Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula

João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Joana Mata-Pereira, Mónica Baptista
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Introdução

Num ensino da Matemática que se baseia principalmente na transmissão de conhecimentos pelo professor, o conceito de tarefa é de pouca utilidade. Pelo contrário, num ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos.

As tarefas podem ter natureza muito diversa. Pólya (1945) distingue entre exercício e problema, conforme a pessoa que a vai realizar disponha ou não de um método de resolução imediato, em função do seu conhecimento prévio. A noção de problema inspirou numerosos documentos curriculares internacionais e nacionais, desde os anos de 1980. Na literatura de educação matemática foram muito discutidas questões como saber como integrar os problemas no ensino dos mais diversos tópicos, como os usar como ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos, representações e procedimentos matemáticos, e que problemas selecionar de modo a proporcionar as experiências de aprendizagem recomendadas (Schoenfeld, 1991; Stanic & Kilpatrick, 1989). Para os professores na sala de aula, estas discussões parecem não se ter mostrado úteis, dando origem a uma certa indefinição da noção de problema e do papel da resolução de problemas no ensino da Matemática, já notada no documento *Matemática 2001* (APM, 1998), e que se arrasta até hoje.

Procurando ir além da dicotomia problema/exercício, diversos autores têm procurado caraterizar outras categorias de tarefas matemáticas. Assim, Stein e Smith (1998) contrastam as tarefas de nível cognitivo reduzido e elevado, considerando nas tarefas de nível cognitivo reduzido as que envolvem "memorização" e "procedimentos sem conexões" e nas de nível cognitivo elevado as que envolvem "procedimentos com conexões" e "fazer Matemática". Pelo seu lado, Skovsmose (2001) distingue entre "exercícios" e "cenários para investigação", correspondendo estes últimos a situações que favorecem uma atividade de criação matemática por parte dos alunos (com contexto real, semirreal ou matemático). Finalmente, Ponte (2005) sugere que, a par dos exercícios e problemas com enunciados precisos e estruturados, se considerem também as explorações e investigações, tarefas de natureza mais aberta, nas quais o aluno é chamado a um trabalho significativo de interpretação e de formulação das questões a resolver.

A maior parte da investigação realizada em Portugal sobre o modo como os professores encaram a resolução de problemas tem como ponto de partida a distinção entre problema e exercício e foi feita numa lógica de distanciamento entre os investigadores e os professores estudados (ver, por exemplo, Boavida, 1993; Borralho, 1997; Fernandes & Vale, 1993; Ponte & Canavarro 1994). Neste artigo procuramos alargar o quadro das tarefas a considerar, incluindo não só exercícios e problemas mas também as explorações. Além disso, procuramos estudar as perspetivas dos professores numa lógica de proximidade, a partir da realização de um trabalho de natureza colaborativa, neste caso um estudo de aula, um processo formativo fortemente ligado à prática, que possibilita aprofundamentos teóricos em múltiplos domínios — matemático, didático, curricular, educacional e organizacional (Ponte, Baptista, Velez, & Costa, 2012). Neste trabalho analisamos as perspetivas sobre as tarefas a propor aos alunos de um grupo de professoras do 2.º ciclo que participam num estudo de aula, dando especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Tarefas, representações, raciocínio numa abordagem exploratória

Ao planear as suas aulas os professores podem considerar vários tipos de tarefa. Ponte (2005) sugere que é necessária a diversificação porque cada tipo de tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem. As tarefas fechadas (como exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada, ao passo que as tarefas abertas (explorações e investigações) ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando-as matematicamente. Por outro lado, as tarefas com um grau de desafio mais reduzido (exercícios e explorações) favorecem o sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança enquanto as tarefas mais desafiantes (problemas e investigações) proporcionam experiências matemáticas mais profundas. Este autor indica também que, no seu trabalho em Matemática, os alunos mostram-se capazes de mobilizar conhecimentos construídos fora do contexto escolar. Além disso, valoriza a (re)descoberta de um método de resolução, salientando que esta é, muitas vezes, a melhor maneira de aprender. Finalmente, considera que as tarefas a propor aos alunos devem fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que alargue o conhecimento de representações relevantes e de conexões entre a Matemática e outras áreas.

No enunciado de uma tarefa, os objetos matemáticos invocados são apresentados através de uma ou mais representações. Segundo Goldin (2008) uma representação é uma configuração que poderá, de alguma forma, "atuar no lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, mediar, produzir, referir a, assemelhar, servir como metáfora para, significar, substituir por, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado" (p. 181). Pelo seu lado, Duval (2006) salienta que os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação e refere que este é um dos problemas cruciais da compreensão em Matemática, na medida em que não é possível aceder a um objeto matemático a não ser através de uma das suas representações. Duval (2004) carateriza registos de representação como constituindo "a margem de liberdade de um sujeito para objetivar ele mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar as informações ou, simplesmente, para as comunicar a um interlocutor" (p. 30). A passagem de um registo de representação para outro é muitas vezes necessária para uma melhor compreensão do objeto em questão. O NCTM (2007) refere esta ideia ao indicar que "representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações e conceitos complexos" (p. 77) pelo que, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (p. 77).

Como indicam Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), raciocinar consiste em realizar inferências, de forma fundamentada. Raciocinar não é dizer ideias ao acaso, mas sim usar informação dada para obter nova informação válida no respetivo domínio de conhecimento. De acordo com o NCTM (2007), a aprendizagem da Matemática por parte dos alunos deve ir além da mera memorização de factos, regras e procedimentos e para isso é necessário valorizar o raciocínio matemático na sala de aula. O foco no raciocínio pode ajudá-los a ver que a Matemática é uma ciência lógica e que pode ser compreendida. Lannin, Ellis e Elliott (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve essencialmente fazer generalizações e justificações matemáticas. Para os autores, a "grande ideia" sobre o raciocínio matemático é que este é um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos. Deste modo, o raciocínio matemático envolve processos dedutivos (justificações), indutivos e abdutivos (generalizações e outras conjeturas). Outro aspeto importante do raciocínio é a "competência estratégica", que Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) caraterizam como a capacidade para formular, representar, e resolver problemas matemáticos. Podemos considerar o processo de formulação de uma estratégia para a resolução de um problema ou exploração como um processo semelhante à elaboração de uma conjetura. A concretização na prática dessa estratégia corresponde ao teste da conjetura. Para promoverem o desenvolvimento do raciocínio os professores têm de tomar decisões, definir percursos educativos e selecionar tarefas de forma cuidadosa, considerando os aspetos do raciocínio a dar atenção.

Aceder diretamente ao raciocínio matemático dos alunos é, naturalmente, impossível. Para conhecer este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem, oralmente, por gestos ou por escrito, e isso só é possível através de representações. Deste modo, como refere o NCTM (2007), somente "ao observar as suas representações (dos alunos), os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (p. 76). Contudo, para além do papel que assumem na comunicação de raciocínios, as representações assumem também um papel decisivo na aprendizagem. Como salienta o NCTM (2007), "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). Deste modo, as representações constituem um elemento central no ensino aprendizagem da

Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos.

A abordagem exploratória valoriza o desenvolvimento do raciocínio através de tarefas com um caráter de algum modo aberto ou desafiante. Esta abordagem representa uma mudança significativa em relação ao ensino em que o professor começa por demonstrar previamente o método de resolução e depois apresenta exercícios para o aluno resolver. Tal como nos problemas, na abordagem exploratória os alunos são chamados a lidar com tarefas para as quais não têm um método de resolução imediato e têm de construir os seus próprios métodos, usando os conhecimentos prévios (Ponte, 2005). A principal diferença em relação à noção de "problema" dominante até então é que se começou a falar cada vez mais em "tarefa", podendo esta ser de natureza mais ou menos aberta e envolver maior ou menor grau de desafio matemático.

O trabalho exploratório na aula de Matemática cria oportunidades para que os alunos construam ou aprofundem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são, portanto, chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos seus colegas e ao professor. Este, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para os praticar, propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Procura, deste modo, levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, mas também a compreensão da Matemática bem como a capacidade de a usar nas mais diversas situações. Nesta abordagem, há lugar para uma grande variedade de tarefas, desde os problemas com um enunciado preciso às investigações e explorações de natureza mais aberta em que os alunos têm de participar na própria formulação da questão a resolver e requerem, muitas vezes, não só a mobilização de conhecimentos matemáticos anteriores, mas também de conhecimento relativo aos contextos apresentados. A realização deste tipo de ensino constitui um desafio para os professores, na seleção de tarefas, na antecipação das possíveis estratégias e dificuldades dos alunos, na organização do trabalho da aula, e na condução da respetiva realização, exigindo conhecimentos específicos, competência e investimento pessoal.

Investigação sobre os professores e a resolução de problemas, explorações e investigações

O tema da resolução de problemas constitui uma ideia forte da educação Matemática em Portugal desde os anos 80 do século passado. Trata-se, nomeadamente de um dos conceitos centrais do documento de Milfontes (APM, 1988), é reafirmada no documento *Matemática 2001* (APM, 1998) e surge como uma das três grandes capacidades transversais referidas no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Durante os anos 90 registou-se no nosso país uma atividade intensa de investigação sobre o modo como os professores encaravam a resolução de problemas, a introduziam ou não na sua prática, e também como se poderia promover na preparação dos futuros professores, nomeadamente durante a sua formação inicial. Vejamos alguns exemplos desses estudos.

Um trabalho realizado por Boavida (1993) investiga as representações pessoais dos professores acerca de problema e de resolução de problemas, bem como as possíveis relações entre estas representações e as suas filosofias pessoais sobre a Matemática. Tendo por base dados recolhidos de entrevistas, a autora indica que os sentidos atribuídos pelos professores a problema são diversos e influenciam o papel e lugar que cada um atribui à resolução de problemas. De um modo geral, os professores sustentam filosofias pessoais sobre a Matemática tendencialmente absolutistas. Um deles mostra tendência para reduzir a discussão da Matemática ao plano escolar, vendo esta como uma ciência fria, sem beleza, abstrata, e encarando a resolução de problemas como simples aplicação de conceitos. Outra professora considera importante a passagem à prática, propondo problemas aos alunos, mas indica que a sua realização envolve um certo esforço e provoca bastante cansaço. A autora conclui que é preciso equacionar melhor a relação entre as filosofias da Matemática e a visão da resolução de problemas e aponta a necessidade de teorias mais gerais que discutam a influência de vários fatores no modo com os professores encaram esta atividade.

Num outro trabalho, Ponte e Canavarro (1994) analisam as perspetivas de quatro professoras do 3.º ciclo e do ensino secundário sobre a resolução de problemas. Uma delas vê a resolução de problemas como uma "brincadeira", preocupando-se fundamentalmente com o cumprimento integral do programa. Uma segunda professora vê a resolução de problemas como uma ideia interessante, mas difícil de concretizar na sala de aula. Uma terceira professora vê a resolução de problemas como uma atividade importante, mas cuja articulação com as aulas e os programas é problemática. Finalmente, uma quarta professora valoriza os problemas com enunciado preciso, que permitem relacionar diversos conceitos e conduzem à construção de novo conhecimento matemático e propõe esses problemas nas suas aulas. Refere também as situações problemáticas, de natureza mais aberta, mas estas não surgem com frequência nas suas aulas. Os autores concluem que, de um modo geral, os professores sentem uma série de dificuldades quando procuram pôr em prática a resolução de problemas nas suas aulas: (i) alguns deles não têm muita inclinação para a resolução de problemas; (ii) existe muita variação na terminologia e nas ideias associadas à resolução de problemas (em especial, sobre o que é um problema e quais são os problemas mais apropriados para propor na sala de aula); (iii) sente-se uma grande pressão para o cumprimento dos programas; (iv) faltam materiais adequados para organizar um ensino com base na resolução de problemas; e (v) o modo de gerir as situações de resolução de problemas, nomeadamente na fase de discussão coletiva afigura-se problemático.

Outros estudos tiveram por foco a formação inicial de professores. Assim, Fernandes e Vale (1993) procuraram conhecer as conceções e práticas de dois futuros professores do 2.º ciclo, que entretanto terminaram o curso e começaram a lecionar, sobre a resolução de problemas e o seu ensino. Enquanto alunos de uma escola superior de educação, os participantes frequentaram um módulo sobre resolução de problemas e evidenciaram reconhecer a sua importância no processo de ensino-aprendizagem. Nesta formação, tiveram oportunidade de conhecer diferentes tipos de problemas e estratégias de resolução. Já como professores, os dois participantes revelaram práticas muito distintas — enquanto um deles evidenciou uma prática orientada para o ensino de procedimentos, em que a proposta de problemas e a sua resolução estavam completamente ausentes, a outra evidenciou uma prática fortemente consistente com as suas ideias e intenções expressas no ano anterior.

Pelo seu lado, Borralho (1997) procurou analisar a relação entre a prática de ensino de futuros professores de Matemática do ensino secundário e as suas experiências em disciplinas de Didática da Matemática na formação inicial. Nestas disciplinas deu-se uma forte atenção à reflexão sobre a atividade do professor na resolução de problemas e no ensino da resolução de problemas. Foram estudados três futuros professores, que foram acompanhados durante um ano letivo, assumindo a responsabilidade por uma aula numa turma do 3.º ciclo. O trabalho realizado ao nível da resolução de problemas foi perspetivado valorizando domínios de conhecimento base para a resolução de problemas, estratégias heurísticas e estratégias de controlo por parte dos futuros professores. Os resultados do estudo mostram que, na sua prática de ensino, dois dos futuros professores realizaram aulas com resolução de problemas, mas sem concretizar o modelo de resolução de problemas que lhes foi ensinado em Didática. A terceira futura professora realizou uma aula expositiva de tipo tradicional. O autor conclui que, nas conceções dos três futuros professores, prevalece o modelo de ensino que experimentaram enquanto alunos do ensino secundário.

No conjunto dos estudos, os casos problemáticos na concretização da resolução de problemas na sala de aula são a maioria e os casos de sucesso são a exceção. Os professores tendem a ter dificuldade em encontrar formas naturais e produtivas de introduzir esta atividade na sua sala de aula, nos termos em que esta lhes era proposta pelas orientações curriculares e processos de formação. Estes estudos têm subjacente uma perspetiva de "problema" como tarefa com um enunciado bem preciso, cuja resolução depende sobretudo de se encontrar uma estratégia apropriada. A partir de certa altura, o termo "situação problemática" (Abrantes, 1989), inspirado na designação francesa de "situation-problème", começou a surgir como designando um outro tipo de tarefa, de natureza mais aberta e na maior parte dos casos ligada a situações contextualizadas, e começou-se também a falar cada vez mais em investigações (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003) e explorações (Ponte, 2005).

As explorações e investigações têm em comum com os problemas o facto de o aluno não dispor à partida de um método de resolução, necessitando de formular uma estratégia que lhe permita chegar ao resultado. Numa revisão de trabalhos realizados em Portugal relativos a estas tarefas, Ponte (2007) indica que esta perspetiva parece ser bastante estranha para um largo setor de professores, muito centrados no cumprimento do programa e na realização de exercícios. Nota também que, apesar disso, tem um potencial considerável para interessar muitos professores, que se mostraram capazes de usar regularmente esta perspetiva nas suas aulas. E, poucos anos mais tarde, o valor das explorações e investigações como tarefas que podem servir de base a uma significativa renovação curricular é reconhecido num trabalho de avaliação sobre a aplicação do novo programa de Matemática (Borralho, Fernandes, Vale, Gaspar & Dias, 2011).

Metodologia de investigação

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), tem por base a realização de um estudo de aula no ano letivo de 2013/2014 num agrupamento de escolas de Lisboa. O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional dos professores que tem vindo a ser cada vez mais utilizado em diferentes níveis de ensino. Uma característica muito importante dos estudos de aula é que decorrem dentro do ambiente escolar, com os professores a assumir um papel central. Um estudo de aula começa com a identificação de um problema relevante relacionado com a aprendizagem dos alunos. Depois, os participantes planeiam uma aula (denominada aula de investigação), prevendo as dificuldades dos alunos, antecipando possíveis questões que podem surgir na aula, definindo estratégias de ensino e preparando instrumentos para a observação. A aula é lecionada por um dos professores enquanto os restantes observam e tiram notas com especial atenção à aprendizagem dos alunos. Em seguida, os professores reúnem-se para analisar e refletir sobre o que observaram o que pode levar à reformulação do plano de aula, com alterações nas estratégias e materiais utilizados, nas tarefas propostas, nas perguntas feitas aos alunos, etc. (Lewis, Perry, & Hurd, 2009; Murata, 2011). Um aspeto central dos estudos de aula é que se centram nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores. Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula.

O agrupamento em questão tinha solicitado a colaboração do Instituto de Educação (IE) da Universidade de Lisboa para a formação dos professores envolvidos num projeto para a melhoria do ensino da Matemática. Propusemos então a realização de diversos estudos de aula, tendo sido um deles realizado com cinco professoras do 2.º ciclo em atividade (só não participou uma professora que estava com problemas de saúde). Das cinco professoras, Francisca, Maria e Luísa lecionam turmas de Matemática do 5.º ano e Inês e Tânia lecionam turmas do 6.º ano (todos os nomes das professoras são fictícios). A direção do agrupamento designou Maria como coordenadora do grupo. Numa reunião prévia onde esta professora participou, em conjunto com elementos da direção e com professores de outros anos de escolaridade, decidiu-se que o estudo de aula incidiria sobre um tópico do 5.º ano, em que estava a ser introduzido um novo programa. A equipa que conduziu este trabalho é formada por quatro membros, com Marisa e Joana a dinamizar as sessões de trabalho, Mónica a assumir o papel de observadora, coadjuvada por uma bolseira, e João Pedro a coordenar a formação e a participar na dinamização de algumas sessões.

As sessões decorreram com periodicidade aproximadamente quinzenal. Para este artigo, analisamos episódios das doze sessões que constituíram o estudo de aula, tendo em vista ilustrar as perspetivas das professoras sobre tarefas, com especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático. A sessão 1 serviu para apresentar o estudo de aula a todas as professoras participantes, as sessões 2 a 6 pretenderam aprofundar o conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da comparação e ordenação de números racionais, incluindo a realização de um diagnóstico e a preparação de uma aula sobre esse tópico. A sessão 7 consistiu na observação de uma aula (lecionada por Luísa), a sessão 8 foi dedicada a refletir sobre a aula de investigação, as sessões 9 a 12 serviram para preparar novas aulas e refletir sobre a sua realização, sendo que na segunda parte da sessão 12 se fez ainda um balanço global de todo o estudo de aula.

Os dados aqui analisados foram recolhidos por observação participante e recolha documental através da elaboração de um diário de bordo (realizado por um membro da equipa), recolha de produções das professoras, gravação áudio das sessões e gravação vídeo da aula de investigação. As tarefas analisadas nas sessões do estudo de aula foram nuns casos propostas pela equipa de formadores e noutros casos trazidas pelas professoras e a tarefa proposta na aula de investigação foi selecionada e adaptada pelas professoras participantes.

A análise dos dados começou por identificar momentos significativos nas diversas sessões respeitantes às perspetivas das professoras sobre as tarefas a propor aos alunos. Em seguida, nesses momentos, delimitámos episódios respeitantes (i) à natureza das tarefas e (ii) à relação entre tarefas e raciocínio e classificámos estes episódios segundo diversas características das perceções das professoras que considerámos de interesse. Nesse conjunto de episódios apresentamos a análise daqueles que nos pareceram mais reveladores das perspetivas e das aprendizagens das professoras relacionadas com tarefas.

Natureza das tarefas

Em diversos momentos do estudo de aula prestou-se atenção à natureza das tarefas que os professores podem propor aos alunos na sala de aula, estabelecendo uma distinção entre três tipos de tarefa: exercício, problema e exploração. Além disso, por diversas vezes foram também analisadas as representações que surgem numa tarefa, bem como o seu nível de desafio. Nesta secção damos conta das perspetivas das professoras participantes em relação a estas questões.

Diferentes tipos de tarefa. A resolução de tarefas e a discussão das possíveis dificuldades que os alunos podem ter na sua realização constituiu um importante momento de trabalho da sessão 2. Assim, propusemos às professoras a análise das tarefas representadas na Figura 1.

Maria sentiu que estas tarefas eram demasiado difíceis para os seus alunos:

Maria: Isto é suposto… Se eu apresentar isto aos meus alunos, eles saberem fazer? Não percebi? Isto é suposto eles saberem fazer ou…

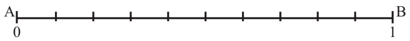
Luísa: Não, eu acho que a ideia não é essa…

Maria: Eles [ainda] não sabem nada acerca da reta numérica.

Uma tarefa é mais ou menos acessível aos alunos conforme os seus conhecimentos prévios. Neste caso, Maria entendeu que os seus alunos não seriam capazes de resolver estas tarefas, uma vez que ainda não tinham aprendido a representar números racionais na reta numérica.

1. A turma do João organizou um percurso pedestre do Paque Natural da Serra D' Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB].

1.1. A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.
Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



1.2. Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

1.3. O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido $\frac{5}{6}$ do percurso feito pelo Francisco quando parou. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João?

2. Podemos representar os números decimais numa linha numérica, assim como fazemos com os números inteiros.

Na linha seguinte estão representados alguns números.

Representa tu agora nessa mesma linha os seguintes números:

0,25 $\quad \frac{3}{4} \quad$ 0,6 $\quad \frac{4}{10}$

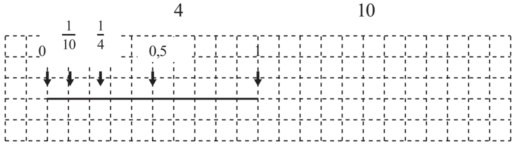


Figura 1. Exemplos de tarefas analisadas pelas professoras na sessão 2 (Monteiro & Pinto, 2007).

Esta discussão levou-nos a sugerir que as tarefas podem ser apresentadas com diferentes propósitos, por exemplo, para promover a aprendizagem dos alunos, para os levar a aplicar conhecimentos que eles já adquiriram, ou para avaliar se eles dominam ou não certos conhecimentos. Pareceu-nos, também, que era uma boa altura para referir a classificação de tarefas como exercícios ou problemas. Assim, salientámos que, para um aluno, uma tarefa pode ser um problema ou um exercício conforme aquilo que ele já sabe. Deste modo, tanto um problema como um exercício podem remeter para um contexto ou uma "história" supostamente da realidade (como acontece com a tarefa 1) ou remeter para um contexto puramente matemático (como na tarefa 2). O que distingue exercício de problema é essencialmente o facto de o aluno dispor ou não de um método de resolução imediato.

Maria aceitou de bom grado esta distinção:

Maria: Quando eles têm os dados todos significa que é um exercício…

Marisa: Quando eles já adquiriram as ferramentas para resolver…

Maria: Sim, sim…

Marisa: Exatamente.

Maria: É uma aplicação, é uma aplicação do conhecimento em vez de…

Marisa: Por exemplo…

Maria: Enquanto problemas é um bocadinho mais do que isso, eles têm de descobrir qualquer coisa… Não têm de aplicar só o que já sabem.

Deste modo, nesta sessão começou-se a distinguir diversos tipos de tarefa. Na sessão 4, a caraterização de diferentes tipos de tarefa foi de novo retomada a partir de exemplos, tendo-se introduzido uma nova noção, a de exploração, como tarefa de natureza mais problemática que um exercício, onde os alunos podem fazer as suas próprias descobertas. Francisca e Luísa mostraram compreender a ideia de exploração, recordando o modo como no passado tinham trabalhado a relação entre as amplitudes dos ângulos de um triângulo:

Francisca: Eles agora com o triângulo, não é? Com a soma [da amplitude] dos ângulos internos.

Marisa: Pois, dobram as pontinhas [vértices].

Luísa: … Cortaram e colaram no caderno e depois começaram a dizer: Ah! Professora, isto dá um ângulo raso.

. . .

Francisca: E não se esquecem! Isso é muito engraçado, fica lá.

Luísa: Pois foi, pois foi.

A reflexão de Francisca e Luísa sugere que apenas propunham de vez em quando este tipo de tarefa nas suas aulas. No entanto, o facto é que ambas valorizaram bastante a exploração feita usando materiais concretos, salientando que a manipulação destes materiais e as descobertas realizadas foram marcantes para os alunos, conduzindo a uma aprendizagem mais consistente e duradoira que o habitual. Tânia fez ainda uma reflexão sobre o que são problemas e exercícios para diferentes tipos de alunos, recorrendo a um exemplo da sua própria prática relativo a escalas:

> Eu estava a lembrar-me, no 6.º ano nós estamos nas escalas e é uma coisa que eles têm alguma dificuldade … Quando passamos para os problemas, ou para os exercícios, conforme os alunos, temos uns em que aquilo vai ser um problema a vida inteira e para outros aquilo já é um exercício porque percebem logo que quando estamos a trabalhar a razão entre o desenho e o real, começam logo a perceber "Ah! 1 está para qualquer coisa" e que esse 1 representa, ou o desenho, ou o mapa.

As noções de exercício, problema e exploração, discutidas nestas sessões, permearam toda a realização do estudo de aula, tendo sido bem aceites pelas professoras. Apesar de por vezes as professoras usarem o termo “exercício” para designar qualquer tarefa, percebia-se que tinham em atenção se os alunos dispunham ou não de um método de resolução imediata e se a tarefa proporcionava ou não a construção de novos conhecimentos.

Tarefas e representações. Um dos aspetos importantes de uma tarefa são as representações explicitamente envolvidas ou que se podem usar na sua resolução. A análise das novas orientações curriculares em vigor (MEC, 2013), realizada na sessão 2, proporcionou uma reflexão sobre as representações a usar nas tarefas a propor aos alunos. As professoras ficaram bastante admiradas com o facto das *Metas Curriculares* (MEC, 2013), no que se refere aos números racionais, no 5.º ano, referirem apenas as representações em fração e na reta numérica. Valorizando o que costumavam fazer na sua prática, as professoras consideraram importante trabalhar a representação em fração em simultâneo com outras representações de número racional, nomeadamente numerais decimais e percentagens, bem como a representação pictórica:

Inês: Relacionamos também os esquemas, logo!

Marisa: As representações pictóricas, não é?

Inês: Porque quanto estamos a corrigir um teste, eles próprios [os alunos] vão buscar várias maneiras de resolver um problema. Uns é por figuras, outros é por contas, outros é… Portanto, há tantas maneiras que eles vão buscar que nós também temos de estar adaptados àquilo tudo.

Desta discussão ressaltou a importância do trabalho com diferentes representações, bem como a valorização da representação pictórica como suporte intuitivo para todo o trabalho a realizar com os alunos no que respeita aos números racionais.

É de notar que esta e outras discussões evidenciaram um certo desfasamento na linguagem usada pelas professoras e a linguagem usada habitualmente na investigação em Didática da Matemática. Na verdade, as professoras não estavam muito habituadas a falar em representações e usavam termos diversos para designar a representação pictórica — que, ao contrário das outras, não tem uma designação formal em Matemática — falando em “esquemas”, “desenhos” e “gráficos”. Não mostraram dificuldade em aceitar as designações que propusemos e mostraram compreender as ideias subjacentes, mas muitas vezes continuaram a usar a sua terminologia habitual.

Nível de desafio de uma tarefa. Uma tarefa relativa à reconstrução da unidade e apresentada por nós na sessão 2 (Figura 2), causou estranheza às professoras e suscitou uma discussão muito participada.

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Explica o teu raciocínio.

Figura 2. Tarefa analisada pelas professoras na sessão 2 (Menezes *et al.*, 2008).

Maria evidenciou de imediato alguma perplexidade:

Maria: Como é que abordavam isto? Isto é *34* e agora como que lhes pediam *12*? Como é que eles vão…?

Esta questão gerou uma animada discussão, desde logo, sobre o modo de resolver a tarefa:

Tânia: Primeiro tentar acrescentar…

Inês: Divide-se esta parte…

Marisa: Primeiro eles perceberem o que é que é então a…

Professoras: [ao mesmo tempo] A unidade!

Tânia: Que isto não é uma unidade. … Eles ainda não sabem a noção de… Eles não têm a noção da fração como parte do todo.

Assim, num primeiro momento, as professoras procuraram, elas próprias, perceber como se poderia resolver a tarefa. Reconheceram que esta seria difícil para os seus alunos, uma vez que requeria uma resolução com vários passos, sendo o primeiro a reconstrução da unidade. De seguida, discutiram as possíveis dificuldades dos alunos na resolução da tarefa, indicando que o erro mais comum seria dividirem a tira em quatro partes (em vez de dividirem em três) e acrescentarem uma parte. Tânia notou que esta dificuldade se prende com a falta de compreensão do significado parte-todo.

Não deixa de ser interessante observar tarefas envolvendo a reconstrução da unidade — uma noção essencial para a compreensão da noção de número racional — mostram estar pouco presentes na prática das professoras. A discussão feita em grupo permitiu identificar as dificuldades prováveis dos alunos e indicar uma estratégia de resolução que estes poderiam seguir. Ficou no ar a questão de saber em que medida os alunos destas professoras (ou pelo menos alguns deles) seriam ou não capazes de resolver a tarefa.

Nesta sessão as professoras consideraram muitas das tarefas propostas demasiado difíceis para os alunos do 5.º ano, pois entendem que estes ainda não têm a necessária "maturidade" para as resolver. Isso mesmo é referido por Inês:

> Agora já acho que alguns alunos do 6.º ano poderão ter maturidade para perceber estas coisas. Eles no 5.º ano deviam só ser obrigados a entender um bocadinho a representação gráfica [pictórica] das frações e … Agora isto? Tanto raciocínio!? Eu acho que não têm raciocínio para isto…

Assim, no discurso das professoras, um nível de dificuldade mais elevado começa por aparecer associado a certas representações ainda não conhecidas dos alunos (como a reta numérica) ou à falta de valorização de outras representações (como a representação pictórica) que consideram a mais indicada para os alunos compreenderem o conceito de número racional.

Na última sessão do estudo de aula, questionámos as professoras sobre a importância de analisar a natureza das tarefas, nomeadamente tendo em conta o seu grau de desafio.

Tânia defendeu que se devem propor aos alunos tarefas de natureza diversificada e justificou assim a sua opinião:

> Eu acho que é [útil], porque, quanto menos… Nós temos que abrir o leque e, é aquilo que nós dizemos, nós temos alunos que vão estar nos exercícios, exercício e mais exercício, mas temos de pensar que há alunos que têm capacidade para muito mais do que isso, e nós não temos de pensar só nos alunos que têm dificuldades, e muitas vezes temos turmas em que há possibilidades de alunos fazerem generalizações e justificações.

Deste modo, Tânia criticou a atitude dos professores se prenderem demasiado ao facto de existirem alunos com dificuldades, limitando o grau de desafio das questões que colocam às suas turmas. Considera que questões com um nível de desafio mais elevado, nomeadamente envolvendo processos de raciocínio como generalizações e justificações devem também ser colocadas, mesmo que aparentemente só estejam ao alcance de alguns alunos. Esta perspetiva pareceu merecer o consenso geral das professoras no fim do estudo de aula. Assim, no final da formação, na apreciação do nível de desafio, para além das representações, as professoras passaram a ter em atenção aspetos como os processos de raciocínio envolvidos.

Tarefas e raciocínio

Um dos grandes temas deste estudo de aula foram os processos de raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas. Nas discussões realizadas demos especial atenção a três processos: a determinação de uma estratégia de resolução de uma tarefa, a generalização e a justificação. Damos conta das perspetivas das professoras participantes em relação a estas questões.

Determinação de uma estratégia de resolução. Na sessão 2, a propósito de uma tarefa de partilha equitativa, gerou-se uma discussão interessante que evidencia a perceção por parte das professoras da importância da representação que se usa para elaborar uma estratégia de resolução de uma tarefa. Assim, numa tarefa era indicado que 3 pizas seriam igualmente partilhadas por 4 amigos, perguntando quanto caberia a cada um. De seguida, perguntava-se quanto receberia cada um se fossem 8 amigos a partilhar as 3 pizas. As professoras consideraram que os alunos usariam uma estratégia baseada na representação pictórica. Na sua perspetiva, os alunos têm dificuldade em compreender a fração no significado quociente e em fazer divisão, pelo que usariam, provavelmente, a representação que para eles seria mais fácil. Também consideraram que os alunos usariam a representação pictórica para comparar *34* e *38* por ser aquela que lhes permitia uma melhor compreensão da situação. Sobre isso, Maria afirmou:

> É que eles na fração, eles não conseguem ver o que aquilo é; não têm noção se é grande se é pequeno. Se *38* e *34* é a mesma coisa (…) Mas com o desenho eles veem isso com muita facilidade.

Noutro momento da mesma sessão, Maria associa raciocínio a estratégias de resolução de problemas, classificando como "raciocínio complicado" uma estratégia de resolução que envolve vários passos:

> Marisa: Mas não só, porque eles podem simplesmente ver se essa reta toda mede quatro metros, quanto é que mede cada décimo: 0,4 e depois vão somando…
>
> Inês: Vão somando…
>
> Maria: Raciocínio complicado, nem pense.

Deste modo, o grau de dificuldade de uma tarefa parece também associado ao número de passos ou conexões ("muito raciocínio") que esta exige dos alunos.

A tarefa representada na Figura 3, proposta também na sessão 2, apela a uma estratégia de resolução baseada numa justificação por contraexemplo e proporcionou uma animada discussão na sessão 2.

$\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{3}{4}$. Será que podemos fazer a seguinte afirmação: "Se quisermos comparar duas frações e verificarmos que uma delas tem o numerador e o denominador maiores do que a outra, podemos logo concluir que essa é a fração maior"? Justifica a tua resposta.

Figura 3. Tarefa analisada pelas professoras na sessão 2 (adaptada de Lin & Tsai, 2012).

Ainda que se trate de uma tarefa desafiante, as professoras começaram a procurar perceber como é que os alunos a podiam resolver. Inicialmente, pensaram em modos de comparar as frações dadas no enunciado, no entanto, verificaram que isso não conduz à resolução da tarefa. A certa altura perceberam que a afirmação é falsa. A dificuldade que previam na realização desta tarefa por parte dos alunos não era tanto na escolha da representação a usar mas sim na interpretação do enunciado e sobretudo na estratégia para refutar a afirmação:

> Maria: Não sei. Então como é que eles justificam? … Se os miúdos olharem só para isto, se o 2 é maior que o 1, 4 é maior que 3, então, 24 é maior que 13 , é isso que queremos provar que não é verdade. Como é que eles vão provar que não é verdade?
>
> Luísa: Com um contraposto, ou seja, um que seja… Que aconteça o contrário!

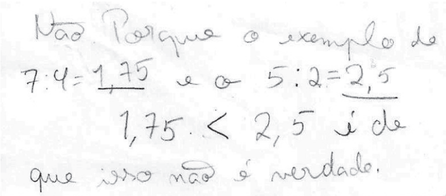
Luísa sugeriu que a estratégia seria encontrar uma situação onde a afirmação não se verificasse, usando o termo "contraposto", indiciador que se trata de um conceito algo distante da sua prática. As professoras concluíram que a tarefa seria demasiado complicada para os alunos e reafirmaram que eles não a conseguiriam resolver. Contudo, os formadores apresentaram exemplos de resoluções de alunos do 2.º ciclo que não só conseguiram resolver a tarefa, como, inclusivamente, usaram exemplos inesperados para refutar a afirmação, como os pares de frações 55 e 44 (5 é maior do que 4 mas as frações são iguais). Nos exemplos que tinham produzido, as professoras não tinham nada de semelhante e Maria ficou entusiasmada com a ideia de usar frações com numerador e denominador iguais:

> Ah! Mas essa é melhor porque essa são iguais … Essa foi boa, sim senhor … Apesar do 5 ser maior que o 4 e… O resultado é igual. E portanto é um contraexemplo, sim senhor. E é muito mais fácil do que andar à procura de outras. Os alunos são muito inteligentes!

Este episódio evidencia a reduzida familiaridade das professoras com tarefas envolvendo processos de raciocínio mais elaborados. Talvez por isso, consideram estas tarefas como muito difíceis e para além das possibilidades dos seus alunos. Contudo, o confronto com casos em que os alunos resolveram com sucesso essas tarefas, acabou por entusiasmar e envolver as professoras.

Generalizações e justificações. Na sessão 4 foram discutidos diversos processos de raciocínio e analisados exemplos de resoluções de alunos. A equipa de formadores começou por fazer uma breve apresentação dos conceitos de generalização e justificação, dos quais as professoras se apropriaram com facilidade.

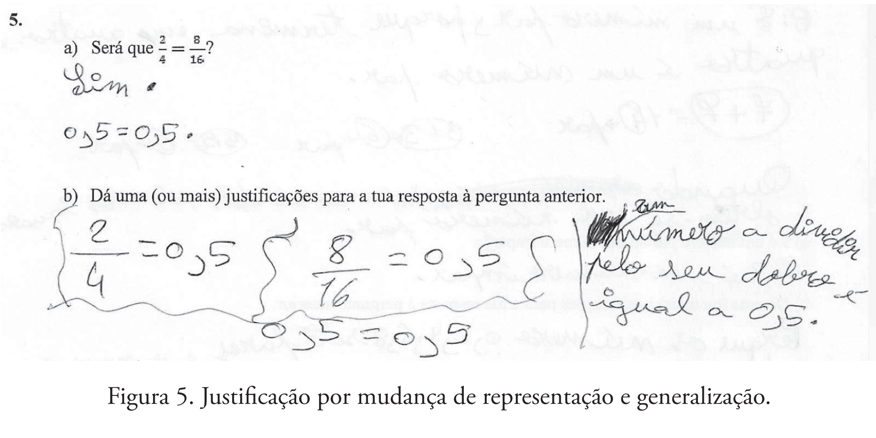
Ao observar resoluções dos alunos, Tânia e Inês identificaram facilmente generalizações e justificações. Assim, no caso da Figura 4, Tânia reconheceu que o aluno usou um contraexemplo para refutar uma afirmação e, por isso, estava a fazer uma justificação: "É mais uma justificação, ele vai arranjar um exemplo."



Não. Porque o exemplo de
7:4=1,75 e o 5:2=2,5
1,75 < 2,5 é de
que isso não é verdade.

Figura 4. Justificação por contraexemplo.

Ao analisar a resolução apresentada na Figura 5, Inês identificou a justificação na alínea a): "Isto aqui é uma justificação", reconhecendo que o aluno usou uma justificação válida ao mudar os valores dados numa representação (*24* e *816*) para outra representação para verificar a igualdade:



5.

a) Será que $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$?

Sim.

0,5=0,5.

b) Dá uma (ou mais) justificações para a tua resposta à pergunta anterior.

$\frac{2}{4} = 0,5$ $\frac{8}{16} = 0,5$

$0,5 = 0,5$

Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5.

Figura 5. Justificação por mudança de representação e generalização.

De seguida, Tânia analisou a resolução da alínea b) e identificou a generalização:

Tânia: Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.

Joana: Na outra tem uma generalizaçãozinha, sim. Que não é "zinha".

Tânia: Já não é para todos.

Joana: Exatamente.

Perante esta afirmação de Tânia, a equipa de formadores decidiu valorizar não só a identificação da generalização, mas também o trabalho dos alunos, destacando assim o seu alcance e a importância dele ser analisado e tido em conta na atividade da sala de aula. Na sequência desta discussão, as professoras mostraram facilidade em identificar generalizações e justificações feitas pelos alunos.

Oportunidades para generalizar. Assumindo que se conseguem identificar situações em que os alunos fazem generalizações e justificações, passa a ser importante que os professores sejam capazes de criar oportunidades que as favoreçam.

Assim, na sessão 5, durante uma discussão sobre os processos de raciocínio dos alunos, Marisa desafiou as professoras a refletirem sobre generalizações que se podem esperar na comparação e ordenação de números racionais. Teve lugar o seguinte diálogo:

Luísa: Por acaso houve uma tarefa que eu encontrei num livro que tinha uma generalização. Eles ao longo das várias questões que iam fazendo depois encontravam a generalização da comparação.

Marisa: A generalização da…?

Luísa: Por exemplo, entre frações com o mesmo denominador em que aquela que representa o número maior é aquela que tem maior numerador. Portanto era uma questão em que eles começavam por ter várias frações…

…

Tânia: Para comparar frações com denominadores iguais e com numeradores iguais já são logo duas das que eles têm, e depois as frações unitárias eles também [dão].

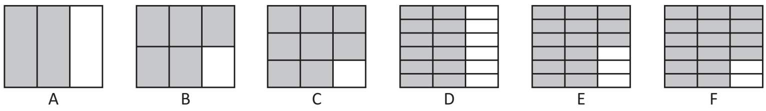
…

Luísa: Em que eles vão observando uma situação que se vai passando sempre e eles começam a perceber que aquilo é assim para todos os casos, não é?

Perante este desafio, as professoras identificaram possibilidades de generalização recordando tarefas que já tinham visto. Luísa reconheceu que se tratava de uma generalização de caráter indutivo, uma vez que os alunos observam vários casos particulares para fazer a generalização.

Na sessão 6, dedicada ao planeamento da aula de investigação, as professoras elaboraram um conjunto de tarefas onde se evidencia uma intenção exploratória (Figuras 6 e 7). Fizeram-no, por sua própria iniciativa, tendo em conta as discussões das sessões anteriores sobre a natureza das tarefas e sobre o raciocínio. Como acontece muitas vezes, a primeira tarefa começa com questões muito simples (1.1., que para estes alunos se podem considerar exercícios), que servem de ponto de partida para uma das questões mais desafiantes (1.2.a) e b)), que pretendiam depois explorar num momento de discussão coletiva. A segunda tarefa tem duas partes, sendo que 2.1 se pode considerar um problema e 2.2. uma questão de exploração, dada a sua natureza aberta.

1. Observa as figuras.



1.1. Escreve frações que represente a parte pintada de cada figura.

A ___ B ___ C ___ D ___ E ___ F ___

1.2. Observa as figuras D, E e F.

1.2.1. Ordena as frações representadas por essas figuras (D, E e F) pela ordem descrescente.

a) Repara nos denominadores das frações que ordenaste e completa.

São______________.

b) Repara agora nos numeradores dessas frações e completa.

A fração maior é a que tem ________________________ numerador.

2. O Simão e o Vítor têm jardins iguais. O Simão já limpou $\frac{3}{5}$ do seu jardim e o Vítor $\frac{3}{8}$ do seu.

2.1. Indica qual dos irmãos vai mais adiantado na tarefa, justificando a tua resposta. (podes utilizar palavras, cálculos ou esquemas).

2.2. Que conclusão podes tirar? (Completa)

Dadas duas frações com o mesmo numerador ____

____

Figura 6. Tarefas 1 e 2 planeadas para a aula de investigação.

Para além de evidenciarem níveis de desafio e de abertura diferenciados, deve notar-se que as questões propostas revelam uma preocupação com o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Com as questões 1.2.1 a) e b) as professoras pretendiam que os alunos generalizassem a regra para comparar frações com o mesmo denominador. Com a questão 2 pretendiam que os alunos generalizassem a regra para comparar frações com o mesmo numerador. Luísa considerou que os alunos não conseguiriam chegar à generalização sozinhos e, por isso, julgava ser necessário encaminhá-los nesse sentido através da questão 1.2:

> Acho que aqui é mais [para] facilitar. Numa primeira análise eles conseguirem ordenar frações com o mesmo denominador e perceberem porquê. E depois na segunda questão, que já tem a ver com outro género de ordenação, se calhar aqui deixamos isto um bocadinho em aberto, na segunda questão. E aí eles vão ter mesmo de…

E Maria acrescentou:

> É que a "a" e "b", ali do "1.2", era suposto encaminhar para esta conclusão, como é óbvio, ou seja, ali comparámos os denominadores, depois a fração que é maior é a que tem maior numerador e depois era suposto, aqui no "2", fazerem isto já sem qualquer rede, não é? Serem eles a procurarem esta resposta depois de terem feito o que está anteriormente já sem serem dirigidos.

Assim, no seu planeamento, como os alunos não estavam habituados a fazer generalizações, as professoras optaram por deixar a questão 1 mais fechada e dirigida, deixando a questão 2 um pouco mais aberta.

Oportunidades para justificar. Já a tarefa 3 elaborada para a aula de investigação (Figura 7), e que se pode considerar constituir um problema para os alunos a que se destinava, tinha como objetivo promover o desenvolvimento do uso de justificações:

3. O Bruno encheu um copo com água. Desse copo, bebeu $\frac{1}{2}$ e pensou:
"Bebi um $\frac{1}{2}$ da água que estava no copo e sobrou $\frac{1}{2}$. Se do copo cheio eu bebesse $\frac{1}{3}$ também sobraria $\frac{1}{3}$?

Como responderias ao Bruno?

Apresenta uma justificação para tua resposta utilizando palavras, cálculos ou esquemas.

Figura 7. Tarefa 3 planeada para a aula de investigação.

Na perspetiva das professoras esta era a tarefa mais "divertida" de todas. A este respeito, Maria, que classifica esta tarefa como um "problema", diz:

> A Luísa é que conhece a turma, mas este problema está no fim por uma razão. Isto é assim, quem conseguir fazer, quem for um bocadinho melhor e chegar lá, vai ter gozo em fazer este, os que ficarem — coitadinhos — aqui nesta parte [1 e 2], pronto, irão ter gozo dadas as frações. Agora, este [3] é o mais giro, para mim é, é o que os obriga a pensar, é o que os obriga a raciocinar, é o que os obriga a comparar os tais *12* com *13* e não sei o quê. Este [3] é um bocadinho para aqueles que são um bocadinho melhores, nós também costumamos fazer os testes e as fichas assim, fica sempre ali um para aqueles que têm mais capacidades.

Maria sublinha assim a característica que considera desafiante desta tarefa indicando que iria obrigar os alunos a raciocinar — neste caso a encontrar uma estratégia para comparar duas frações com diferentes denominadores.

Na escolha da tarefa e no planeamento da aula de investigação verifica-se que as professoras procuram ter em atenção os conceitos discutidos nas sessões anteriores. É de notar que, ao longo da preparação da aula, a tarefa foi-se tornando mais aberta com o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Na reflexão sobre a aula de investigação, realizada na sessão 8, pedimos às professoras que apresentassem os aspetos que consideravam interessantes nas resoluções dos alunos e as dificuldades na tarefa. Estas salientaram com facilidade as principais dificuldades dos alunos que observaram na resolução da tarefa. Indicaram também aspetos interessantes das resoluções dos alunos. Por exemplo, Luísa salientou o facto de ter discutido com os alunos conceitos que não estavam planeados, como a noção de fração equivalente:

> Então, uma das coisas [não planeadas] foi mesmo eles terem dado conta das frações equivalentes, pegaram nas representações e conseguiram encontrar frações equivalentes sem ainda saberem o nome, não é? Foi mais por aí, foi positivo.

Marisa referiu que foi a aluna que observou durante a aula (Berta) quem introduziu na discussão a noção de frações equivalentes, apesar de não o ter feito na sua resolução individual. Assim, na questão 1.1. A, para além da representação *23* , que a generalidade dos alunos registou, esta aluna indicou *46*. Fez-se então o visionamento do diálogo registado no vídeo da aula:

Berta: No A eu sei outra.

Professora: Sabes? Diz lá.

Berta: Quatro sextos.

Professora: Quatro sextos… Ora portanto, o A tínhamos dividido em… A unidade dividida em três partes e temos duas dessas partes pintadas. A Berta diz que esta figura pode ser representada por quatro sextos. Explica lá porquê quatro sextos?

Berta: Porque se dividirmos a figura ao meio…

Professora: Ao meio como?

Berta: Na horizontal… [e traça com a mão no ar uma linha horizontal (Figura 8)]

Figura 8. Justificação de Berta para a representação 4/6.

Professora: Assim? É isto?

Berta: Sim. Ficamos com quatro partes pintadas que é o numerador e seis partes onde a figura está dividida.

Comentando a intervenção de Berta sobre frações equivalentes, Inês aproveitou para salientar a forma como a aluna justificou, de modo muito interessante, a equivalência das frações:

> Aquela garota… A Berta representou os tais *46*, de *23* passou para *46*, eu acho que ela explicou realmente de uma maneira muito simples, pondo um traço ao meio e os outros viram que realmente… Muito bem… E fez com que os outros entendessem.

Tânia destaca ainda esta discussão sobre a equivalência de frações como um bom momento de aprendizagem, ainda que não corresponda ao objetivo inicial da aula:

> Apesar de não ter sido o nosso objetivo acho que a aula… surgiu o conceito e ela [Luísa] soube aproveitar. Acho que aquilo que acabámos por pensar para a questão "1", que era comparação de frações [risos], foi tudo… Para a comparação de frações já vimos que esta não dá. Quanto a mim, depois de ter visto isto, o objetivo de comparação de frações não é com esta ficha que lá vamos.

Nesta reflexão as professoras mostraram ter desenvolvido a sua capacidade de apreciar tanto as dificuldades como os desempenhos positivos dos alunos. Mostraram também valorizar o modo como se tirou partido de oportunidades de aprendizagem que surgiram no decorrer da aula. É de notar que as generalizações e justificações pretendidas não surgiram do modo previsto, além de que muitos dos objetivos pretendidos não foram manifestamente atingidos, o que levou as professoras a criticar a tarefa usada, assumindo a necessidade da sua reformulação. No entanto, é de assinalar a sua atenção aos processos de raciocínio (em especial, à generalização e justificação), que proporcionaram interessantes momentos de discussão coletiva na aula de investigação.

Conclusão

Os episódios analisados neste artigo mostram momentos de reflexão das professoras que participaram neste estudo de aula sobre a natureza das tarefas e os processos de raciocínio dos alunos, cruzando conhecimento da investigação que a equipa de formadores procurou integrar nas atividades propostas com o conhecimento proveniente da sua experiência e da sua própria prática letiva. As distinções entre exercício, problema e exploração (Ponte, 2005; Skovsmose, 2001) foram bem aceites pelas professoras, constituindo um pano de fundo subjacente ao trabalho realizado. As professoras reconhecem a importância do trabalho dos alunos com diferentes representações e da sua articulação e valorizam de modo especial a representação pictórica, que veem como o suporte natural para a elaboração de estratégias de resolução de problemas por parte dos alunos. As discussões realizadas e os exemplos trabalhados levaram-nas a concluir que o que está escrito no enunciado da tarefa não determina a respetiva natureza, sendo muito importante saber qual o conhecimento prévio dos alunos. Notou-se que não usam tarefas de exploração com frequência, mas destacam as aprendizagens que os alunos fazem através do trabalho neste tipo de tarefa, considerando-as muito significativas. Notou-se também alguma reserva inicial das professoras em relação a tarefas com elevado nível de desafio ou envolvendo processos de raciocínio complexos, como justificação por contraexemplo, considerando que são demasiado difíceis para os seus alunos. Contudo, quando planificaram a aula de investigação procuraram incluir tarefas com diferentes níveis de desafio, incluindo questões onde identificam possíveis generalizações e justificações que os alunos podiam fazer no tópico da comparação e ordenação de números racionais. Assim, as tarefas que prepararam para esta aula incluíam problemas e questões de natureza exploratória, prevendo a generalização das regras para comparar frações com o mesmo denominador e com o mesmo numerador.

Este estudo de aula mostra as perspetivas iniciais das professoras sobre tarefas e raciocínio matemático, bem como sobre as capacidades dos seus alunos para as resolver, evoluíram ao longo do estudo a partir de reflexões realizadas. Assim, as professoras tiveram oportunidade para se envolver na realização de tarefas matemáticas e de discutir as características que as podem tornar mais ou menos desafiantes, bem como aspetos fundamentais dos processos de raciocínio, como a definição de estratégias (Pólya, 1945; Wickelgren, 1974), a generalização e a justificação (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). Como é próprio dos estudos de aula, em muitas sessões, procurou-se antecipar possíveis dificuldades dos alunos na realização de diferentes tipos de tarefa (Alston, Pedrick, Morris, & Basu, 2011) e noutras sessões olhou-se para o que os alunos realmente fazem em sala de aula (como aconteceu na aula de diagnóstico e na aula de investigação). Estas atividades proporcionaram um forte envolvimento das professoras nesta formação e conduziram-nas a refletir e considerar elementos da abordagem exploratória na sua prática letiva, como o uso de tarefas mais desafiantes, a realização de momentos de discussão coletiva e a criação de oportunidades para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos através de generalizações e justificações.

A deslocação da discussão da dicotomia exercício/problema para a consideração da noção mais geral de tarefa revelou-se útil no trabalho realizado neste estudo de aula. Combinando momentos de trabalho estruturado e de trabalho exploratório das professoras e conjugando o conhecimento proveniente da investigação com o seu conhecimento experiencial, criaram-se situações em que estas puderam refletir, experimentar na sua aula e passar a valorizar tarefas visando a construção de conhecimento por parte dos alunos a partir da sua atividade e procurando promover processos de raciocínio matemático. As professoras passaram também a olhar de outro modo para a possibilidade de propor aos alunos tarefas de natureza desafiante, tendo em atenção as suas reais capacidades. Algumas destas tarefas seriam problemas para os alunos em causa, outras exercícios e outras explorações — cada uma com o seu papel. Este estudo sugere assim que a combinação de diferentes tipos de tarefa, organizadas em sequências coerentes e trabalhadas na sala de aula, em atividade autónoma dos alunos e em discussões coletivas, pode efetivamente perspetivar uma mudança significativa na dinâmica do ensino da Matemática.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsas atribuídas a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013) e a Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação e Matemática*, *8*, 7–10 e 35.

Alston, A. S., Pedrick, L., Morris, K. P., & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers' close attention to students' mathematical thinking. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 135–151). Dordrecht: Springer.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: Autor.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Autor.

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Borralho, A. (1997). O ensino da resolução de problemas de matemática por parte de futuros professores: Relações com a sua formação inicial. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Eds.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática* (pp. 129–158). Aveiro: Grupo de Investigação de Resolução de Problemas da Universidade de Aveiro.

Borralho, A., Fernandes, D., Vale, I., Gaspar, A., & Dias, R. P. (2011). Ensino, avaliação e a participação dos alunos em contextos de experimentação e generalização do programa de matemática do ensino básico. In *Atas do ProfMat 2011* (pp. 1–12). Lisboa: APM.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Merlín.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119–161). New York, NY: MacMillan.

Fernandes, D., & Vale, I. (1993). Concepções e práticas de dois jovens professores perante a resolução de problemas. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 145–168). Lisboa: IIE.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176–201). Routledge, NY: Taylor and Francis.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Research Council.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 263–283.

Lin, P.-J., & Tsai, W.-H. (2012). Fifth graders mathematics proofs in classroom contexts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of PME 36* (Vol. 3, pp. 139–146). Taipe: PME.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano* (Materiais de apoio ao professor). Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1–12). New York, NY: Springer.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, 39(5–6), 419-430.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática*, *5*, 7–24.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1994). A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 197–211). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355–377.

Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, *91*(1), 4–8.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM*, *33*(4), 123–132.

Wickelgren, W. A. (1974). *How to solve problems: Elements of a theory of problems and problem solving*. San Francisco, CA: Freeman.

Resumo. Analisamos as perspetivas sobre as tarefas a propor aos alunos de um grupo de cinco professoras do 2.º ciclo do ensino básico que participam num estudo de aula. Nas tarefas, distinguimos entre exercícios, problemas e explorações e damos especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático. A recolha de dados foi feita por observação participante e recolha documental, através da elaboração de um diário de bordo, gravação áudio das doze sessões realizadas e gravação vídeo da aula de investigação. Os resultados mostram que, a partir do trabalho efetuado no estudo de aula, as professoras aceitam a distinção entre exercício, problema e exploração e valorizam a realização deste último tipo de tarefa. Reconhecem, também, as representações pictóricas como base para a elaboração de estratégias de resolução de problemas pelos alunos. Além disso, passam a valorizar a realização de generalizações e justificações por parte dos alunos, reconhecendo que estes são por vezes capazes de surpreender o professor pela originalidade das suas estratégias de resolução dos problemas. Finalmente, os professores assumem também que devem ser propostas aos alunos tarefas de natureza diversificada, incluindo tarefas com um certo nível de desafio.

Palavras-chave: Tarefa, Problema, Raciocínio matemático, Abordagem exploratória, Estudo de aula.

Abstract. We analyze the perspectives about the tasks to propose to students of a group of five teachers of the second cycle of basic education participating in a lesson study. In the tasks, we distinguish between exercises, problems and explorations and give special attention to the development of mathematical reasoning. Data collection was carried out by participant observation and document collection, through the elaboration of a research journal, audio recording of the twelve sessions and video recording of the research class. The results show that, from the work done in the lesson study, the teachers accept the distinction between exercise, problem and exploration and value the realization of this latter type of task. They also recognize that pictorial representations may be the basis for the development of students' problem-solving strategies. In addition, they turn out to value the realization of generalizations and justifications from students, recognizing that sometimes they are able to surprise the teacher for the originality of their problem-solving strategies. Finally, the teachers also assume that different kinds of tasks should be proposed to students, including tasks with a certain level of challenge.

Keywords: Task, Problem, Mathematical reasoning, Exploratory approach, Lesson study.

JOÃO PEDRO DA PONTE
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

MARISA QUARESMA
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

JOANA MATA-PEREIRA
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

MÓNICA BAPTISTA
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mbaptista@ie.ulisboa.pt

(recebido em abril de 2015, aceite em outubro de 2015)