajo y la metodología utilizada. En segundo lugar, se analizan las soluciones dadas por 283 futuros profesores españoles de educación primaria a un problema relacionado con la idea de suceso seguro, para evaluar su conocimiento común del contenido. Seguidamente se evalúa el conocimiento especializado del contenido, a partir de los contenidos matemáticos que los participantes, trabajando en grupo, identifican, en dicho problema. El conocimiento del contenido y los estudiantes se deduce de las evaluaciones que los mismos grupos de participantes realizan de las respuestas al problema proporcionadas por algunos niños. Se finaliza con las conclusiones y algunas implicaciones educativas para la formación de profesores.

Fundamentos del estudio

Comprensión del suceso seguro

Entre las ideas fundamentales de la probabilidad, Heitele (1975) cita la de suceso seguro, pues para construir un modelo probabilístico se comienza habitualmente con la descripción de todos sus posibles resultados (espacio muestral o suceso seguro).

Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) indican que en la definición del experimento aleatorio hay dos aspectos claves: la clara formulación de las condiciones del experimento y la enumeración del espacio muestral correspondiente. Estos puntos están relacionados, pues si el estudiante interpreta erróneamente el experimento, llegará a un espacio muestral incorrecto. En opinión de estos autores no se presta suficiente atención en la enseñanza a estos dos aspectos y ello puede ser el origen de concepciones incorrectas en los estudiantes.

Fischbein, Nello y Marino (1991), en un estudio con niños de 9–14 años, propusieron varias tareas con dados y monedas preguntando si es más probable obtener los mismos números o diferentes números. Observaron que muchos niños justificaron su razonamiento formando el espacio muestral correspondiente en el caso de los dados, pero no para las monedas. Concluyen, que los estudiantes manifiestan cierta intuición para

determinar el espacio muestral y para calcular la probabilidad de un suceso compuesto, pero no comprenden que sucesos como (a,b) y (b,a) son distintos.

Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) examinaron la habilidad de niños de 8–9 años para identificar el espacio muestral en situaciones aleatorias, encontrando que 15 de los 37 participantes no creían que todos los resultados podrían ocurrir en un experimento aleatorio simple. Según los autores puede ser debido a que piensan en el espacio muestral desde un punto de vista determinista, atribuyendo certeza donde no existe. Este problema persistió en dos de los 15 estudiantes a pesar de realizar una instrucción con múltiples experiencias mediante generadores aleatorios discretos y continuos.

Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) identificaron, en estudiantes de 14–15 años, errores de orden (no tener en cuenta el orden) y errores de repetición (repetir elementos) al determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio, lo que puede ser debido a una falta de razonamiento combinatorio.

Shaughnessy y Cincetta (2002) evaluaron la comprensión de estudiantes de 12–18 años sobre el espacio muestral, mediante la propuesta de una tarea con dos ruletas, divididas cada una de ellas en dos zonas iguales, negra y blanca. Se gana un premio cuando ambas flechas caen en la zona negra. Se pregunta a los estudiantes si están de acuerdo en que la probabilidad de ganar es del 50%. Los autores observaron que un alto porcentaje de estudiantes no tuvieron en cuenta el espacio muestral para justificar sus respuestas. Asimismo encontraron que, cuando los estudiantes juegan con las ruletas y observan la variación obtenida en las distintas tiradas, mejoraron los resultados obtenidos antes de la simulación.

Conocimiento matemático del profesor sobre probabilidad

Aunque en los últimos años se ha producido un aumento considerable de la investigación en didáctica de la probabilidad (ver Jones, 2005 y Jones, Langrall, & Mooney, 2007), es escasa la centrada en los conocimientos de los futuros profesores y, mucho menos, en relación con el espacio muestral. Presentamos a continuación las investigaciones consultadas.

Azcárate (1995) evaluó el conocimiento matemático de 57 futuros profesores de educación primaria sobre los experimentos aleatorios, encontrando que pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Algunos participantes tuvieron una fuerte influencia de los aspectos contextuales o consideraron que no es posible el estudio matemático de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y escasa competencia de cálculo de probabilidades, cuantificando las probabilidades de un suceso desde criterios personales.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) analizaron las estrategias que 102 futuros profesores de educación primaria utilizaron en la resolución de problemas de comparación de probabilidades. Observaron que, en general, hacían uso de estrategias correctas (multiplicativas y de correspondencia), que indicaba un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía había un grupo importante que utilizaba estrategias incorrectas o mostraba sesgos de razonamiento. Para mejorar el razonamiento

probabilístico de los futuros profesores, Batanero, Godino y Cañizares (2005) proponen utilizar actividades de simulación, ya que en un experimento de enseñanza comprobaron que los sesgos probabilísticos manifestados por 132 futuros profesores de educación primaria se vieron notablemente reducidos.

Respecto al conocimiento matemático sobre el espacio muestral, Azcárate (1995) propuso dos problemas a futuros profesores de educación primaria. En uno de ellos, a partir de un grupo de 10 personas se debían formar el mayor número posible de comisiones diferentes, preguntando a los participantes si se pueden formar menos, tantas o más comisiones diferentes de dos personas que de ocho personas. La misma cuestión la planteó para el caso de que las comisiones fueran de tres y de siete personas. El problema se puede resolver con la fórmula matemática de combinaciones de m elementos tomados de n en n , $C_{m,n}$, pero también comprendiendo que el número de grupos es igual en los dos casos ya que $C_{m,n} = C_{m,m-n}$. Encontró muy pocas respuestas correctas, mostrando los participantes gran dificultad ya que no pudieron enumerar todos los casos posibles, aportando tan solo una estimación global basada en justificaciones apoyadas en reglas aritméticas, al pensar que se pueden formar cinco comisiones diferentes de dos personas y sólo una de ocho personas, o en razonamientos combinatorios incompletos o incorrectos, al considerar que con menos personas se pueden formar más comisiones diferentes ya que el número de combinaciones que se pueden realizar es mayor. Las justificaciones de tipo aritmético son similares a las encontradas por Fernandes (1990) en una investigación con estudiantes de 12º grado y futuros profesores de matemática.

Conocimientos didácticos del profesor sobre probabilidad

No hemos encontrado investigaciones relacionadas sobre otros componentes del conocimiento del profesor en relación al espacio muestral. Sin embargo, otras investigaciones que analizan el conocimiento didáctico respecto a otros conceptos probabilísticos indican que es escaso. Por ejemplo, Contreras (2011) encontró carencias en los conocimientos de 183 futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad condicional respecto a las componentes conocimiento especializado y conocimiento del contenido y la enseñanza.

López (2006) mostró la gran dificultad de profesores de primaria en activo al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos, cuando diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad.

Respecto al conocimiento del contenido y los estudiantes, Watson (2001) evaluó el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus alumnos con la probabilidad y la estadística. Sólo dos profesores de primaria de los que participaron en el estudio mencionaron haber “encontrado dificultades”, mientras que 13 profesores de secundaria encontraron dificultades, principalmente en aspectos procedimentales (como calcular probabilidades, permutaciones, diagramas de árbol) o conceptuales (como la probabilidad teórica, la inferencia o la probabilidad condicional). Aunque estos datos sugieren que los profesores son capaces de identificar las dificultades de los alumnos, también muestran que éstos se centran principalmente en aspectos de procedimiento y su enseñanza se

basa en un enfoque determinista que busca las clásicas respuestas simples. Según la autora, aunque los profesores de primaria utilizaban lecciones basadas en actividades, no parecía existir un enfoque coherente hacia el estudio de los conceptos sobre el azar.

En un estudio de Contreras (2011), donde se evaluaba una experiencia formativa, se pidió a 70 profesores de educación secundaria, unos en ejercicio y otros en período de formación, que identificaran los posibles errores y dificultades que podrían cometer sus estudiantes al realizar una actividad basada en una paradoja clásica de probabilidad. Encontró que entre los conflictos identificados correctamente se encuentran los siguientes: no percibir la dependencia en los experimentos que intervienen en el juego, construir el espacio muestral, asignación incorrecta de probabilidades a los sucesos, no percibir la estructura del experimento y resistencia a considerar que los fenómenos aleatorios se puedan estudiar desde un punto de vista matemático. Otros profesores señalaron conflictos que no aparecen en la situación o dificultades que no eran importantes. Concluye que los resultados sugieren la importancia de realizar actividades de este tipo para los profesores con el objetivo de aumentar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

En este trabajo completaremos las investigaciones anteriores, centrándonos específicamente en el concepto de espacio muestral que apenas ha sido considerado en los antecedentes y analizando tanto el conocimiento matemático, como el didáctico de los futuros profesores. A continuación describimos la metodología y los resultados obtenidos.

Metodología

Participantes

La muestra participante estuvo formada por 283 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, España, en su primer año de estudios. Todos ellos habían estudiado probabilidad simple y condicional, durante la educación secundaria, dos años antes de ingresar en la universidad. Un 65% de estos estudiantes provenían del Bachillerato de Ciencias Sociales, en el que en el último año hay un cuatrimestre de Estadística, donde estudiaron la probabilidad condicional, distribuciones de probabilidad binomial y normal e introducción al muestreo e inferencia. El resto había cursado el Bachillerato de Ciencias y Tecnología o Formación Profesional, donde no se estudia estadística.

Cuestionario utilizado

Para la construcción del cuestionario se ha seguido la metodología de evaluación de conocimientos de profesores propuesta por Godino (2009), y consta de dos pasos:

1. Elegir una tarea cuya solución ponga en juego los principales aspectos a evaluar del suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados.
2. Formular cuestiones para evaluar las distintas (o principales) componentes del conocimiento del profesor.

En la Figura 1 se muestra el cuestionario utilizado, que consta de un problema tomado de Fischbein y Gazit (1984). Las respuestas incluidas en la segunda parte de la tarea (Alumnos 1 a 6) son respuestas típicas que proporcionaron algunos niños de 11-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997).

En lo que sigue presentamos un problema de probabilidad, junto con algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes. - Resuelve el problema. - Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta. - Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas. - Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea.
Problema. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan sucesivamente bolas sin mirar, sin devolver la bola a la caja una vez sacada ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color? <i>Respuestas de los alumnos</i> A1. “Tres, porque hay tres tipos de colores” A2. “Debe sacar tres bolas, a lo mejor le toca una roja, una verde y una blanca” A3. “Si se sacan primero las rojas y verdes son siete, pero como hace falta una de cada color, pues ocho” A4. “Nunca se puede estar seguro, porque a lo mejor sacas dos rojas y dos verdes” A5. “Debe sacar nueve, es decir todas, y así estará lo más seguro posible” A6. “Debe mirar en la caja y así estará seguro de sacar una de cada color”.

Figura 1 — Cuestionario.

Para evaluar el conocimiento común del contenido, en la pregunta (a) se pide resolver el problema; para evaluar el conocimiento especializado del contenido, en la pregunta (b) se pide identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución; para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, en las preguntas (c) y (d) se pide identificar las respuestas correctas e incorrectas de los niños y describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta.

El problema propuesto evalúa la comprensión del concepto de suceso seguro, y al mismo tiempo se analiza la capacidad de razonamiento combinatorio del estudiante, ya que debe enumerar las diferentes posibilidades que se le presentan al extraer sucesivamente las bolas de la urna sin reemplazamiento, por lo que los sucesivos experimentos serían dependientes y harían cambiar la composición de la urna.

El espacio muestral inicial consta de tres sucesos elementales (rojo, blanco y verde) no equiprobables por razón de la composición de la urna. En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales. En esta situación, la respuesta correcta al apartado (a) es que se deben sacar ocho bolas para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color, pues en el peor de los casos, con ocho extracciones sacas todas las bolas menos una blanca.

Por tanto, los contenidos matemáticos (apartado b) necesarios para resolver el problema son los de experimento aleatorio, suceso seguro y posible, casos favorables y posibles, muestreo sin reemplazamiento y nociones de combinatoria elemental para pensar en todas las posibilidades.

El único alumno que ha respondido de forma correcta (apartado c) ha sido el A3. Este alumno ha determinado todos los casos posibles y favorables, así como ha pensado en todas las posibilidades en sucesivas extracciones (razonamiento combinatorio) y diferencia las ideas de suceso seguro y suceso posible.

Las razones por las cuales los otros estudiantes (apartado d) han respondido de forma incorrecta son las siguientes: el alumno A1 que estaría interpretando de forma incorrecta que se pide el mínimo número de bolas para que sea posible obtener una de cada color; el alumno A2 confunde la noción de suceso seguro con posible; el alumno A4 piensa que nunca se puede estar seguro, al ser un experimento aleatorio, respondiendo que “no se puede saber” o “nunca es posible”; el A5, tiene fallos en el razonamiento combinatorio; y el alumno A6 cambia el enunciado por el de un experimento determinista.

Método de recogida de datos

Los datos se recogieron a finales del año 2012 en la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica*, que forma parte del plan de formación de estos profesores, a lo largo de dos sesiones. En la primera, se pidió a los estudiantes que resolvieran por escrito el problema (apartado a), con el objetivo de evaluar su conocimiento común del contenido matemático. Se eligió este problema, a pesar de haber sido diseñado para investigaciones con niños, para disponer de respuestas típicas a los mismos, obtenidas en nuestras propias investigaciones con alumnos de educación primaria. A partir de ellas, se han seleccionado las incluidas en el problema, que serán analizadas por los futuros profesores en los apartados (c) y (d) de los mismos.

En la segunda sesión, se pidió que resolvieran por escrito el resto de los apartados, trabajando en pequeños grupos ($N=31$). Los grupos eran de dos o tres estudiantes, que mostraron su disposición a participar en la segunda sesión. En lo que sigue se presentan los resultados.

Conocimiento común del contenido

En la Tabla 1 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas a partir del análisis de contenido de las respuestas de los futuros profesores al primer apartado del problema,

teniendo en cuenta las respuestas reportadas en el estudio de Cañizares (1997) donde participaron 143 estudiantes, de 10 a 14 años de edad. A continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.

Tabla 1 — Frecuencia y porcentaje de respuestas.

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10–14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
1 bola	1	0,3		
2 bolas	3	1.1		
3 bolas	27	9.5	48	33.6
4 bolas	13	4.6		
5 bolas	7	2.5		
6 bolas	24	8.5	37	25.8
7 bolas	8	2.8		
8 bolas (*)	132	46.3	19	13.3
9 bolas	23	8.1	18	12.6
Otras	13	4.6	17	11.9
No contesta	33	11.7	4	2.8

(*) Respuesta correcta

En ella se observa que la categoría mayoritaria es “8 bolas” (46.3%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que el número de bolas que se debe sacar para estar seguro de que hay una de cada color es ocho. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*El total es nueve se le resta el número de bolas que vamos a sacar. A la cuarta rojo, a la séptima verde, a la octava blanco*” (alumno 24).

$$\begin{array}{l}
 P = \frac{41}{9} \\
 P = \frac{3}{9} \\
 P = \frac{2}{9}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \Delta \text{ la sexta rojo} \\
 \Delta \text{ la séptima verde} \\
 \Delta \text{ la octava blanco}
 \end{array}$$

El total es nueve
se le resta el número de
bolas que vamos a sacar

Figura 2 — Respuesta del alumno 24.

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “3 bolas” (9.5%), donde están los futuros profesores que han respondido que es necesario extraer tres bolas, que muestran confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible, seguidas de las categorías “6 bolas” (8.5%) y “9 bolas” (8.1%). Con porcentajes menores aparecen una gran variedad de categorías, donde hemos incluido los futuros profesores que por falta de razonamiento combinatorio no estiman bien el número de bolas, dando respuestas con diferente número de bolas, como vemos a continuación:

- 1 bola (1 alumno): *“Sacaremos una bola sola ya que las tres son de color”* (alumno 243).
- 2 bolas (3 alumnos): *“Dos bolas, porque como hay dos bolas blancas, es el máximo que se puede sacar de cada bola”* (alumno 71).
- 4 bolas (13 alumnos): *“4 bolas, ya que así es más probable de que salga 1 blanca, por lo menos; 1 verde y una roja”* (alumno 170).
- 5 bolas (7 alumnos): *“En total hay 9 bolas en la caja, por lo que debemos al menos sacar 5 bolas para que haya una probabilidad del 50% de que salga una de cada color”* (alumno 99), donde confunde la probabilidad del 50% con el 50% de casos posibles.
- 7 bolas (8 alumnos): *“7 bolas porque seguro que se saca o bien todas las rojas, 1 verde y otra blanca, o bien todas las verdes y blancas y alguna roja”* (alumno 67).

En la categoría “Otras” hemos incluido a los futuros profesores que aportan respuestas incoherentes, como por ejemplo, *“Hay que sacar 4 bolas para que salga una roja, 6 bolas para que salga alguna verde y 7 bolas para que salga alguna blanca”* (alumno 8), o indican que no comprenden bien el enunciado *“¿se vuelven a meter las que se sacan? No lo tengo muy claro este ejercicio?”* (alumno 33), que muestra una confusión entre muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

Los resultados obtenidos indican que la mayor parte de los futuros profesores de educación primaria participantes en este estudio muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al suceso seguro y a los conceptos probabilísticos relacionados, ya que solo el 46% de los futuros profesores responde correctamente a la cuestión planteada. Estos resultados son mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), donde participaron también futuros profesores de educación primaria, que fueron solo del 3% y el 14% en dos problemas sobre el espacio muestral.

Entre las dificultades se destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible y la falta de razonamiento combinatorio, que se manifiesta en los que responden que hay que extraer todas las bolas (8.1%), descrita también por Azcárate (1995). En otros casos, como indican Hawkins *et al.* (1992), se ha podido producir una interpretación incorrecta del experimento aleatorio que ha llevado a los futuros profesores a considerar un espacio muestral incorrecto. Destaca el alto porcentaje de profesores que manifiestan la creencia de que en el experimento propuesto no se puede saber la respuesta correcta porque es un juego aleatorio, ya que el resultado depende del azar, la suerte o el destino. Hay un 11.7% de futuros profesores que no contesta, que se ve incrementado cuando han de justificar las respuestas dadas.

Aunque los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas que los niños, de 10–14 años de edad, participantes en la investigación de Cañizares (1997), todavía existe una proporción muy importante de ellos que incurre en errores (42%), en algunos casos, similares a los que cometen los estudiantes a los que han de formar.

Conocimiento especializado del contenido

Una vez resueltos los problemas en la primera sesión, en la segunda los futuros profesores trabajaron en pequeños grupos para resolver el resto de las cuestiones. A continuación, analizamos los resultados en el segundo apartado en que preguntamos por los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución del problema, con lo que se pretende evaluar el conocimiento especializado de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria.

A partir del análisis de contenido de las respuestas de los futuros profesores al apartado (b), se han obtenido las frecuencias de los contenidos matemáticos mejor identificados por ellos, que se muestran en la Tabla 2. En ella se observa que el contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores en este problema fue el concepto de probabilidad (16 grupos).

El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (10 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta:

El alumno deberá primero ser capaz de diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas. Seguidamente deberá ser capaz de estimar la mayor o menor frecuencia con la que ocurren los fenómenos y para resolver el problema planteado debe tener claro la ‘intuición’ de azar. (grupo 4)

Es también escasa la mención al razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (4 grupos), como la siguiente respuesta: “*Este es un caso de razonamiento combinatorio ya que tenemos que enumerar todos los casos en un experimento aleatorio*” (grupo 21). Hicieron referencia a porcentajes (2 grupos) y a diagrama de árbol (2 grupos), como la respuesta siguiente: “*Deben usar un árbol para así controlar el porcentaje de probabilidad, teniendo en cuenta que este partirá con tres ramas y de cada una de ellas otras tres ramas*” (grupo 16).

Tabla 2 — Contenidos matemáticos identificados por los grupos de futuros profesores (n=31).

	Objetos identificados	Frecuencia
Correctamente	Probabilidad	16
	Azar (8)/aleatoriedad (2)	10
	Razonamiento combinatorio (3)/lógico (1)	4
	Posibilidades	3
	Porcentajes	2
	Diagrama del árbol	2
	Fracciones	1
	Operaciones numéricas	1
Incorrectamente	Estadística (4)/Gráfico estadístico (1)	5
	Estimación frecuencial probabilidad	3
	No utiliza conocimiento matemático	1
No contesta		7

Por último, citados por un solo grupo aparecen las fracciones, como la respuesta siguiente: “*Probabilidad (Fracciones)*” (grupo 7); y operaciones numéricas, como la siguiente

respuesta: “*Bloque 1: números naturales, operaciones, estrategias de cálculo*” (grupo 19). Destacar que hay siete grupos que no contestan.

Han sido incorrectamente identificados como contenidos matemáticos necesarios para la resolución de este problema los contenidos relacionados con la estadística (5 grupos), como la respuesta: “*Los niños se fijan más en los colores que en el nº de bolas*” (grupo 22); y el enfoque frecuencial de la probabilidad (3 grupos), como la respuesta: “*Asignación frecuencial*” (grupo 6), ya que en este problema no se utilizan. Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido sobre espacio muestral mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso. Estos resultados apoyan las conclusiones de un estudio de Chick y Pierce (2008) sobre el trabajo con proyectos estadísticos, que indica que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con estadística o probabilidad.

Conocimiento del contenido y los estudiantes

En los apartados (c) y (d) se pide a los futuros profesores para evaluar las respuestas de estudiantes de educación primaria a los problemas propuestos e indicar las causas de sus dificultades, con lo que se pretende evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores de educación primaria. A continuación analizamos los resultados.

El análisis de las respuestas al apartado (c) se presenta en la Tabla 3. En ella se observa que la mayor parte de los grupos de futuros profesores fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema, aunque también hay algunos grupos a los que les cuesta diferenciarlas. Los casos más difíciles fueron las respuestas A4 y A5 donde respectivamente 7 y 6 grupos de futuros profesores consideran que las respuestas dadas son correctas, debido a que no han sabido distinguir entre suceso seguro y suceso posible. Como ejemplo la respuesta de un grupo sobre el alumno A4: “*El niño descubre que el ejercicio se basa en el azar y que existen multitud de posibilidades y variarán los colores y no se podrá estar seguro de los colores que sacarán*” (grupo 25), y la respuesta de otro grupo sobre el alumno A5: “*Aquí el niño mediante un procedimiento de suma sabe que hay 9 posibilidades de sacar bolas, entonces lo razona de esta manera*” (grupo 24).

Tabla 3 — Frecuencia de respuestas consideradas como correctas por los grupos de futuros profesores (n=31).

	Correcta	Incorrecta	En blanco
A1	1	30	
A2	2	29	
A3 (Correcta)	26	5	
A4	7	24	
A5	6	25	
A6	4	27	

Otro caso con cierta dificultad fue la respuesta A6, que cuatro grupos consideran correcta, debido probablemente a que no comprenden el enunciado del problema que prohíbe explícitamente mirar cuando se sacan las bolas de la caja. Un ejemplo es la siguiente respuesta: “*Está haciendo trampas*” (grupo 11).

En la Tabla 4 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas, a partir del análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado (d), en modo cíclico e inductivo. En ella se observa que pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos, dando explicaciones alternativas. La estrategia errónea de confundir el número mínimo de bolas que debe extraer, para obtener tres colores diferentes, con el suceso seguro (alumno A1) fue la más reconocida (20 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: “*Tres es el número mínimo de bolas que se pueden sacar, pero para estar seguro de sacar una de cada color hay que sacar como máximo 8 bolas*” (grupo 18).

Tabla 4 — Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas (n=31 grupos).

Explicación dada al error del alumno ficticio	A1 Confunde seguro con nº mínimo bolas	A2 Confunde seguro con posible	A4 Nunca seguro	A5 Fallo en el razonamiento combinatorio (Sacar todas)	A6 No comprende enunciado (Debe mirar la caja)
Explicación correcta (3 sin justificar)	20	18	4+3	5	17
El futuro profesor no lo explica bien		2	5	4	3
Respuesta del alumno no adecuada			1	7	2
El alumno piensa en el azar		3	2		
El alumno no comprende el azar/aleatoriedad	3	1		2	1
El alumno no justifica la respuesta			2		
El alumno no tiene conocimiento de probabilidad	3	1	4	2	1
El alumno no realiza un razonamiento matemático	1	2	1	1	
El alumno no entiende el problema	1		2		1
El alumno no contesta	1	1	1	1	4
Nunca estamos seguros por ser un juego aleatorio	1	1		1	1

Le sigue la estrategia errónea de confundir el suceso seguro con un suceso posible (alumno A2) identificada por 18 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: *“Este alumno tiene razón en que puede salir una de cada color, pero debe estar seguro y este no ha tenido en cuenta eso”* (grupo 10). Otra estrategia reconocida por 17 grupos ha sido la no comprender el enunciado del problema (alumno A6). Un ejemplo es la siguiente respuesta: *“No se puede mirar en la caja, es decir, no ha leído bien el problema”* (grupo 14).

Las estrategias de fallo de razonamiento combinatorio (alumno A5), como la respuesta siguiente: *“El niño va a lo seguro, quiere sacar 9 bolas”* (grupo 13), y la de que nunca se puede estar seguro debido a que es un experimento aleatorio (alumno A4), como la respuesta: *“Su error fue en no predecir que es un juego aleatorio y nunca estamos seguros de lo que va a salir”* (grupo 23), apenas fueron reconocidas como erróneas.

Una explicación alternativa aportada por los grupos de futuros profesores en todos los casos es la que indica que los alumnos de primaria han respondido de forma incorrecta debido a que no tienen conocimiento de probabilidad. Un ejemplo es el siguiente: *“A5. Respuesta de un alumno con ningún conocimiento probabilístico y que únicamente aplica la lógica sin comprobar si su uso es correcto o incorrecto”* (grupo 4).

Otra explicación alternativa en todos los casos, menos en el A4, es indicar que el alumno no comprende el azar o la aleatoriedad, sin explicitar la causa del posible error. Un ejemplo es la respuesta: *“En este caso podríamos justificar que el error se produce porque el niño no tiene en cuenta ni la observación ni la aleatoriedad”* (grupo 9).

Un pequeño número de grupos de futuros profesores justifica el error en todos los casos, menos en A6, porque el alumno no realiza un razonamiento matemático adecuado. Un ejemplo es la siguiente respuesta: *“A2. Aunque cabe la posibilidad, el alumno se confunde en su respuesta porque no realiza un razonamiento matemático”* (grupo 17).

Los resultados obtenidos por los 31 grupos de futuros profesores, indican que fueron capaces de discriminar con facilidad las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos de primaria a los problemas, debido posiblemente a que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas, ya que en muchos grupos hubo una inconsistencia entre la clasificación de una respuesta como incorrecta y la razón dada para explicar el error indicando que la respuesta era correcta y el alumno no supo explicarse. Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron la confusión entre suceso seguro y el número mínimo de bolas que debe extraer, para obtener tres colores diferentes, y entre suceso seguro y suceso posible. En resumen, los futuros profesores en este estudio muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar los errores de los estudiantes es insuficiente, lo que coincide con el estudio de evaluación realizado por Watson (2001).

Discusión y conclusiones

La finalidad del estudio era evaluar diversos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de los futuros profesores de educación primaria sobre el suceso seguro

y conceptos probabilísticos relacionados, siguiendo el modelo de Ball, Lubienski y Mewborn (2001) y Hill, Ball y Schilling (2008). Asimismo se utilizaron el tipo de preguntas sugerido por Godino (2009) para evaluar algunos componentes de dicho conocimiento. En lo que sigue discutimos los resultados y mostramos las principales conclusiones respecto a cada uno de estos componentes.

Conocimiento común del contenido

Una primera aportación de este trabajo es mostrar que la mayor parte de los futuros profesores de educación primaria participantes en este estudio manifiesta un conocimiento común insuficiente del contenido sobre el suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados, ya que solo el 46% de los futuros profesores responde correctamente a la cuestión planteada. Entre las dificultades se destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible y la falta de razonamiento combinatorio, que se manifiesta en los que responden que hay que extraer todas las bolas (8.1%), descrita también por Azcárate (1995). En otros casos, como indican Hawkins *et al.* (1992), se ha podido producir una interpretación errónea del experimento aleatorio que ha llevado a los futuros profesores a considerar un espacio muestral incorrecto.

Conocimiento especializado del contenido

Una aportación original de este estudio es mostrar que el conocimiento especializado del contenido respecto al concepto de suceso seguro y conceptos probabilísticos relacionados, en los participantes, es claramente insuficiente, ya que al pedir a los futuros profesores que identificaran los contenidos matemáticos en las tareas propuestas trabajando en grupos, la idea de probabilidad solo ha sido reconocida por la mitad de ellos y la de aleatoriedad por la tercera parte. En este punto, nuestros resultados apoyan las conclusiones del estudio de Chick y Pierce (2008), que indica que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con la estadística o probabilidad.

Hay tareas que realiza el profesor, como “indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción” (Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001, p. 453), que dependen claramente de su conocimiento especializado del contenido y, en vista de nuestros resultados, sería necesario mejorar este conocimiento en los futuros profesores, si queremos asegurar su éxito al realizar dichas actividades profesionales en la clase de probabilidad.

Conocimiento del contenido y los estudiantes

Los resultados sobre el conocimiento del contenido y los estudiantes sobre el suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados también son originales. Para evaluarlos, se pidió a los futuros profesores, trabajando en grupos, que valorasen las respuestas dadas por una serie de alumnos de educación primaria al problema propuesto. Aunque en

general fueron capaces de discriminar con facilidad las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos al problema, fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas. Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron la confusión entre suceso seguro y el número mínimo de bolas necesario para obtener una de cada color y entre suceso seguro y suceso posible.

En resumen, los futuros profesores en nuestro estudio muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar los errores de los estudiantes es insuficiente. Sería necesario mejorar la formación en este punto, dándoles a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles de una forma adecuada.

Implicaciones educativas

En este trabajo se aporta información original sobre las diferentes componentes del conocimiento probabilístico de los futuros profesores de educación primaria, en particular sobre el contenido “suceso seguro” y conceptos probabilísticos relacionados, complementando el trabajo de Azcárate (1995) y otros estudios previos. Estos resultados sugieren que dichos conocimientos podrían ser insuficientes y apoyan el interés de realizar una evaluación inicial de los futuros profesores al iniciar su periodo de formación, para detectar estas carencias, y proporcionarles un refuerzo sobre estos conceptos, en caso necesario.

Una implicación de interés para los formadores de profesores es la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de educación primaria. Para ello, como indican Godino, Ortiz, Wilhelmi y Roa (2011) se deberían proponer itinerarios formativos que mejorasen su formación matemática y didáctica, que evitaran los sesgos observados en el razonamiento probabilístico y que los hicieran competentes para reconocer los contenidos matemáticos necesarios para resolver de forma correcta un problema y para identificar los errores en las respuestas dadas por estudiantes y las posibles razones que pueden explicarlos. Esta reforma debe ser urgente, ya que como hemos observado en esta investigación, en algunos casos, los futuros profesores cometen los mismos errores que los estudiantes a los que han de formar.

Respecto a la metodología para llevar a cabo esta formación, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del espacio muestral. Para prepararlos en la componente didáctica, se pueden utilizar situaciones relacionadas con la docencia, como la presentada en este trabajo.

Agradecimientos: Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20, Proyecto EDU2010-14947 (MICINN y FEDER) y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Cádiz, España.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433–456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York, NY: Springer.
- Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. In J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD ROM]. Johannesburg: International Commission on Mathematical Instruction.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181–199.
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.
- Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1–24.
- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523–549.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 20, 13–31.
- Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R., & Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 271–282). New York, NY: Springer.
- Hawkins, A., Jolliffe, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187–205.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4(39), 372–400.
- Jones, G. (2005) (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York, NY: Springer.
- Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909–255). Greenwich, CT: Information Age Publishing & NCTM.

- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 487–519.
- Llinares S., & Krainer K. (2006). Mathematics student teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429–459). Rotherdam/Taipei: Sense Publishers.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. In A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahía), Brasil: International Statistical Institute.
- MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. In P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268–276). Huesca, España: SEIEM.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Roterdharm: Sense Publishers.
- Shaughnessy, J. M., & Cincetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Philips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teching of Statistics* [CD-ROM]. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute.
- Shulman (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), 305–337.
- Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Resumo. O objetivo deste trabalho é avaliar alguns componentes do conhecimento para o ensino de conceitos probabilísticos elementares de futuros professores do Ensino Primário, envolvidos numa tarefa na qual deveriam identificar o acontecimento certo numa experiência aleatória. Para avaliar o conhecimento comum do conteúdo analisaram-se as soluções apresentadas por 283 futuros professores do ensino primário espanhol a um problema aberto. Além disso, a partir do trabalho dos participantes em pequenos grupos inferiram-se duas componentes do conhecimento didático: (a) o conhecimento especializado do conteúdo, obtido da análise dos conteúdos matemáticos da tarefa; e (b) o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, inferido da classificação de um grupo de respostas, dadas por alunos do Ensino Primário à tarefa, em corretas e incorretas. Os resultados sugerem a necessidade de reforçar a formação dos futuros professores tanto no que respeita ao conhecimento matemático como ao conhecimento pedagógico do conteúdo.

Palavras-chave: Probabilidade; conhecimento do professor; espaço amostral.

Abstract. The aim of this paper is to assess some components in the probabilistic knowledge for teaching of pre-service primary school teachers. These teachers were given a task in which they must identify the certain event in a random experiment. Common knowledge of content is assessed through the responses given by 283 spanish pre-service primary school teachers to an open-problem. In addition,

two components of didactic knowledge are inferred through the participants' analyses, when working in small groups: (a) specialized knowledge of content is assessed from their analyses of the tasks' mathematical content; and (b) knowledge of content and students is assessed from their assessment of responses provided by primary school students. Results suggest the need to reinforce the training of pre-service teachers both in the mathematical and the didactic knowledge.

Keywords: Probability; teachers' knowledge; sample space.

■ ■ ■

JUAN JESÚS ORTIZ

Universidad de Granada, España

jortiz@ugr.es

NORDIN MOHAMEND

Universidad de Granada, España

nordin.mohamed@gmail.com

(Recebido em fevereiro de 2014; aceite para publicação em abril de 2014)