Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra

Um estudo no 4.º ano de escolaridade

Maria da Graça Bruno Pereira
Agrupamento de Escolas de Alapraia, Portugal

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa
Unidade de Investigação em Desenvolvimento e Formação, Universidade de Lisboa, Portugal

Introdução

A geometria é um dos temas do ensino da matemática que mais controvérsia tem levantado. Questionam-se os conteúdos, as finalidades e também as metodologias a utilizar na sala de aula. Há, no entanto, grandes linhas de concordância sobre o que deve ser o ensino da geometria nas escolas: reforço da intuição espacial, recurso à utilização dos computadores, com especial destaque a ambientes de geometria dinâmica (AGD) e manipulação das figuras elementares valorizando a investigação de algumas propriedades.

De acordo com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), em vigor aquando da realização deste estudo, o ensino da geometria centra-se no desenvolvimento do sentido espacial dos estudantes e o estudo das figuras bi e tridimensionais tem um papel importante neste tema. Logo desde o 1.º ciclo estudam-se as diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização. O ensino da geometria, no 1.º ciclo, deve privilegiar a exploração, manipulação e a experimentação utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, devendo os alunos ser capazes de agir, prever, ver e explicar o que se passa no espaço que percecionam, desenvolvendo, progressivamente, a capacidade de raciocinarem com base em representações mentais.

Enquadramento teórico

Este ponto pretende dar a conhecer alguma da literatura que enquadra este artigo (para maior desenvolvimento ver Pereira, 2012), realçando o papel das representações e dos AGD e materiais manipuláveis na aprendizagem das figuras geométricas 2D, nomeadamente propriedades e classificação dos quadriláteros.

Representações

Existe uma vasta teoria sobre a representação em geometria, em especial no que se refere às figuras geométricas. Estas são, por um lado, usadas para retirar ideias que conduzem ao conceito geométrico, por outro, são entendidas como meios para representar um conceito geométrico formal, tendo um papel importante no desenvolvimento do raciocínio dos alunos. A representação é considerada como uma parte essencial da atividade matemática e um veículo para a apreensão de conceitos matemáticos (ver, por exemplo, Stylianou, 2010). Em geral, pode considerar-se que o termo representação se refere simultaneamente ao processo e ao produto (NCTM, 2007), já que, se for entendida como um processo, corresponde ao ato de captar um conceito matemático numa determinada forma, se for vista como um produto, trata-se da forma propriamente dita.

As representações podem ser externas, como entidades observáveis que são utilizadas para ilustrar ideias ou conceitos, ou internas, que ocorrem na mente dos alunos e que simbolizam ideias matemáticas (Goldin, 2008). Mas, "só podemos fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas" (Goldin & Shteingold, 2001, p. 6). É através das conexões entre representações internas e externas que a sua utilização em matemática assume um contributo significativo no processo de ensino e aprendizagem.

Duval (1998) refere que a aprendizagem da geometria envolve três tipos de processos cognitivos: visualização, construção e raciocínio. Este autor argumenta ainda que "esses três tipos de processo cognitivo estão intimamente ligados e a sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em geometria" (p. 38). Enquanto os alunos desenham, traçam, medem e constroem, desenvolvem a sua capacidade de visualização e estão a aprender a raciocinar.

Embora o processo de visualização seja, geralmente, considerado útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática, Dreyfus (1991) refere que uma figura pode ser, às vezes, enganosa pois os alunos são muitas vezes influenciados por figuras paradigmáticas (também designadas por modelos mentais ou desenhos prototípicos) podendo a simples visualização baseada nessas imagens paradigmáticas interferir com o processo de dedução. Esta é uma das dificuldades reconhecidas já que os alunos se fixam, por vezes, em aspetos concretos de uma figura particular, esquecendo que esta pretende representar uma situação mais geral, uma classe. Segundo Clements e Battista (1992), "Os alunos costumam atribuir características de um desenho ao objeto geométrico que representam" (p. 448) ou, frequentemente, conferem atributos e características irrelevantes dos diagramas aos conceitos geométricos.

Na mesma linha, Fischbein (1994) defende que certos assuntos podem ligar uma representação particular a um dado conceito o que provoca um forte impacto nas decisões cognitivas dos alunos. Este autor propôs uma teoria em que o objeto geométrico é tratado como tendo duas componentes, uma conceptual e outra figural. A componente conceptual, através da linguagem escrita ou falada, expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito e, no caso da geometria, essa imagem pode ser manipulada por transformações geométricas mantendo invariantes certas relações. A harmonia entre estas duas componentes determina a noção correta sobre o objeto geométrico. Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha um papel fundamental. Duval (1998) e Matos (1992) vão ao encontro desta teoria, mostrando que a apreensão percetiva pode constituir-se como um obstáculo a uma interpretação geométrica, sobretudo os desenhos protótipos e as interpretações a eles associados. O tratamento de objetos geométricos baseado em desenhos particulares, os ditos desenhos prototípicos, faz com que os alunos não reconheçam desenhos desses mesmos objetos quando diferem desses modelos prototípicos. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho e o seu traçado particular passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspeto conceptual quer no figural, estabelecendo desequilíbrios na formação do conceito.

Neste estudo, são entendidas como representações as imagens construídas pelo aluno para representar conceitos geométricos e as apresentadas pelo professor e pelo aluno para identificar propriedades que conduzam ao conceito geométrico.

AGD e Materiais manipuláveis

No sentido de minorar os possíveis desequilíbrios na formação dos conceitos, provocados pelo tratamento de objetos geométricos com base em desenhos particulares e evitar a influência das imagens paradigmáticas, pode utilizar-se a geometria dinâmica. Uma figura em geometria dinâmica é, também, uma representação visual. Vários autores, entre os quais Laborde e Laborde (1992), defendem o recurso a AGD, por terem a vantagem de permitir a manipulação do desenho no ecrã do computador. Num AGD, o aluno pode arrastar um objeto geométrico como um vértice dum quadrado e alterar a figura dinamicamente, preservando as condições dadas e os invariantes geométricos, que são consequência dessas condições. Um aluno pode interagir com uma figura dinâmica, que fornece uma imagem clara das ideias matemáticas abstratas, por meio do arrastamento do objeto concreto. Assim, e de acordo com Wong, Yin, Yang e Cheng (2011), o aluno pode comparar múltiplas perspetivas fornecidas por diferentes representações e alterar conjeturas e conceitos incorretos. Na descoberta das propriedades, as características dinâmicas das figuras (desenhos em movimento) implicam que as particularidades da representação física mudem, fazendo emergir os invariantes, ou seja, as reais propriedades das figuras.

A utilização de materiais manipuláveis no desenvolvimento do pensamento geométrico e espacial em crianças mais novas é sugerida por vários autores (Clements & McMillen, 1996; Ponte & Serrazina, 2000), na medida em que fornecem o suporte visual e experimental e, juntamente com a reflexão sobre as atividades realizadas, tem um papel primordial na construção dos conceitos geométricos. Ao nível do 1.º ciclo do ensino básico, podemos considerar o uso de materiais como fundamental, por um lado, porque as crianças estão fortemente dependentes do ambiente e dos materiais à sua disposição e, por outro, porque sendo os conceitos e relações matemáticas entes abstratos, é necessário encontrar ilustrações, representações e modelos que facilitem a construção desses conceitos.

No entanto, a utilização de materiais, só por si, não garante a aprendizagem (ME, 2007) pois, tal como é referido em Matos e Serrazina (1996), os conceitos matemáticos que a criança deve construir não estão em nenhum dos materiais de forma a podê-los abstrair empiricamente, mas "formar-se-ão pela acção interiorizada da criança, pelo significado que dá às suas acções, às formulações que enuncia, às verificações que realiza" (p. 197). Assim, os professores têm um papel fundamental neste processo, devendo disponibilizar os materiais e organizar adequadamente o ambiente de aprendizagem, de modo a encorajar os alunos a explorar as figuras e as suas propriedades.

Também o anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) enfatiza a importância da utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem da geometria e da medida, por permitirem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos. O mesmo programa dá ênfase à utilização da tecnologia, nomeadamente aos AGD. O NCTM (2007) também se refere à tecnologia nos seus princípios, mais precisamente, no *Princípio para a Tecnologia* onde se pode ler "A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (p. 26).

Neste estudo, optou-se pelo recurso ao geoplano (5X5) porque é um recurso estimulante que possibilita discussões ricas acerca das características dos polígonos. Também por se considerar um recurso facilitador na resolução de problemas geométricos e no estudo das figuras planas, possibilitando o apoio à representação mental dessas figuras. Ainda porque constitui uma etapa no caminho da abstração e por se adequar às tarefas da experiência de ensino deste estudo, nomeadamente, a representação de quadriláteros enfatizando a identificação e a nomenclatura e, ainda, a emergência de algumas propriedades das figuras.

As figuras geométricas (2D)

Desde 1950, foram feitas pesquisas por psicólogos para observar o desenvolvimento de níveis na compreensão geométrica (Piaget & Inhelder, 1967). Estes autores teorizaram que inicialmente as crianças discriminam objetos com base em características "topológicas", tais como ser fechada ou de outra forma topologicamente equivalente e só as crianças mais velhas podem discriminar figuras retilíneas de curvilíneas e, finalmente, figuras retilíneas fechadas, tais como quadrados e losangos, através de explorações sistemáticas e coordenadas.

A compreensão básica das figuras geométricas, conforme teorizado por Hannibal (1999), é essencial no estudo da geometria e os professores devem ajudar as crianças a desenvolver a compreensão de categorias de figuras.

Mas não podemos falar de figuras geométricas sem pensar no espaço, pois interagir com figuras reais envolve a compreensão do mundo visual que nos rodeia e também a interpretação da informação visual e, acima de tudo, compreender as mudanças nas figuras que povoam o nosso espaço. O espaço e as figuras, como defendido por Freudenthal (1973), fornecem o ambiente no qual o aluno pode obter a perceção de uma teoria matemática. Este ambiente adquire, numa fase mais avançada, um aspeto mais amplo e mais abstrato, sem a necessidade de um ambiente real como base. No caso mais abstrato, lidamos com as figuras e algum tipo de espaço, mesmo quando elas são representações visuais, ou seja imagens mentais ou, por outras palavras, representações teóricas.

De acordo com Senechal (1990 citada em Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996), a interação significativa com figuras reais no nosso espaço tem três objetivos principais: "Para descobrir semelhanças e diferenças entre objectos, para analisar os componentes da figura, e para reconhecer as figuras em diferentes representações" (p. 161). Ela sugere que o estudo das figuras deverá ser orientado, em todos os anos de escolaridade, por três instrumentos principais: identificação e classificação de figuras, análise de figuras e representações e visualização de figuras.

Considerando a classificação como a organização de um conjunto de objetos segundo um determinado critério (Loureiro, 2008), Smith (1995) descreve o ato de classificar como um processo individual de apelo às representações mentais das várias categorias para decidir em qual incluir determinado objeto. De facto, o pensamento geométrico dos alunos não é apenas visual (Clements *et al.*, 1999) mas, na verdade, decidem se um objeto pertence a uma categoria se for suficientemente similar a outro objeto anteriormente observado (Smith, 1995). Inclusivamente, Clements e Battista (1992) sugerem que os alunos diferenciam as formas através da combinação de protótipos visuais (exemplares de figuras) e algum conhecimento das suas propriedades. Os protótipos são importantes na fase inicial da aprendizagem da geometria, pois proporcionam exemplos que permitem aos alunos associar nomes a vários tipos de figuras (Edwards & Harper, 2010). Porém, as formas limitadas de protótipos dos alunos conduzem à centralização da observação numa característica em especial, em detrimento de outros atributos (Clements & Sarama, 2000).

Zaslavsky, Chapman e Roza (2003, citados em Loureiro, 2008) afirmam que a classificação de diferentes objetos matemáticos de acordo com vários critérios pode salientar a consciência que temos dos modos como eles se relacionam entre si. Embora não haja consenso relativamente à classificação, vários investigadores parecem estar de acordo quanto ao considerarem a classificação como um dos aspetos essenciais no ensino da geometria para os primeiros anos (Albuquerque *et al.*, 2008; Jones & Mooney, 2003; Loureiro, 2008).

Vários estudos têm sido realizados acerca da classificação de formas/quadriláteros, dando conta de algumas conceptualizações erradas das crianças capazes de influenciar as classificações. Fujita e Jones (2007) referem dificuldades dos alunos em classificar quadriláteros, indicando que tais dificuldades estão relacionadas com a complexidade em aprender a analisar as características de diferentes quadriláteros e distinguir entre os aspetos essenciais e não essenciais, aprendizagem que requer dedução lógica e interações adequadas entre conceitos e imagens.

Uma quantidade considerável de estudos estabelece a teoria de van Hiele como uma descrição geral precisa do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (Clements & Battista, 1992) e do raciocínio nele implícito. De acordo com essa teoria, os alunos progridem através de níveis sequenciais e hierárquicos de pensamento em geometria. No final do primeiro nível, os alunos são capazes de identificar retângulos propriamente ditos, quadrados, losangos e outras figuras. No final do segundo nível, são capazes de enumerar várias propriedades de cada uma dessas figuras. Somente no terceiro nível, concordam com a usual classificação hierárquica dos quadriláteros, ou seja, que um quadrado é um tipo especial de retângulo e que ambos são paralelogramos especiais. A razão para esta mudança é que, no terceiro nível, os alunos são capazes de compreender a lógica de conexões entre as propriedades e, consequentemente, são capazes de aceitar as consequências lógicas de uma definição (van Hiele, 1984). Mas para os van Hiele a inclusão de classes pode ocorrer no Nível 2 desde que uma criança possa perceber que um quadrado é um losango, pois tem todas as suas propriedades, tal como referido em Villiers e Njisane (1987). Para muitos autores (Craine & Rubenstein, 1993 citados em Villiers, 2010; Casa & Gavin, 2009), os alunos deveriam desenvolver uma compreensão sólida de uma classificação hierárquica (inclusiva) antes de se envolverem com a definição formal dos quadriláteros. Esse desenvolvimento pode ser alcançado pelo uso de *softwares* interativos de geometria, onde podem confirmar as propriedades que se mantêm durante a transformação dinâmica das figuras (Jones, 2000; Leung, 2008), podendo facilitar a aceitação de uma classificação hierárquica dos quadriláteros, mesmo nos níveis inferiores de van Hiele.

Metodologia

Opções metodológicas

O estudo seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa optando-se pelo *estudo de caso múltiplo*, pois focou-se a atenção específica em três díades, no seu ambiente natural. Procurou estudar-se como viveram as aulas onde se implementou uma sequência de tarefas com recurso ao *GeoGebra* e ao geoplano, no sentido de compreender os contributos de um e de outro na identificação das propriedades dos quadriláteros e compreensão das relações entre eles (Pereira, 2012).

Participantes

Participaram neste estudo os alunos duma turma de 3.º/4.º anos, constituída por vinte e cinco alunos (três de 3.º ano, um dos quais com NEE, e vinte e dois de 4.º ano), duma escola do concelho de Cascais. A seleção desta turma deveu-se ao facto de a pesquisa ter sido feita na turma onde lecionava a primeira autora deste artigo, que assumiu as funções de professora e de investigadora. Foram selecionados seis alunos com níveis de aproveitamento diferente, na área de matemática: dois com bom aproveitamento, dois com aproveitamento médio e dois com aproveitamento mais fraco. Como referido, este artigo incide no trabalho de um destes pares (Luísa e Maria), o par considerado com aproveitamento bom.

O uso do computador em sala de aula era habitual (uma vez por semana) desde o 1.º ano de escolaridade embora o AGD, *GeoGebra*, tenha sido usado apenas no 3.º ano, para trabalhar o tópico "retas paralelas e perpendiculares" e o conceito de "ângulo".

Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: observação participante, análise documental (produções dos alunos) e inquirição, por entrevista, a alguns alunos. Como complemento a estas técnicas recorreu-se, também, à gravação áudio e vídeo (e respetivas transcrições) das discussões nos grupos e no coletivo da turma. Registaram-se, ainda, ideias, estratégias, reflexões e palpites, bem como os padrões que emergiram, foram as notas de campo "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150).

Sendo, simultaneamente, a primeira autora professora da turma e investigadora, foi o instrumento principal da recolha de dados, o que permitiu que fossem recolhidos em situação e complementados com a informação obtida através do contacto direto. O recurso a diversas formas de recolha teve como objetivo a triangulação de dados para dar maior fiabilidade ao estudo.

A opção pela observação participante baseou-se no facto de permitir compreender o fenómeno em estudo, ver factos que os participantes não veem, possibilitar a experiência com o fenómeno e favorecer uma abordagem indutiva, reduzindo as preconceções. As notas de campo foram um complemento às gravações áudio e vídeo, pois estas nem sempre captaram aspetos significativos como expressões dos participantes, comentários extra, impressões, reações e ideias do observador … perante os quais o investigador, no decurso da recolha, registou ideias, estratégias e fez, até mesmo, alguma interpretação e reflexão sobre os dados.

Em conjunto com a observação participante e a análise documental, foram utilizadas entrevistas "para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). Atendendo ao duplo papel na pesquisa, investigadora e professora, foi difícil separar as entrevistas das outras atividades de investigação, dado que ocorreram no contexto da observação participante e em outros momentos considerados pertinentes, nomeadamente, no final das tarefas. Estas entrevistas ocorreram de modo informal, procurando-se esclarecer apenas situações decorrentes da realização das tarefas, quando foi impossível fazê-lo no momento da ocorrência.

As produções dos alunos, bem como a apresentação/discussão dos resultados no grupo turma, também foram usadas como dados tendo, a sua análise, contribuído para complementar e aumentar as evidências dos resultados.

Recolha e análise dos dados

Foi delineada uma experiência de ensino com os seguintes objetivos: (a) implementar uma sequência de tarefas promotoras da construção de quadriláteros e identificação das suas propriedades; (b) compreender se e como os alunos estabeleciam relações entre os quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango; (c) compreender quais as vantagens e/ou limitações do AGD e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros. Foram elaboradas 18 tarefas, sendo as cinco primeiras resolvidas no geoplano e/ou no papel ponteado, as duas seguintes para explorar o *GeoGebra*, as oito a seguir resolvidas no *GeoGebra*, seguidas de duas que usaram os dois recursos, sendo a última uma tarefa de papel e lápis.

A teoria de van Hiele sobre a construção do pensamento geométrico serviu de referência à elaboração da sequência de tarefas aplicada, situando-se as tarefas nos dois primeiros níveis. Na conceção das tarefas foi dada ênfase ao caráter exploratório e investigativo das mesmas por se adequarem às questões do estudo e ao tema em causa, a geometria, e por não exigirem dos alunos um grande número de conhecimentos anteriores.

A sequência de tarefas foi pensada de modo a abranger representação no geoplano para os alunos se familiarizarem com os quadriláteros; exploração do *software*; desenho para fazer emergir as propriedades; construção para identificar propriedades e construção para relacionar as propriedades e fazer emergir a classificação

As atividades desenvolvidas com o *GeoGebra* envolveram o desenho e a construção de figuras com o *software* e a análise de construções já prontas de modo que, através da função "arrastar", os alunos identificassem as propriedades presentes em cada figura. As propostas para o geoplano envolveram a representação de quadriláteros, enfatizando a identificação e a emergência de algumas propriedades das figuras.

A implementação das tarefas decorreu em janeiro e fevereiro, na sala de aula, utilizando computadores pessoais, na maioria o "*Magalhães*", um por díade, e o geoplano, um por aluno. As tarefas foram realizadas de forma sequencial englobando três momentos: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, em pares, e discussão coletiva com toda a turma.

Parafraseando Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados. Essa análise "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

A análise dos dados foi sendo feita à medida que se realizava a recolha, uma vez que as tarefas não estavam completamente definidas à partida, e incidiu sobre o que se foi descobrindo, nomeadamente aspetos inesperados, evidências e regularidades de modo a proceder a possíveis alterações e reformulações. No final da recolha, procedeu-se à análise mais formal começando pela organização de todo o material recolhido de modo a poder manipulá-lo facilmente. Procedeu-se a várias leituras para que os dados pudessem ser "arrumados" em *categorias de codificação* (Bogdan & Biklen, 1994), utilizando palavras e frases dos sujeitos sem, no entanto, perder de vista o todo recolhido.

Esta análise não teve por base um modelo teórico específico, pois não se conseguiu encontrar nenhum que se adaptasse à natureza do estudo e às características dos alunos.

Assim, os dados foram "arrumados" em categorias emergentes, definidas de acordo com o objetivo do estudo, as questões de investigação e a fundamentação teórica. Inicialmente, fez-se uma breve análise do desempenho dos pares em todas as tarefas e, posteriormente, agrupando situações semelhantes, encontraram-se regularidades que permitiram construir cadeias lógicas de evidência. Estas fizeram emergir as categorias: atitude perante as tarefas, representações e identificação de propriedades e visualização e identificação de propriedades, que permitiram responder às questões do estudo.

Fez-se, também, uma análise indutiva, pois as sequências e padrões de análise não estavam, à partida, definidos emergindo dos dados recolhidos (Goetz & LeCompte, 1988). Salienta-se que os dados não foram recolhidos com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses previamente construídas mas o de construir um quadro que foi ganhando forma à medida que se recolheram e examinaram as partes.

Também não se pretendia saber se os alunos atingiam um ou outro nível de desenvolvimento mas sim compreender o modo como as aprendizagens ocorriam enquanto resolviam as tarefas, utilizando um ou outro recurso didático. A par deste propósito, houve alguns cuidados a não descurar, nomeadamente, o fascínio das propriedades dinâmicas do *software* como o "rodar", o "ampliar" e o "arrastar". Os alunos focavam-se no "movimento" que acontecia no ecrã do computador, esquecendo o propósito da tarefa, à semelhança do referido em Villiers (2007). Foram a discussão interpares e o registo dos raciocínios no guião da tarefa e em cartazes coletivos que possibilitaram ultrapassar este constrangimento provocado pela utilização do AGD.

O papel de professora e investigadora

A escolha do tema a investigar foi um desafio para a primeira autora, bem como assumir o papel de professora e investigadora tendo a inexperiência neste duplo papel sido uma das primeiras dificuldades enfrentadas. Ao pretender ensinar, observar, tomar notas, registar o máximo de ocorrências…, o papel de investigadora passou para segundo plano pois a investigação decorreu no desenrolar normal das aulas. Isto exigiu grande esforço para atender às solicitações dos alunos, pois todos estiveram envolvidos na experiência de ensino. Outra das dificuldades foi a gravação vídeo das aulas, já que a câmara esteve fixa, não captando imagens mais pormenorizadas e discussões nos grupos que enriqueceriam os dados. Também, por vezes, a gravação foi interrompida (falta de bateria, substituição do CD…) antes de terminar a tarefa. A grande interação dos alunos com o computador, durante a realização das tarefas, dificultou o acesso a essas interações, bem como o acompanhamento, mais apertado, dos grupos em estudo. Tal situação foi minorada com as apresentações/discussões no grupo turma, onde os resultados foram apresentados e discutidos, as dúvidas esclarecidas e a reflexão sobre as propriedades dos quadriláteros aprofundada, tempo que se constituiu um momento privilegiado da tomada de notas.

O receio da professora/investigadora de não saber responder a alguma questão relacionada quer com o *hardware* quer com o *software* esteve sempre presente pois, apesar de serem recursos habitualmente usados por estes alunos, não deixam de constituir verdadeiros desafios. Foi a natureza das tarefas, exigindo um professor moderador e orientador, que criou espaço para, juntamente com os alunos mais desenvoltos no uso da aplicação, resolver dificuldades relacionadas com estes recursos e ultrapassar os efeitos do receio sentido.

O caminho para uma classificação

Maria e Luísa eram alunas com facilidade de aprendizagem em todas as áreas curriculares e tinham bom aproveitamento e comportamento. Trabalharam bem em grupo, tendo Maria, geralmente, assumido a liderança. Nas discussões coletivas, levantaram questões pertinentes e contribuíram para o esclarecimento de dúvidas e aprofundamento de conhecimentos.

Representações e identificação das propriedades

Na primeira tarefa os alunos tinham de representar no geoplano e desenhar no papel ponteado figuras de quatro lados de diferentes formas, indicando os seus elementos: número de vértices, ângulos e diagonais. Este par representou diferentes quadriláteros e revelou ter bem adquirida a conservação da forma, pois não representou figuras repetidas (Figura 1).

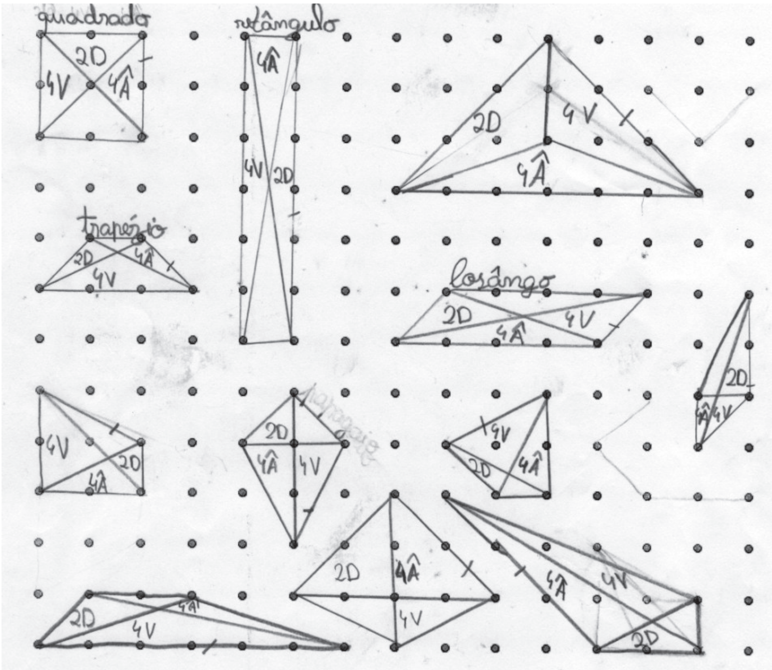


Figura 1. Representações dos quadriláteros, no geoplano, identificação e registo dos seus elementos

Representaram um número elevado de quadriláteros mas revelaram conhecer um número limitado de nomes. Identificaram corretamente o quadrado, o *retângulo* e o *trapézio* (apenas o isósceles) e chamaram losango ao paralelogramo propriamente dito.

Os quadriláteros representados foram diversificados mas notou-se a forte influência das imagens protótipos, nomeadamente do quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo, propriamente ditos, e papagaio reto.

A comparação das figuras foi feita, maioritariamente, de forma visual e, em alguns casos, com referência à imagem protótipo, como ficou claro na comparação das representações feitas (Figura 2).

Prof.: Fizeram diferente? Então vamos olhar para ali e vamos ver se há ali algum repetido.

Maria: Sim há. Há dois meios trapézios…

Prof.: Há dois quê?!

Maria: Aqueles que são metade do trapézio.

Prof.: Metade do trapézio! Explica lá isso. O que é isso de meio trapézio? Explica lá.

Maria: É assim professora. É a metade do trapézio.

(Maria foi mostrar a representação ao quadro)

Maria: Este é o meio trapézio, professora. [Maria apontava o trapézio retângulo]

Prof.: Porque é que dizes que é *um meio trapézio*?

Luísa: Porque se nós fizermos outro ao lado, forma um trapézio. [Completou a Luísa]

(Maria desenhou a outra metade do trapézio isósceles)

Maria: Eu não consigo muito bem, mas assim forma o trapézio.

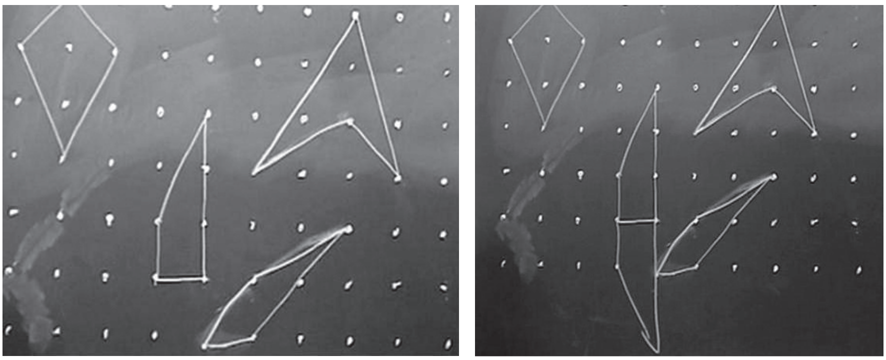


Figura 2. Representações para explicar a ideia de meio trapézio

O par usou a imagem protótipo de trapézio (isósceles) para o comparar com o trapézio retângulo. Na verdade identificaram uma simetria no trapézio isósceles e visualizaram o seu eixo de reflexão e como não sabiam o nome dessa figura, nomearam-no *meio trapézio*.

Outro: Professora eu cheguei à conclusão que o "meio trapézio" não existe.

Prof.: Tu achas que não existe "meio trapézio"?!

Outro: É trapézio ou não trapézio.

Luísa: Nelson, nós estamos a chamar "meio trapézio" porque se nós o partirmos em metade [referia-se ao trapézio isósceles] ficava como este [referia-se ao trapézio retângulo] e nós não sabemos como se chama mesmo.

Luísa e Maria compararam as figuras pela aparência global, pois não referiram qualquer propriedade. Parecem ter tido como referência a imagem mental como se pode observar quando o par representou um trapézio (não isósceles) (Figura 3), a que se seguiu o seguinte diálogo:

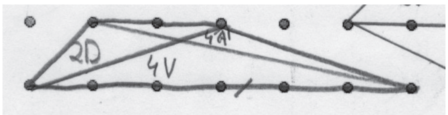


Figura 3. Representação de quadriláteros diferentes

Prof.: Mais alguém tem um diferente?

Luísa: Nós temos dois, professora.

[…]

Outro: Já está repetido. É o trapézio.

Maria: Não é o trapézio.

Luísa: Porque tem um lado maior do que o outro.

[Maria comparava os dois trapézios desenhados no geoplano e acompanhava a explicação apontando para os desenhos]

Maria: Porque este lado aqui é maior do que este [Referia-se aos lados opostos não paralelos do trapézio escaleno] e este é igual a este. [Referia-se aos lados opostos não paralelos do trapézio isósceles]

Foi notória a influência da imagem protótipo na representação da ideia de trapézio construído por estas alunas. Essa representação influenciou também as propriedades a ela associadas, pois ficou claro que as alunas formaram a ideia de trapézio como uma figura com os dois lados não paralelos iguais.

Como referido anteriormente, a comparação das figuras, nas tarefas iniciais, foi feita, maioritariamente, de forma visual. Rodaram e viraram o geoplano que facilitou a comparação de figuras representadas em diferentes orientações, tendo recorrido, frequentemente, à sobreposição. No entanto, sobretudo durante a apresentação/discussão das figuras à turma surgiram, juntamente com a comparação baseada na perceção visual, as primeiras referências a propriedades, como aconteceu na comparação de figuras difíceis de discriminar visualmente. Salienta-se que as propriedades mencionadas tiveram sempre como referência o desenho da figura.

Luísa: A mim parece-me um paralelogramo.

[…]

Luísa: Tem 2 ângulos obtusos e 2 agudos. É este [apontava para o paralelogramo] porque este também tem 2 ângulos agudos e 2 ângulos obtusos.

[…]

Luísa: Este aqui é mais parecido com um papagaio.

Maria: Ó Nelson, este aqui [apontava numa representação] é um ângulo reto e este aqui [apontava na outra representação] também é um ângulo reto.

Em relação às propriedades, a mais usada para estabelecerem a comparação foi a relativa aos ângulos, o que nem sempre foi fácil pois os desenhos não foram feitos com a precisão necessária de modo a permitir uma medição correta da sua amplitude.

Com o objetivo de representar quadrados de diferentes tamanhos e posições, a compreenderem a conservação da forma e identificarem quadrados em representações não prototípicas, realizaram outra tarefa no geoplano.

A tarefa foi desenvolvida com facilidade e, mais uma vez, a representação no geoplano facilitou a estratégia apresentada por este par na descoberta dos quadrados. Usou, para quadrados com lados na horizontal, as configurações 1×1; 2×2; 3×3 e 4×4 e descobriu quadrados com lados não horizontais partindo dos quadrados em posição prototípica e unindo pregos de fronteira (Figura 4).

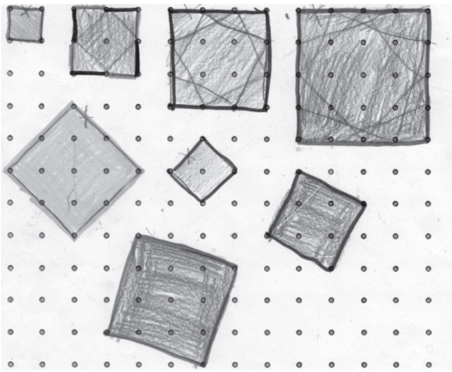


Figura 4. Descoberta de quadrados diferentes no geoplano

Numa outra tarefa, onde se pedia que representassem, no geoplano, "quadriláteros com lados iguais dois a dois", a representação apresentada revela a influência das imagens prototípicas na imagem mental que as alunas têm dos quadriláteros (Figura 5), também notória na primeira tarefa.

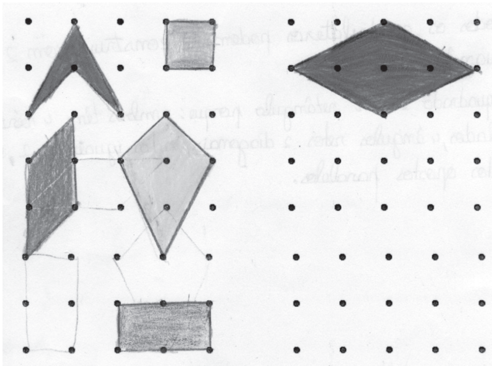


Figura 5. Representações, no geoplano, de quadriláteros com lados iguais dois a dois

Maria usou as representações das figuras e comparou-as recorrendo ao aspeto visual e à imagem mental que delas tem. No entanto, o par constatou que essa comparação não era suficiente, o que fez emergir as propriedades surgindo, assim, a comparação baseada no visual mas, ao mesmo tempo, baseada nas propriedades das figuras. O mesmo aconteceu quando compararam duas representações diferentes do papagaio:

Luísa: É o papagaio só que é mais gordo.

Prof.: E tu achas que têm a mesma forma?

Maria: Não.

Prof.: Porquê?

Maria: Porque não têm as mesmas propriedades.

Prof.: Não? Quais são as propriedades que não tem?

Maria: Aquela do ângulo reto.

Luísa recorreu à aparência global das figuras, considerando o papagaio com a mesma forma, apenas "mais gordo", enquanto Maria fez a comparação recorrendo a propriedades considerando que não tinha a mesma forma pois não tinha apenas um ângulo reto como o papagaio representado.

Em síntese, nas tarefas executadas no geoplano, o par representou quadriláteros diversificados mas notou-se a forte influência das imagens prototípicas, nomeadamente do quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo propriamente ditos, e papagaio reto. A imagem mental que as alunas tinham das formas influenciou as representações, ao mesmo tempo que basearam a identificação de propriedades dos quadriláteros nessas imagens mentais das figuras e nas características visuais das representações feitas. As representações surgiram, assim, tanto para retirar ideias que conduziram ao conceito geométrico, como para representar um conceito geométrico formal. Nas tarefas iniciais, a comparação das figuras foi feita, maioritariamente, de forma visual. Rodaram e viraram o geoplano que facilitou a comparação de figuras representadas em diferentes orientações, tendo recorrido, frequentemente, à sobreposição. No entanto, o par constatou que essa comparação não era suficiente, sobretudo quando se tratava de figuras difíceis de discriminar visualmente, facto que fez emergir as propriedades. Surgiu, assim, a comparação baseada no visual mas, ao mesmo tempo, baseada em algumas propriedades das figuras, embora essas propriedades tivessem como referência o desenho da figura.

Foi nas tarefas realizadas no AGD (*GeoGebra*), que pressupõe representações de ordem diferente, que a referência às propriedades se intensificou, apesar de a imagem mental continuar a ter grande influência nas representações, como se pode constatar nas primeiras tarefas realizadas com o GeoGebra. Numa das tarefas "Construção de um paralelogramo no GeoGebra" e, apesar de seguirem, corretamente, o plano de construção dado as alunas representaram as figuras conforme a imagem mental que delas tinham. Foi o caso do paralelogramo (Figura 6) pois, quando desenharam o terceiro ponto (C), colocaram-no de modo a obter uma linha oblíqua, representando a imagem que têm de paralelogramo (figura sem ângulos retos).

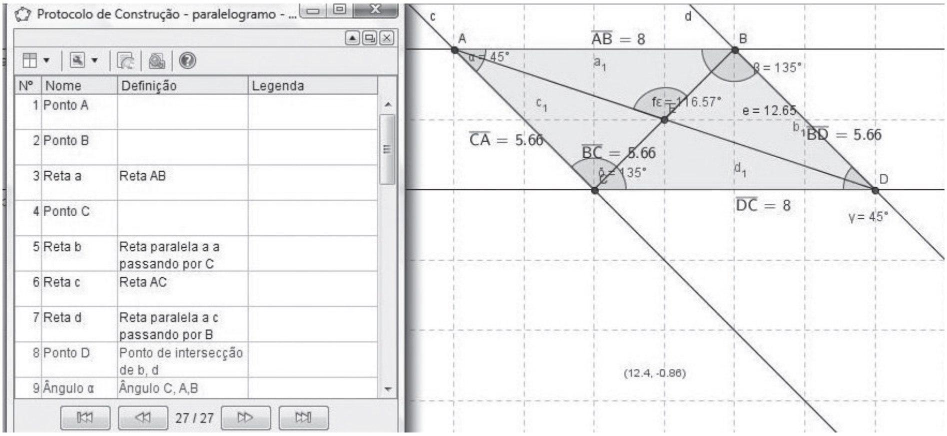


Figura 6. Representação do paralelogramo realizada com o *Geogebra*, seguindo o protocolo de construção

Ou ainda quando tentavam registar as suas propriedades, como ficou evidente numa das tarefas em que os alunos, a partir da observação da deformação de "quadriláteros" e do que se altera e se mantém, identificaram as propriedades comuns:

Outro: Os lados têm medida diferente.

[…]

Prof.: Perceberam esta descoberta?

Maria: Ela disse…

Prof.: Disse "os lados têm medidas diferentes".

Maria: Pois têm medidas diferentes.

Luísa: Têm porque o paralelogramo tem 2 parale… tem 2 lados paralelos que são grandes, depois os outros 2 são pequenos.

Luísa identificou, no paralelogramo, a igualdade dos lados dois a dois, baseando essa identificação na sua imagem mental de paralelogramo, uma figura em que os lados consecutivos têm comprimento diferente.

À medida que avançavam na concretização da experiência de ensino, o trabalho no *GeoGebra* possibilitou que as características visuais das representações, nomeadamente as medidas, sobressaíssem, o que parece ter facilitado a reflexão das alunas sobre o reconhecimento das propriedades:

Luísa: Sou eu que vou medir os ângulos. 45, o mesmo, é igual, 135 é igual. São inteiros os números!

Maria: Vou medir os lados.

Luísa: Nós não queremos o perímetro.

Maria: Já vai, Luísa, já vai!

Luísa: Estou a dizer ao Geogebra.

Maria: Eu sei. Ok. Eu já vou apagar o perímetro.

Luísa: Olha! Tem os ângulos iguais dois a dois.

Para responder à segunda parte da tarefa "Construção de um paralelogramo no Geogebra" (Figura 6), onde se pretendia que identificassem as propriedades dos paralelogramos, o par fez a descrição de tudo o que observou (Figura 7), mencionando características desnecessárias como é o caso da soma dos ângulos internos ou os ângulos consecutivos, tal como se pode verificar no registo:

Regista as características do paralelogramo?

Quadrilátero:	Ângulos:	Lados:	Diagonais:
paralelogramo	• 2 agudos e 2 obtusos. • os opostos são iguais 2 a 2. • a soma dos ângulos internos consecutivos é de 180º. • a soma da medida de todos os ângulos internos é de 360º.	• a medida dos lados opostos é igual 2 a 2 • os lados opostos são paralelos 2 a 2.	• a medida das diagonais é diferente • os ângulos formados pelas diagonais são 2 agudos e 2 obtusos

Figura 7. Listagem das características do paralelogramo

É de salientar que o par teve sempre presente a representação visual das figuras pretendidas e foi com base nela que identificou as propriedades. Focou a atenção no observado no ecrã do computador, nomeadamente, as medidas dos lados, ângulos e diagonais, mas também no que fizeram, por exemplo, quando referiram "os lados opostos são paralelos 2 a 2", condição dada no plano de construção do paralelogramo.

O recurso às características dinâmicas do *software* facilitou a visualização das propriedades da figura que se mantêm e que se alteram. Nota-se que as alunas analisaram as representações dinâmicas fazendo uma comparação rigorosa dos invariantes e das alterações observadas, levando-as a concluir que as figuras partilham muitas características, o que aparenta que compreenderam as regularidades entre as representações (Figura 8).

Movimenta os pontos de modo a obter um:

- retângulo;

O que se manteve?	O que se alterou?
• os lados opostos são paralelos 2 a 2. • a medida dos lados opostos é igual 2 a 2. • os ângulos formados pelas diagonais	• a medida das diagonais são iguais • ângulos → 4 retos •

retângulo:
mantem → são 2 agudos e 2 obtusos.
• a soma da medida dos ângulos internos consecutivos é de 180°.
• a soma da medida dos ângulos internos é de 360°.
• os ângulos opostos são iguais 2 a 2.

O que podes concluir? Concluímos que se mantiveram muitas características.

- losango.

O que se manteve?	O que se alterou?
• todas exceto →	• os ângulos formados pelas diagonais - as diagonais são prependiculares

O que podes concluir? Concluimos que só falta 1 para ter todas as características.

- quadrado;

O que se manteve?	O que se alterou?
• os lados opostos são paralelos 2 a 2. • a medida dos lados opostos é igual 2 a 2. • a soma dos ângulos internos consecutivos é de 180°.	• os ângulos formados pelas diagonais → 4 retos. • os ângulos → 4 retos • a medida das diagonais é igual.

quadrado → manteve: • a soma da medida de todos os ângulos internos é de 360°.
• os ângulos opostos são iguais 2 a 2.

O que podes concluir? Concluimos que tem quase todas as alterações e quase todas as características mantidas

Figura 8. Registo de alterações e invariantes entre o retângulo, o quadrado, o losango e o paralelogramo

O par movimentou os pontos da construção feita (paralelogramo obliquângulo) até obter um losango (Figura 9). Recorreram às ferramentas do *GeoGebra* e exibiram o quadriculado na folha de trabalho para mais facilmente arrastarem o paralelogramo para a forma de retângulo, quadrado ou losango. O recurso ao quadriculado para, através do arrastamento, obterem as representações pretendidas parece indiciar a importância da imagem mental e a sua interação com o conhecimento de conceitos e propriedades.

As alunas arrastaram a construção até obterem a representação mental do retângulo, do quadrado e do losango (Figura 9), embora associada ao conhecimento das respetivas propriedades, pois o movimentar os pontos e transformar a construção em retângulo pressupõe o conhecimento de que este tem os ângulos retos ou, em relação ao quadrado, que este tem os lados congruentes ou, em relação ao losango, que tem os lados congruentes mas não os ângulos retos.

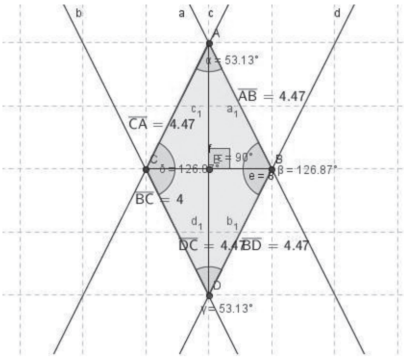


Figura 9. Representação do losango realizada pelas alunas, no GeoGebra, após arrastarem os pontos do paralelogramo obliquângulo

A utilização da geometria dinâmica permitiu a experimentação, exploração e análise dos invariantes, ajudando as alunas a estabelecer conexões entre as propriedades dos paralelogramos. Referiram que o quadrado mantém quase todas as características e quase todas as alterações, como o retângulo.

Como referido acima, Luísa e Maria registaram tudo o que observaram na representação do paralelogramo e foi com base nas propriedades em que se focaram que estabeleceram a comparação entre as suas propriedades e as do losango, daí a conclusão registada pelas alunas "Concluímos que só falta uma para ter todas as características" (Figura 8). Consideraram que o losango tinha todas as características do paralelogramo exceto uma — "as diagonais são perpendiculares". Esta conclusão parece indicar que as alunas compreendem que os atributos essenciais do paralelogramo estão incluídos nos atributos essenciais do losango, aspeto importante na compreensão de uma classificação inclusiva. É de salientar que as alunas listaram todas as propriedades observadas no ecrã do computador e referiram, em todas as representações, o paralelismo dos lados, condição com que construíram o paralelogramo.

Como tem vindo a ser referido, as representações, quer estáticas quer dinâmicas, influenciaram grandemente a identificação de propriedades. Porém, foi na utilização do *GeoGebra* (nomeadamente o recurso à ferramenta "arrastar") que, através da observação do que permanece invariante, as alunas estabeleceram relações entre as figuras e suas propriedades, como se pode constatar na resolução das tarefas realizadas a partir de figuras (quadrado e losango) pré-construídas e gravadas num arquivo do *GeoGebra* e onde tinham de relacionar o quadrado com o losango.

Regista as características do quadrado?

Quadrilátero	Ângulos	Lados	Diagonais
• quadrado	• Tem quatro ângulos retos.	• Tem todos os lados iguais.	• São perpendiculares. • São iguais.

Figura 10. Listagem das características do quadrado

O par analisou o quadrado pré-construído e identificou as suas propriedades. Revelou alguma compreensão dos atributos essenciais pois, apesar de lhes ser pedido que medissem os ângulos internos e as diagonais, a referência a medidas já não prevaleceu, excluindo também as propriedades desnecessárias, nomeadamente, a soma da medida dos ângulos internos.

Luísa: Professora, nós agora só estamos a pôr aquelas que nós achamos necessárias.

Prof.: Só estão a pôr quais, Luísa?

Maria: Diga?

Prof.: Não percebi o que a Luísa disse.

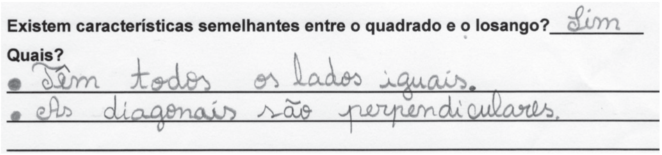
Luísa: Só estamos a pôr as descobertas que nós achamos que são mesmo necessárias, porque aquela dos 360º, 180º, nós ontem, sexta-feira, chegámos a acordo que não era preciso porque têm todos.

Luísa e Maria referiram apenas os atributos essenciais. Para isso, muito contribuiu a discussão na turma.

Tens a certeza que é um quadrado? Sim Porquê? Porque quando movemos tem sempre as mesmas características.

Figura 11. Registo da justificação do que é um quadrado

As alunas rodaram, ampliaram, reduziram e arrastaram a figura, mas parece ter ficado claro que, se as características se mantêm, a figura é a mesma, apesar das diferentes representações que fizeram. Também na comparação do quadrado e losango, as alunas registaram os atributos essenciais.


Existem características semelhantes entre o quadrado e o losango? Sim

Quais?

- Têm todos os lados iguais.
- As diagonais são perpendiculares.

Figura 12. Registo das semelhanças entre o losango e o quadrado

O par identificou corretamente as semelhanças entre o losango e o quadrado e, tal como no quadrado, não referiram semelhanças desnecessárias, ou seja, as comuns a todos os quadriláteros.

Pode-se pensar que os registos revelam que as alunas já não se focam tanto nas medidas registadas no ecrã do computador mas sim nas propriedades conceptuais.

Recorrendo às características dinâmicas do *software*, as alunas estabeleceram relações entre o quadrado e o losango através da visualização do arrastamento dos pontos, como ficou claro durante a discussão da tarefa:

Outro — Maria tu tens um quadrado e esticas os pontos p'ra cima e imagina que formas um losango. Logo, as características que eram do quadrado… e se tu fores lá no *magalhães* ao mover até as diagonais mudam.

Maria: Mais fácil de ver é que ficam 2 agudos e 2 obtusos… e não é igual.

[…]

Prof.: E o quadrado tem todas as características do losango?

Luísa: O quadrado não tem o comprimento das diagonais diferente e o losango não tem 4 ângulos retos.

Maria: O losango não tem as características para ser um quadrado.

Prof.: O losango? E o quadrado tem as do losango?

Luísa: O quadrado não tem algumas do losango.

Prof.: Não. Quais são as que não tem?

Luísa: Porque o quadrado tem todos os ângulos retos e o losango tem 2 agudos e 2 obtusos.

A utilização da geometria dinâmica facilitou a visualização das propriedades que se mantêm invariantes, permitindo estabelecer relações entre o quadrado e losango. O movimento e a modificação das figuras promoveram maior facilidade de visualização das suas propriedades geométricas.

A interação com a representação dinâmica, nomeadamente a observação da sua deformação, fez emergir as propriedades comuns e contribuiu para a construção de uma imagem mais clara das propriedades das figuras, facilitando a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas (Figura 13).

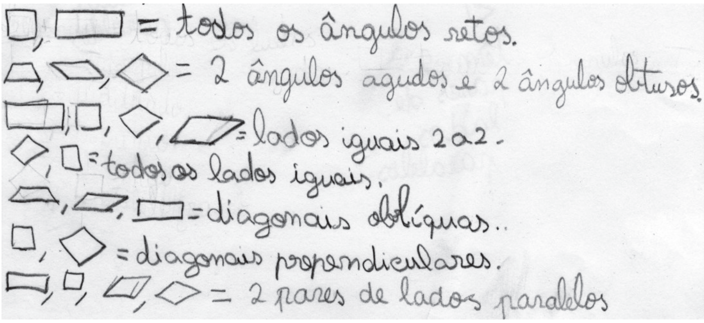


Figura 13. Características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango

O par acabou por fazer uma classificação inclusiva a nível dos paralelogramos. Porém, excluíram estes dos trapézios para o que parece ter contribuído, além do exigido na tarefa (fazer grupos pressupõe, à partida, mais do que um grupo), a representação que fizeram (Figura 14), onde sobressaem as características com que agruparam: "dois pares de lados paralelos" e "apenas um par de lados paralelos".

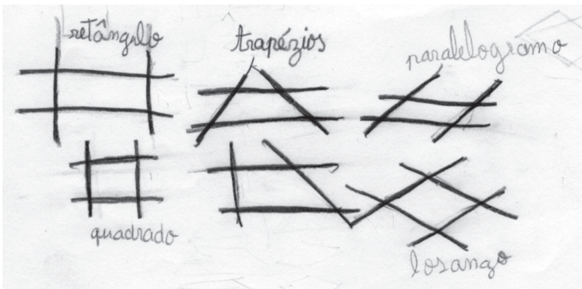


Figura 14. Representação dos quadriláteros para serem classificados

Nesta representação, que se revelou facilitadora da classificação que as alunas fizeram, foi dado a conhecer o conceito que Maria tem de paralelismo, mais associado a retas do que a segmentos de reta. Isto talvez porque a representação do paralelismo está muito relacionada com retas que não se *cruzam* e, como tal, prolongaram os segmentos de reta para justificarem que são paralelos pois, mesmo prolongando-os, não se cruzam (Figura 14). Também se poderá pensar na influência do *GeoGebra* no estudo do paralelismo pois, quando usam a ferramenta *reta paralela*, representam retas e não segmentos de reta. De qualquer modo, parece que as alunas já abstraíram a propriedade de paralelismo comum a estes quadriláteros e usaram as representações para tornar esse conceito mais concreto.

Esta classificação revela, também, mais do que um agrupamento baseado no visual pois, além de agruparem atendendo às propriedades, parece terem compreendido a inclusão de classes, já que fizeram uma classificação inclusiva (Figura 15).

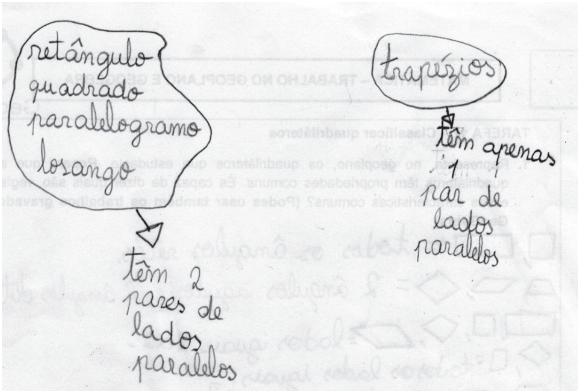


Figura 15. Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado

De igual modo, numa última tarefa, onde foi apresentada uma classificação hierárquica, adaptada de Van de Walle (2004), o par identificou o critério presente em cada um dos grupos, evidenciando compreender uma classificação hierárquica (Figura 16).

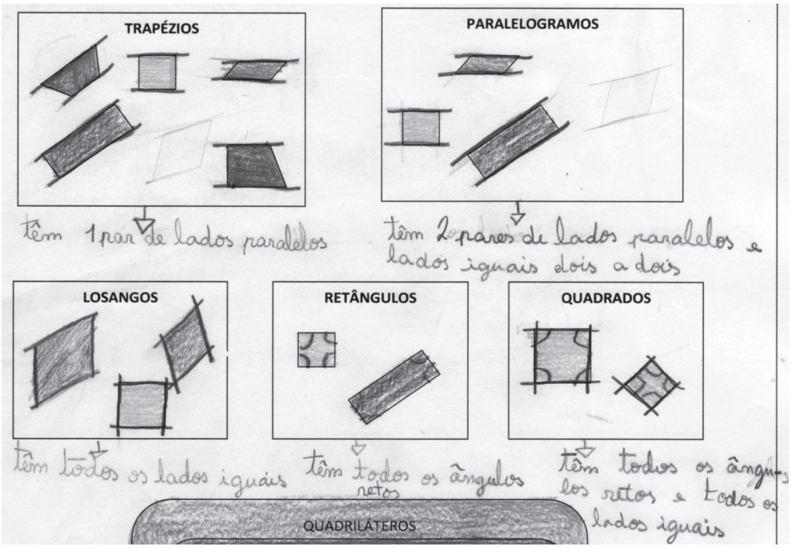


Figura 16. Registo do critério de classificação usado em cada grupo

Maria e Luísa identificaram corretamente as propriedades dos quadriláteros e estabeleceram relações entre as figuras revelando compreensão da inclusão de classes, como evidenciado na justificação da concordância com a classificação apresentada: "Sim, concordamos com esta classificação porque faz sentido pois consegue-se perceber bem os grupos. Ex.: Os quadrados estão nos grupos: retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios e quadriláteros".

À semelhança do evidenciado na tarefa, "Classificar quadriláteros" (Figuras 13, 14 e 15) parece que as alunas tiveram necessidade de prolongar os lados das figuras para identificarem o paralelismo. Ao contrário do que aconteceu na sua classificação, que excluía os paralelogramos dos trapézios, aqui e da forma como redigiram o critério, "têm 1 par de lados paralelos", os paralelogramos estão incluídos nos trapézios.

Em síntese, o recurso às características dinâmicas do *software* intensificou a referência às propriedades, apesar de a imagem mental continuar a ter grande influência nas representações. As alunas analisaram as representações dinâmicas fazendo uma comparação rigorosa dos invariantes que, juntamente com a visualização imediata das alterações produzidas no ecrã do computador, contribuiu para o reconhecimento de relações entre as figuras e suas propriedades. A utilização da geometria dinâmica, estimulando a experimentação, exploração e análise dos invariantes, conduziu a uma correta representação mental dos conceitos geométricos envolvidos e facilitou a compreensão da inclusão de classes.

Contributos do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros

O geoplano foi usado na resolução das primeiras cinco tarefas e ficou ao dispor dos alunos para a resolução da tarefa "Classificar quadriláteros", onde agruparam os quadriláteros de acordo com as propriedades que identificaram. Com o recurso ao geoplano, pretendeu-se que os alunos representassem quadriláteros de acordo com as condições dadas de modo a emergirem as suas propriedades. As alunas representaram diferentes figuras e analisaram as diferenças e semelhanças. Como vantagem deste recurso, sobressai a manipulação mais "palpável" das figuras, permitindo a representação das imagens mentais dessas figuras. O geoplano revelou-se especialmente útil nas tarefas iniciais, uma vez que a referência a propriedades era muito reduzida, estimulando a comparação de figuras através da aparência global, evidente nas referências da Luísa "A mim parece-me um paralelogramo" ou "É o papagaio só que é mais gordo". Puderam comparar visualmente as figuras e recorrer à sobreposição para confirmar a igualdade ou não entre figuras, servindo de suporte visual e experimental, à semelhança do verificado em outras pesquisas (Clements & McMillen, 1996; Ponte & Serrazina, 2000).

O geoplano permitiu ainda trabalhar os atributos irrelevantes das figuras como tamanho, orientação e invariância da forma com base nestes atributos. Contribuiu assim para: a representação mental das figuras, o desenvolvimento do vocabulário geométrico e a identificação de propriedades comuns aos quadriláteros, evidente nas observações das alunas "tem 2 ângulos obtusos e 2 agudos", quando se referiam ao paralelogramo propriamente dito ou quando constatavam que duas figuras não tinham a mesma forma porque não tinha a propriedade do "…ângulo reto", como referiu a Maria quando comparava quadriláteros com lados iguais dois a dois.

Embora os resultados tenham evidenciado a grande influência do aspeto visual do desenho na comparação das figuras e na identificação de propriedades, o geoplano possibilitou discussões ricas ao nível das características dos quadriláteros, tendo contribuído para a emergência das suas propriedades (Pereira, 2012).

Contributos do *GeoGebra* na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros

O AGD, *GeoGebra*, foi usado na resolução de 12 das 18 tarefas que constituíram a experiência de ensino. Como referido, para além do desenho e da construção, foram ainda analisadas figuras previamente construídas com o objetivo de, através da experimentação, estabelecer relações entre os quadriláteros investigando as relações ou medidas que se mantêm invariantes.

Este recurso permitiu às alunas a construção fácil de figuras, a determinação rápida de medidas e a exploração de características dinâmicas deste *software*. As alunas movimentaram os desenhos totalmente ou em partes, contribuindo para a descoberta das propriedades que se mantêm e/ou se alteram, aspeto que sem o recurso ao *software* não poderia ser trabalhado em sala de aula. Gravaram e reproduziram sequências de ações, que as ajudou a formar imagens dinâmicas.

Deste modo, a utilização do *software* permitiu a experimentação, exploração e análise dos invariantes, ajudando as alunas a reconhecer propriedades e a estabelecer conexões entre as propriedades dos paralelogramos. Isto mesmo é defendido por Laborde (1993) quando refere que o movimento e a modificação dos desenhos possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas.

Dessa utilização ressalta ainda a vantagem da representação precisa e variada das figuras geométricas que, associada às características dinâmicas deste *software*, fornecendo diferentes representações através do rodar, reduzir, ampliar e arrastar os elementos das figuras, facilitou a identificação de propriedades dos quadriláteros. Possibilitou, também, estabelecer relações entre eles e contribuiu para a correta representação mental dos conceitos (Abrantes *et al.*, 1999, Ponte & Serrazina 2000) ou correção/clarificação de conceitos já construídos (Wong, 2011). Para Laborde (2008), um AGD, por exemplo, o *GeoGebra*, incorpora conhecimento matemático que influencia o modo como os alunos constroem os conceitos. Foi o caso do conceito de paralelismo, associado a retas e não a segmentos de reta, evidenciado pelo par em análise neste artigo.

O facto de os alunos poderem manipular dinamicamente as figuras e as suas relações permanecerem invariantes ao arrastamento, juntamente com a visualização imediata das alterações produzidas no écran do computador, facilitou a descoberta das propriedades dos paralelogramos e das relações entre eles.

Considerações finais

Nas tarefas realizadas com o geoplano, as alunas desenvolveram o vocabulário geométrico, analisaram e compararam os quadriláteros, trabalharam os atributos irrelevantes das figuras e identificaram algumas propriedades, embora predominassem as representações conforme as imagens mentais que possuíam (protótipos). Nas tarefas realizadas no *GeoGebra*, esse facto foi menos evidente, embora também tenha ocorrido, pois arrastaram o vértice do paralelogramo de modo a representarem o paralelogramo obliquângulo, indo ao encontro do verificado por Jones (1998 citado em Candeias, 2005), que realizou um estudo onde concluiu que "os alunos tendem a modificar a figura até ficar com a forma pretendida, em vez de fazerem a respetiva construção" (p. 22) ou Vinner (1991) que constatou que a imagem do paralelogramo, no conceito dos alunos, é uma figura em que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais. Parece poder concluir-se que a utilização de materiais diversificados, associada a tarefas adequadas, contribui para o aprofundamento na construção dos conceitos.

A utilização de representações visuais evidenciou a conceção que os alunos têm dos conceitos e facilitou a sua compreensão, tornando-os concretos e mais claros. Também foi notória a influência das representações na identificação das propriedades dos quadriláteros, pois o par começou por listar todas as características observadas no ecrã do computador, com especial incidência nas medidas dos lados, ângulos e diagonais, facto também verificado por Jones (1998 citado em Candeias, 2005) no seu trabalho de investigação.

Esta listagem indicia a dificuldade inicial das alunas em considerar uma figura como representante de uma classe e em distinguir entre atributos essenciais e não essenciais de uma figura. No entanto, à medida que se avançou na experiência de ensino, o par focou-se nos atributos essenciais da figura, verificando se as propriedades de uma representação particular se confirmavam para outras representações do mesmo conceito, estabelecendo a generalização e avançando, assim, no entendimento da figura como representativa da classe.

O recurso ao arrastamento dos elementos da figura e o movimento possibilitaram a constatação das suas propriedades através da observação dos invariantes geométricos, permitindo estabelecer relações entre os diferentes quadriláteros. Ao mesmo tempo, levou a uma correta representação mental dos conceitos geométricos envolvidos, facilitando a compreensão da inclusão de classes. Pode dizer-se que as alunas desenvolveram e aperfeiçoaram conceitos geométricos e progrediram no seu raciocínio relativamente às figuras geométricas e respetivas propriedades. O par começou por fazer uma classificação inclusiva, mas não hierárquica. Porém, revelou compreendê-la, o que confirma os resultados de outros estudos (Clements & Battista, 1992) que referem que, embora as crianças mais novas sejam capazes de compreender inclusões de classes, têm dificuldade na sua aceitação. Esta compreensão está de acordo com resultados obtidos em outros estudos (Leung 2008; Jones, 2000) que afirmam que o uso de *softwares* interativos de geometria pode facilitar a compreensão de uma classificação hierárquica dos quadriláteros, mesmo nos níveis inferiores de van Hiele.

Do referido, ressalta também que tanto o geoplano como o *GeoGebra* foram uma mais-valia na concretização das tarefas sobre classificação e na evolução do raciocínio das alunas podendo dizer-se que, com o auxílio das tarefas de construção física no geoplano, com o recurso ao *GeoGebra*, nomeadamente a possibilidade de visualizar uma mesma construção de diversas formas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo turma, as alunas avançaram no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual. Deste modo, desenvolveram uma compreensão mais avançada de quadriláteros, pois identificaram os seus atributos, reconheceram relações entre eles, construindo e aperfeiçoando conceitos geométricos.

Nota

1 Uma primeira versão deste artigo foi apresentada no EIEM2013.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Editora.

Casa, T. M. & Gavin, M. K. (2009). Advancing student understanding of quadrilaters through the use of mathematical vocabular. In T. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 205–219). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Candeias, N. J. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica*. Tese de mestrado. Colecção Teses. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Clements, D. H. & McMillen, S. (1996). Rethinking "Concrete" Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*. *2*(5), 270–279.

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 192–212.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, *6*(8), 482–487.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York, NY: MacMillan.

Dreyfus, T. (1991). On status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In *Proceedings of 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 33–48. Genova: University de Genova.

Duval, R. (1998), Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 6*, 139–163.

Edwards, M., & Harper, S. (2010). Paint bucket polygons. *Teaching Children Mathematics*, *16*(7), 420–428.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, *9*(1–2), 3–20.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representations in mathematical learning and problem solving. In L. D. English et al (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-199). NY: Routledge.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Cuoco (Eds.), *Roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Hannibal, M. (1999). Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes. *Teaching Children mathematics*, *5*(6), 353–357.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161–204). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 55–85.

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3–15). London: Open University Press.

Laborde, C., & Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177–192). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1993). The Computer as part of the Learning Environment; the case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 48–67). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (2008). *Technology as an instrument for teachers*, New Technologies for teaching and learning mathematics, ICME11. Monterrey, Mexico. Consultado em 14/07/2011 de http://tsg.icme11.org/tsg/show/23#inner-documents

Leung, I. (2008). Psychological aspects of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning in the aid of SmartBoard. *ZDM*, *40*, 1007–1021.

Loureiro, C. (2008). *Classificação matemática — três níveis de desenvolvimento*. Estudo não publicado, Escola Superior de Educação, Lisboa, Portugal.

Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante*, *1*, 93–112.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Educação.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pereira (2012). *Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros*. Dissertação de mestrado. Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. New York: Norton.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Smith, E. E. (1995). Concepts and categorization. In D. N. Osherson, & L. R. Gleitman (Eds.), *Thinking: An invitation to cognitive science*, (pp. 3–33), Vol.3, Cambridge, MA: MIT Press.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representations in context of middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(4), 325–343.

Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Em D. Fuys, D. Geddes e R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp.1–214). Brooklyn, New York: Brooklyn College, School of Education.

Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software, *From Teaching & Learning Mathematics*, 4, Feb. 2007, 46–52.

Villiers, M., & Njisane, R. M. (1987). The development of geometric thinking among black high school pupils in Kwazulu (Republic of South Africa). In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education* PME-XI (Vol. 3, pp. 117–123). Montréal: Université de Montréal.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, (Ed). Advanced mathematical thinking (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang, H.-H., & Cheng, Y.-H. (2011). Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, *14*(3), 43–54.

Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra. Um estudo no 4.º ano de escolaridade

Resumo. Este artigo é parte de um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade, que procurou compreender quais os contributos do Ambiente de Geometria Dinâmica (GeoGebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros. Para isso produziu-se, implementou-se e analisou-se um conjunto de tarefas desenvolvidas no *GeoGebra* e com o geoplano, salientando o papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango. Atendendo ao problema em estudo, optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa baseada em três estudos de caso. Este artigo centra-se num dos casos e no raciocínio que os alunos desenvolveram à volta da identificação das propriedades de quadriláteros quer com o geoplano quer com o *GeoGebra*. Como resultados, salienta-se que os alunos identificaram as propriedades com base nas representações, mas focaram-se em casos particulares, de acordo com a imagem mental que tinham da figura, especificamente o protótipo, indiciando a influência da visualização. Sobressai também a dificuldade que os alunos sentiram em considerar uma figura como representante de uma classe e em distinguir atributos essenciais e não essenciais. Tanto o geoplano como o *GeoGebra* foram uma mais-valia na concretização da experiência de ensino deste estudo.

Palavras chave: quadriláteros, propriedades, classificação, geometria dinâmica, geoplano.

Properties and relations between quadrilaterals: contributions from geoboard and geoGebra. A study in the 4th grade

Abstract. This article is part of a study with 4th grade pupils whose main goal was to understand which contributions from Dynamic Geometry Environments (Geogebra) and from geoboard to the understanding of properties and relations among quadrilaterals. For that was produced, implemented and analyzed a set of tasks developed in Geogebra and with geoboard, stressing the role of representations and visualization in identifying the properties of quadrilaterals: trapezius, parallelogram, rectangle, square and rhombus. Given the problem under study, we chose a qualitative methodology based on three case studies. This article focuses on one of the cases and reasoning that students have developed around the identification of the properties of quadrilaterals with either geoboard or with Geogebra. As a result it is stressed that pupils identified the properties based on representations, but have focused on particular cases, according to his/her mental image of the figure, specifically the prototype, indicating the influence of visualization. It is also evident the difficulty that students felt to consider a figure as representative of a class and distinguish essential and non-essential attributes. Both the geoboard and GeoGebra were an added value in achieving the teaching experience of this study.

Key words: quadrilaterals, properties, classification, dynamic geometry, geoboard.

■■■

MARIA DA GRAÇA BRUNO PEREIRA
Agrupamento de Escolas de Alapraia, Portugal
gracabruno@sapo.pt

MARIA DE LURDES SERRAZINA
Escola Superior de Educação de Lisboa
Unidade de Investigação em Desenvolvimento e Formação, Universidade de Lisboa, Portugal

(Recebido em abril de 2014, aceite para publicação em março de 2015)