

Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem

From the teaching through open problem solving to mathematical investigations: possibilities for learning

Norma Allevato

Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil

Gilberto Vieira

Prefeitura Municipal de São José dos Campos e

ETEP Faculdade de São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Introdução: a problemática em questão

A Resolução de Problemas tem ocupado um lugar central e tem-se constituído como mola propulsora na construção de conhecimento, desde a Antiguidade, em todos os ramos do conhecimento. Não faltam exemplos de pessoas que se debruçaram sobre determinados problemas motivados pela busca incansável de sua solução e, em particular no caso da Matemática, levando à construção de novos conhecimentos e de uma ciência que se fez e ainda se faz a partir dessa busca. Não raro isto é manifesto pela expressão *os problemas constituem o coração da Matemática!* Apesar disso, da infinidade de pesquisas já realizadas sobre Resolução de Problemas na Educação Matemática e da inquestionável importância da posição que ela ocupa nos currículos escolares, a forma de incorporá-la nas aulas a fim de promover a aprendizagem efetiva da Matemática ainda não é bem compreendida pelos professores. Cai e Lester (2012) advertem que

[...] os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula. (p. 156)

O trabalho com resolução de problemas pode configurar-se de diferentes formas em sala de aula. Concordando com Contreras e Carrillo (1998), consideramos que o papel que

os professores outorgam à resolução de problemas nas aulas de Matemática decorre de suas concepções de ensino, e é muito provável que esse papel defina, em grande medida, a concepção de ensino subjacente. Além disso, diferentes tipos de problemas podem ser considerados em função dos objetivos que se pretende alcançar com sua proposição. Diferentes concepções em resolução de problemas e, particularmente, um tipo de problema — problema aberto — serão abordados com mais detalhes nas próximas seções do presente artigo.

Desse modo, a resolução de problemas não é algo que se implementa da noite para o dia com reflexos imediatos na aprendizagem dos alunos e também não deve configurar-se como uma prática isolada. Certamente, problemas e resolução de problemas foram e ainda são expressões empregadas com frequência no dia a dia de professores, legisladores e pesquisadores que se dedicam ao trabalho no âmbito da Educação Matemática: ao ensino, à aprendizagem, à avaliação, à formação de professores e à elaboração de materiais didáticos ou orientações curriculares. Apesar disso, nem sempre o uso dessas expressões vem acompanhado de reflexões conscientes e sistemáticas sobre seu real significado e sobre o relevante papel que a resolução de problemas desempenha ou deveria desempenhar na formação matemática dos estudantes. Os alunos, por sua vez, oferecem, nas aulas de Matemática, demonstrações explícitas de ausência das habilidades e conhecimentos matemáticos necessários a um bom desempenho em resolução de problemas e as avaliações em larga escala (como, por exemplo, a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar — Anresc¹), guardadas as devidas proporções, confirmam isso. E, a despeito da concordância de que a Matemática Escolar deve promover o desenvolvimento de tais habilidades nos estudantes e das indicações da Resolução de Problemas nas prescrições curriculares, em todos os níveis de ensino, o trabalho com resolução de problemas continua praticamente ausente das práticas de sala de aula.

A par disso, aspectos de natureza social, política e econômica inserem o contexto escolar e o trabalho docente em um cenário de complexidade que faz somar ainda mais dificuldades ao dia a dia do professor em geral e, certamente e em particular, do professor de Matemática. Tais dificuldades demandam a construção de ambientes de ensino que promovam a aprendizagem dos estudantes dentro de novos e atuais paradigmas, de forma a respeitar as diferenças individuais e estimular a criatividade, a expressão de ideias, a elaboração e validação de conjeturas, a autonomia e o trabalho em equipe. Acreditando que a resolução de problemas, por respeitar as diferenças individuais que se apresentam no conjunto dos alunos, inclusive por oferecer diferentes alternativas de trabalho em sala de aula (diferentes tipos de problema) pode constituir-se como uma alternativa metodológica adequada a esse cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas. O presente artigo tem o objetivo de discutir, particularmente, os processos investigativos decorrentes da proposição de problemas abertos e suas possibilidades para o ensino de Matemática.

A primeira seção, a seguir, será dedicada a destacar alguns momentos pelos quais passou a resolução de problemas em relação aos currículos e abordagens de ensino nas últimas décadas. Então, na segunda seção, analisando o atual quadro de complexidade que se apresenta ao ensino, serão apresentadas reflexões sobre como a resolução de pro-

blemas se insere nesse contexto. Na terceira secção, será apresentado um estudo sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem matemática, particularmente ao lançar mão da proposição de problemas abertos como instrumento para desencadear atividades de natureza investigativa. Após uma breve explanação sobre os procedimentos de recolha e análise de dados adotados, uma quinta secção será dedicada a apresentar e analisar um conjunto de dados construídos numa pesquisa desenvolvida com alunos brasileiros de 6.º ano do Ensino Fundamental², na faixa etária entre 11 e 12 anos de idade, na qual foi proposta a resolução de problemas abertos. Uma última parte, dedicada às considerações finais, sintetizará as ideias construídas nesta pesquisa.

Momentos da resolução de problemas nas últimas décadas

Relevantes mudanças de perspectiva na Educação Matemática ocorreram no século XX e, em particular, na resolução de problemas, cabendo destacar alguns episódios que ocorreram a partir da década de 80. As diferentes fases pelas quais passou a Educação Matemática caracterizaram-se por diferentes visões de como ensinar, aprender, avaliar, e selecionar conteúdos matemáticos e formas de trabalho para a sala de aula (currículos, métodos e processos). Esses movimentos e mudanças, edificados sobre aportes teóricos específicos, colocaram as reflexões em torno do que se queria (ou deveria) atingir e de como deveria ser feito o trabalho escolar com a Matemática (Lambdin & Walcott, 2007).

As primeiras tentativas de inserir a resolução de problemas como uma das abordagens a serem enfatizadas e valorizadas no ensino de Matemática, foram consideradas a partir da famosa obra de George Pólya, o livro *How to Solve It*, publicado em 1944. As ideias apresentadas por Pólya influenciaram fortemente estudiosos que começavam a dedicar-se às pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem matemáticas. Entretanto, sufocada pelo Movimento da Matemática Moderna, nos anos 60, a resolução de problemas ficou esquecida.

Segundo Lambdin e Walcott (2007), com o declínio da Matemática Moderna na década de 70, a resolução de problemas ressurgiu com vigor, a partir dos anos 80, quando as principais teorias de aprendizagem eram o Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural, e o foco das teorias de aprendizagem eram voltadas para os processos de pensamento matemático. A meta, nessa fase, era o regresso à aprendizagem por descoberta, construída pela resolução de problemas.

Desse modo, iniciam-se as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas na Educação Matemática. E um dos aspectos importantes, logo percebido, foi que professores, pesquisadores e outros educadores manifestavam diferentes compreensões sobre o trabalho com resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Apontadas, inicialmente, por Hatfield (1978), essas diferentes compreensões ainda se fazem perceber no final da década, quando Schroeder e Lester (1989) destacam a sua coexistência: (1) o ensino sobre resolução de problemas, (2) o ensino para a resolução de problemas, e (3) o ensino através da resolução de problemas. Vários trabalhos (Allevato, 2005; Allevato & Onuchic, 2009; Onuchic & Allevato, 2011) já analisaram exaustivamente as

características fundamentais e as implicações de cada uma dessas concepções no ensino e aprendizagem de Matemática, de modo que, no presente texto, serão apenas brevemente apresentadas.

Considerando a resolução de problemas como um conteúdo a ser abordado com os alunos, o ensino sobre resolução de problemas dá ênfase às heurísticas, na tentativa de fornecer regras e processos gerais que orientem os alunos na resolução de problemas, independentemente do conteúdo específico abordado. Um exemplo dessa concepção percebe-se em Krulik e Reys (1980), o livro do ano publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), entidade que teve forte influência no movimento pela inserção da resolução de problemas na Matemática Escolar a partir dessa década. O livro retoma, de forma clara e explícita, as ideias de Pólya (1944) e pode ser considerado, talvez, o mais importante exemplo entre os trabalhos com teor essencialmente voltado para o ensino sobre resolução de problemas.

No ensino de Matemática para a resolução de problemas, o centro da abordagem não está na resolução de problemas, mas na Matemática, sendo a resolução de problemas um complemento. Essa visão considera a Matemática como utilitária de modo que o propósito principal do seu ensino é que os alunos sejam capazes de transferir o que aprendem em contextos puramente matemáticos para problemas em outros contextos. Neste caso, é após ter desenvolvido a parte formal, “teórica”, referente a um determinado conteúdo matemático que o professor propõe problemas aos alunos, como aplicação dos conteúdos estudados:

Não obstante as aplicações da Matemática tenham inquestionável relevância, um perigo dessa concepção é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de algum algoritmo. Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e a resolução de problemas é utilizada para dotar a teoria de um significado prático. (Allevato & Onuchic, 2014, p. 38)

Na terceira concepção apontada por Hatfield (1978) e Schroeder e Lester (1989), o ensino através da resolução de problemas, ambas — Matemática e resolução de problemas — são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente. Ainda bastante incipiente no final da década de 80, esta perspectiva consolidou-se a partir dos trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, culminando com a publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), e destacada nos trabalhos de Lester Jr (2003) e Schoen (2003). Acompanhando esse movimento, também o Brasil renova suas orientações curriculares (Brasil MEC, 1997, 1998, 1999), recomendando que a resolução de problemas fosse o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula, indo ao encontro do que constitui o fundamento do ensino de Matemática através da resolução de problemas. Entendendo que dessa concepção decorre a possibilidade de trabalho com investigações matemáticas em sala de aula, a ela dedicaremos toda uma seção do presente artigo.

O ensino de Matemática através da resolução de problemas apresenta-se, portanto, como uma abordagem mais atual de resolução de problemas, de forma que pode constituir-se numa das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, onde se insere o relevante trabalho do educador matemático, conforme discutiremos na próxima secção.

O ensino de matemática num cenário de complexidade

Os movimentos pelos quais passou a Educação Matemática nas últimas décadas ocorreram a par de transformações sócio-político-económicas mundiais profundas. Novas demandas de formação das crianças e jovens para uma sociedade em transformação, plural, informatizada e mais complexa acarretaram um grande aumento na procura pela educação formal, especialmente pelos jovens em busca de habilitação profissional que os capacite a assumir novas áreas de trabalho. Simultaneamente, no Brasil, também novas leis e incentivos aumentaram as possibilidades de acesso à escola, com alternativas ampliadas, inclusive, pela iniciativa privada. Observou-se uma fragmentação da oferta com o aumento quantitativo de instituições de ensino e dos estudantes na escola. Configura-se uma pulverização do trabalho com Educação, com instituições de ensino de perfis diversos, atendendo às necessidades de uma população que, agora, percebe condições de chegar aos bancos escolares, de conquistar ascensão social através da qualificação, enfim, de conquistar patamares antes exclusivos de uma pequena parcela da população. A escola, supostamente, deixa de ser seletiva e passa a ser inclusiva.

Entretanto, essa realidade traz à escola uma série de dificuldades e novos desafios, especialmente porque os alunos apresentam perfis diferenciados daqueles com que ela estava acostumada, constituindo grupos de estudantes heterogéneos em termos de perfil social, económico e cultural. Ademais, a emergência de uma economia mundial competitiva e tecnológica passa a exigir a renovação das práticas escolares, apresentando, em acréscimo, também demandas à educação matemática da população. Segundo Willoughby (2000), dos tempos pré-históricos até hoje, a Matemática tem desempenhado papel muito importante no desenvolvimento da sociedade. Mas o autor considera que agora “esse papel é mais significativo do que antes e promete tornar-se ainda mais no futuro. Assim, a Educação Matemática é de grande interesse e suscita grandes debates” (p. 1).

De fato, a evolução tecnológica, particularmente no que se refere às tecnologias digitais, ampliando o acesso à informação e modificando os modelos de gestão em todo o tipo de instituição — familiar, escolar, empresarial, etc — tem trazido a Matemática a patamares cada vez mais destacados e necessários ao desenvolvimento e à compreensão dos fatos sociais, e do Mundo.

Neste cenário de complexidade, os desafios que se apresentam incluem a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos e de ajudar o aluno a compreender que lhe cabe a responsabilidade e o papel de protagonista da sua própria aprendizagem e do processo de construção de conhecimento. É preciso que a escola ofe-

reça oportunidades para que os alunos desenvolvam a criatividade, a autonomia, as habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo. O professor deve colocar-se como mediador e disponibilizar recursos diversificados (materiais e processuais) que respeitem as diferentes condições e estilos de aprendizagem dos seus alunos. Para o ensino-aprendizagem de Matemática, as alternativas e recomendações incluem jogos, tecnologias informáticas, modelagem matemática, tarefas investigativas, projetos e resolução de problemas (Brasil MEC, 2006).

A partir dessas reflexões, é possível perceber que a resolução de problemas se mantém relevante no ensino de Matemática e, conseqüentemente, na pesquisa sobre Educação Matemática. A busca por renovadas formas de realizar o ensino, a aprendizagem e a avaliação em Matemática, certamente, induz à mesma busca no trabalho com resolução de problemas e com as demais abordagens. Deste modo, na secção a seguir, o foco estará no ensino através da resolução de problemas, considerando, como já salientado, que constitui uma abordagem atual de resolução de problemas no âmbito do ensino de Matemática e, também, por ser uma via de acesso à realização de atividades de natureza investigativa pelos alunos.

Do ensino através da resolução de problemas às investigações matemáticas

Orientações oficiais brasileiras (Brasil MEC, 1998, 2006), apoiadas em ideias socioconstrutivistas de aprendizagem, sustentam que a aprendizagem se realiza pela construção de conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. E que, dessa forma, cabe ao professor assumir o papel de mediador, sendo responsável por gerar e gerir situações de resolução de problemas que propiciem, aos alunos, o confronto de antigos com novos conhecimentos, colocando-os no papel de construtores do seu próprio conhecimento matemático. Assim, compreendendo o movimento pelo qual passou a resolução de problemas no século XX (Allevato, 2005; Onuchic & Allevato, 2010), apoiado em orientações curriculares (Brasil MEC, 1998, 2006; NCTM, 2000) e acompanhando as pesquisas nessa linha (Bustamante, Ribeiro & Navarro, 2015; Lester Jr, 2003; Schoen, 2003; Schroeder & Lester, 1989; Van de Walle, 2009), poderia considerar-se como adequado o ensino de Matemática através da resolução de problemas.

Nessa concepção, deve-se assumir, conforme Cai e Lester (2012, p. 148) destacam, que “o termo resolução de problemas refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes”. Vale destacar, nesse sentido, as indicações do NCTM (2000), segundo as quais a resolução de problemas se constitui no primeiro padrão de processo para o ensino de Matemática, no sentido de se configurar como um meio, um caminho, uma forma para desenvolver o ensino e a aprendizagem de Matemática. E considerando, ainda, as orientações de Van de Walle (2009), a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino, de modo que o ensino e a aprendizagem de um tópico matemático deve, sempre que possível, começar com um problema, e os

conhecimentos devem ser construídos e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas ao problema proposto.

Desenvolvendo um extenso trabalho a partir dos apontamentos já citados do NCTM (2000), de Van de Walle (2009) e outros, e considerando que também a avaliação deva se constituir em oportunidade para a aprendizagem (Pironel, 2002), Allevato e Onuchic (2009) passaram a empregar a denominação de ensino-aprendizagem-avaliação³ de Matemática através da resolução de problemas para designar a abordagem em que a resolução de problemas é considerada como uma metodologia de ensino. Nela, o ponto de partida das atividades de sala de aula é um problema, então denominado problema gerador. Ele é proposto, aos alunos, antes mesmo de lhes ter sido apresentado o conteúdo ou os recursos matemáticos mais apropriados ou pretendidos para a sua resolução. O que se pretende é que, partindo dos conhecimentos que já possui, o aluno se coloque em uma dinâmica de resolução do problema e que no percurso de sua resolução aprenda Matemática, aprenda o conteúdo que o professor pretende que ele aprenda e outros conteúdos, eventualmente, não previstos pelo professor.

Implementar esta prática em sala de aula não é fácil, dado que professores e alunos não estão acostumados a este tipo de trabalho. E, em particular os alunos, mas também o professor terão que romper com vícios e práticas já cristalizadas e, portanto, mais cómodas. Assim, buscando organizar orientações para ajudar os professores a trabalharem através da resolução de problemas em suas aulas, Onuchic (1999) dividiu a metodologia em algumas etapas. Após várias pesquisas, esse roteiro foi aprimorado e, em sua versão mais atual é constituído de dez etapas, que podem ser sintetizadas pela Figura 1.

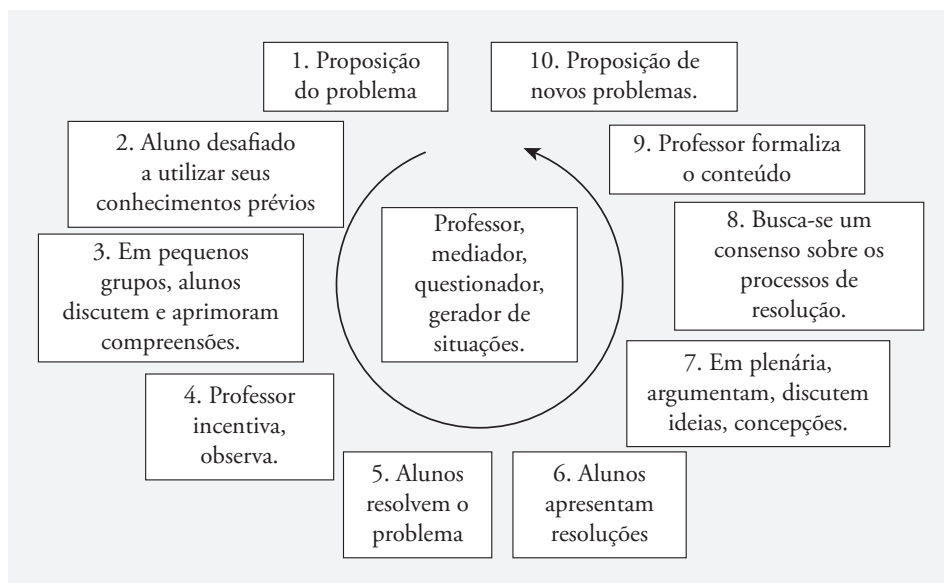


Figura 1. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O trabalho começa (etapa 1) com a elaboração ou escolha do problema gerador. Trata-se de um problema que será o ponto de partida das atividades, a partir do qual será ensinado e aprendido um novo conteúdo matemático. Esse problema pode ser proposto pelo professor ou pelos alunos (Allevato & Ferreira, 2013). Inicialmente o professor solicita aos alunos que façam uma leitura individual do problema (etapa 2), tentando entender o que é pedido e pensando como resolveria o problema. Essa etapa corresponde a uma preparação de cada aluno para a etapa seguinte, em que são formados pequenos grupos de alunos (etapa 3) para discutir, entender melhor e resolver o problema. Enquanto isso, o professor observa o trabalho dos grupos (etapa 4), incentiva a participação de cada aluno nos grupos e os auxilia em problemas secundários (compreensão de termos desconhecidos, dúvidas de notação, etc), sem fornecer respostas prontas ou processos definitivos para a resolução do problema gerador. Os grupos tentam resolver o problema (etapa 5) com os conhecimentos que possuem, as estratégias que conhecem e que consideram ser mais apropriadas. Após os grupos resolverem (ou tentarem resolver) da melhor forma o problema, é construído um painel de soluções (etapa 6), ou seja, os grupos registram suas resoluções na lousa (as corretas, as erradas, as realizadas por processos diferentes) para que todos, alunos e professor, observem, analisem e discutam (etapa 7). Nessa etapa, que é, talvez, a mais rica da metodologia para a aprendizagem, os alunos têm a oportunidade de comparar, refletir, argumentar, defender seus pontos de vista. Mediados pelo professor, todos tentam chegar a um consenso sobre a solução do problema (etapa 8). Então, o professor apresenta uma formalização matemática (etapa 9), ou seja, esclarece os conceitos e conteúdos envolvidos na resolução do problema, apresentando a linguagem matemática, as definições, propriedades e outros aspectos ligados ao conteúdo aprendido ou pretendido para a resolução do problema gerador. Finalmente, (etapa 10) novos problemas são propostos a fim de avaliar as compreensões construídas e consolidar a aprendizagem. A partir deles, o ciclo pode ser reiniciado de modo que esses problemas podem desencadear novas aprendizagens e a sala de aula se configura em um ambiente em que as atividades são orientadas pela resolução de problemas⁴.

No trabalho com resolução de problemas que é implementado segundo estas etapas, os conteúdos matemáticos aprendidos fazem sentido para o aluno, que passa a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Ao contrário do que se observa nas aulas ditas “tradicionais” e, inclusive em diversos livros didáticos, os problemas não são mais deixados para o final do processo. Eles são, sim, propostos no início das atividades e a aprendizagem vai realizar-se a partir e ao longo (através) da sua resolução. O trabalho apoiado nessa concepção pode ter o objetivo de promover a construção de conhecimentos sobre determinado conceito ou conteúdo matemático, sobre algum algoritmo importante a ser ensinado, ou pode mesmo visar ao desenvolvimento de alguma habilidade específica.

Schoenfeld (2007), analisando a posição da resolução de problemas nos percursos das pesquisas, práticas e políticas nos Estados Unidos, de 1970 a 2007, destaca que:

Resolução de problemas foi um foco importante da pesquisa em educação matemática nos EUA desde a metade da década de 1970 até ao fim da dé-

cada de 1980. Pela metade dos anos 1990 a pesquisa sob a bandeira de “resolução de problemas” foi vista cada vez menos e a atenção do campo foi se voltando para novas áreas. Entretanto, as pesquisas naquelas áreas de facto incorporaram ideias da pesquisa em resolução de problemas, e esse trabalho continua a evoluir em caminhos importantes. (p. 537)

O que pretendemos destacar aqui, concordando com Schoenfeld (2007), é que a resolução de problemas, como atividade inerente à própria Matemática e, portanto, inseparável dos seus contextos de ensino e aprendizagem, continua presente nestas novas abordagens. Vieira e Allevato (2012) assinalam que uma forma de trabalho que guarda muitos aspetos comuns à resolução de problemas e vem sendo realizada por professores de Matemática e pesquisada na Educação Matemática é a abordagem que visa proporcionar oportunidades de realização das chamadas investigações matemáticas. Ponte (2003, p. 16) admite a existência de uma estreita relação entre problemas e investigações e afirma que uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas.

Vale ressaltar que ao utilizarmos a expressão investigações matemáticas, não estamos nos referindo às tarefas de investigação (propostas), mas sim ao processo propiciado por tarefas desta natureza. Este processo compreende a procura metódica e consciente e a descoberta através de exame e observação minuciosos. Aproximando-se muito do significado de termos como explorar e inquirir, investigar envolve o trabalho com formulação de questões, elaboração de conjecturas, levantamento de hipóteses, exploração, demonstração, validação de resultados e comunicação dos resultados aos pares. Assumindo a concepção compartilhada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), cabe considerar que investigar é procurar conhecer o que não se sabe.

A ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática tem sido compartilhada por muitos pesquisadores e educadores matemáticos (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999; Oliveira, Segurado & Ponte, 1999; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009; Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999; Van de Walle, 2009), e tem conquistado adeptos em vários países. Tal concepção coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem matemática e reflete uma visão de que é através de atividades matemáticas intencionais e das experiências vivenciadas que se dá a produção de conhecimento matemático pelo aluno. Nesse sentido, ganha destaque o papel que as atividades de natureza investigativa podem desempenhar nas aulas de Matemática. Estes autores, investigadores da área da Educação Matemática, têm sublinhado a importância de se atribuir, na escola, um papel central ao objetivo de “pensar matematicamente”, sustentando que um contributo decisivo pode vir da realização de atividades que envolvem os alunos em problemas abertos e em investigações matemáticas (Silva *et al.*, 1999, p. 71).

Atualmente, tem sido fortemente recomendado o trabalho com problemas abertos, que correspondem a situações em que o aluno necessita elaborar diversas formas de resolução, podendo empregar diferentes mecanismos (Bustamante, Ribeiro & Navarro, 2015). Contrapondo-se aos chamados problemas fechados — em que tanto a situação inicial, como o processo de resolução, como o objetivo final (resposta) do problema é

pré-determinado —, nos problemas abertos, o processo de resolução é aberto ou o final é aberto ou a formulação de novos problemas é aberta. São problemas que partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções. Assim, os problemas abertos podem ser propostos como desencadeadores de processos de investigação matemática pelos alunos.

Com o intuito de discutir as atitudes investigativas vivenciadas por alunos diante da resolução de problemas abertos foi realizada uma pesquisa de campo com alunos brasileiros do 6.º ano do Ensino Fundamental. Apresentamos, a seguir, os sujeitos da pesquisa e a metodologia de recolha e análise de dados adotada.

Os sujeitos da pesquisa e o encaminhamento metodológico

A pesquisa foi realizada junto com uma turma do 6.º ano do Ensino Fundamental constituída por alunos com idades entre os 11 e 12 anos, de uma escola pública brasileira do município de São José dos Campos, interior do estado de São Paulo, durante o 3.º bimestre do ano letivo de 2013. A maioria dos alunos estudava na mesma turma desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Demonstravam disposição para realizar as tarefas propostas e entusiasmo com o primeiro ano de estudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental, porém não apresentavam familiaridade com problemas abertos e investigações matemáticas em sala de aula.

A estes alunos foi proposta uma série de tarefas envolvendo resolução de problemas abertos. Abordaremos, neste artigo, a resolução de um problema aberto envolvendo perímetro e área de regiões retangulares. Na aula em que essa tarefa foi proposta estiveram presentes 27 alunos que foram agrupados em 12 duplas e um trio, a fim de se estabelecer um ambiente que favorecesse o trabalho colaborativo, a troca de ideias e a argumentação em um movimento propício à produção de conhecimentos matemáticos. A tarefa foi realizada numa aula dupla, com duração de aproximadamente 100 minutos. Após a resolução da atividade proposta, os alunos foram convidados a anotar suas soluções na lousa e a discuti-las com os pares.

Destacamos que, neste trabalho, o professor da turma assumiu o papel de professor-pesquisador. Zeichner (1998) aponta a pesquisa realizada por professores como um importante e distinto meio de conhecer o ensino. O autor argumenta que os professores estão em situação privilegiada para fornecer uma visão de dentro da escola e que, além de constituir-se como um processo de desenvolvimento profissional, a figura do professor-pesquisador representa um importante processo de construção do conhecimento. Quanto à proximidade entre o pesquisador e o objeto de investigação, Ponte (2002) explica que a validade dos dados construídos e interpretados será aferida pelo rigor dos procedimentos metodológicos empregados. A formulação de boas questões de investigação, o estabelecimento de um plano de trabalho, as técnicas utilizadas para recolha de dados e o distanciamento colocado nos momentos de análise dos dados permitem que a estreita

relação entre professor-pesquisador e sujeitos da pesquisa seja superada, conferindo validade à pesquisa.

Para o tratamento das produções dos alunos, frutos de todo o processo de resolução de problemas por eles vivenciado, optamos por uma análise de natureza qualitativa. A discussão e a reflexão sobre o papel da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de Matemática repousam, em última instância, numa análise que deve considerar as percepções, opiniões, sensações e experiências dos envolvidos. Segundo Bicudo (2006), em pesquisas de natureza qualitativa procura-se privilegiar procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais e de acontecimentos como, por exemplo, as descrições de experiências e os relatos de observações. Pesquisas em educação muitas vezes assumem esse caráter qualitativo devido à natureza das questões de investigação que se colocam.

A recolha de dados foi realizada através de observações (Vianna, 2003), da gravação dos diálogos entre os alunos durante a realização das atividades, e das resoluções escritas dos alunos. Nesta tarefa, procurou-se analisar a produção de conhecimento matemático pelos alunos manifesta nos seus diálogos e registros, e observada pelo professor. Os diálogos foram observados em dois momentos: (1) durante o desenvolvimento da tarefa, momento em que os alunos, divididos em duplas, discutiam o encaminhamento da atividade proposta; e (2) durante a socialização dos resultados, momento em que cada dupla apresentava ao restante da turma as suas explicações e conclusões. Os diálogos foram gravados em áudio e, posteriormente, transcritos. Também foram analisadas as resoluções escritas do problema, registradas pelos alunos nas folhas que continham o problema proposto e na lousa, no momento de socialização dos resultados. Consideramos, ainda, durante a análise da atividade, as anotações do professor-pesquisador realizadas em diário de campo contendo as descrições e as impressões sobre o desenvolvimento da tarefa, na tentativa de captar alguma informação relevante que tenha “escapado” às transcrições das falas dos alunos e aos registros escritos das resoluções.

A organização e a análise cuidadosa dos diálogos dos alunos, das suas produções escritas e das anotações do diário de campo possibilitaram-nos vislumbrar alguns aspetos que podem favorecer a aprendizagem dos alunos a partir da resolução de um problema aberto e do processo investigativo dele decorrente.

Da teoria à prática: investigações decorrentes da resolução de um problema aberto

Com a intenção de exemplificar a maneira pela qual compreendemos o ensino de Matemática através da resolução de problemas e caracterizar a dinâmica desse trabalho em sala de aula, apresentamos, nesta secção, uma atividade elaborada segundo essa perspectiva.

Antes mesmo de se propor uma tarefa aos alunos, o trabalho do professor inicia-se com a cuidadosa seleção do problema. O problema será o ponto de partida, o elemento disparador de toda a atividade matemática que será desencadeada em sala de aula. Assim,

cabe ao professor selecionar, ou mesmo elaborar, um problema que seja interessante, no sentido de propiciar aos alunos a oportunidade de resolvê-lo e de aprender Matemática a partir dele. Por se tratar de um problema, a sua resolução não é evidente; em contrapartida, não é recomendável propor aos alunos um problema cuja resolução se revelará demasiadamente complexa, ou mesmo inalcançável. O desejável é pensar num problema que permita aos alunos, a partir da mobilização dos conhecimentos que já possuem e da discussão sobre as diferentes estratégias que possam ser empregadas durante o momento da resolução, acessar o conteúdo matemático em questão.

Escolhemos um problema envolvendo perímetro e área de regiões retangulares, cujo enunciado é apresentado na Figura 2.

Retângulos polêmicos: *A Sra. Dulce distribuiu para cada aluno de sua classe um pedaço de papel retangular de 6 cm por 8 cm. Ela pediu para que os alunos dobrassem o papel ao meio e o recortassem em dois retângulos congruentes. Melissa e Álvaro seguiram suas instruções, mas cada um obteve um retângulo diferente. A Sra. Dulce, então, pediu-lhes para comparar os perímetros e as áreas dos retângulos. “O meu tem a maior área e o maior perímetro, uma vez que é mais longo e mais esticado”, disse Melissa. Álvaro disse: “O meu esta mais próximo da forma de um quadrado, então sua área e perímetro são maiores”. Júlio disse: “Ambos devem ter a mesma área e perímetro, pois são, cada um, a metade do mesmo pedaço de papel”. Quem está certo? Como você sabe disso?*

Figura 2. Retângulos Polêmicos (adaptado de Krulik & Rudnick, 2005)

Quando o problema denominado Retângulos Polêmicos foi proposto aos alunos, estes já haviam realizado, anteriormente, algumas atividades relacionadas ao tema perímetro e área de figuras planas com a utilização de malhas quadriculadas. Com essa tarefa, desejava-se introduzir uma discussão a respeito de figuras isoperimétricas (figuras geométricas que têm perímetros iguais) e figuras equivalentes (figuras geométricas que têm a mesma área) e observar como os alunos se comportariam diante de um problema aberto. Tal problema não exigia apenas a realização de um cálculo para determinação de sua solução; mas a comparação de afirmações distintas e a tomada de decisão sobre quem estava certo. Além disso, não foram fornecidos indicativos de como os alunos deveriam proceder; as estratégias para a resolução não estavam determinadas. Assim, este problema configura-se como um problema aberto quanto aos processos que podem ser empregados em sua resolução.

As soluções deveriam ser apresentadas pelos alunos, bem como os caminhos percorridos para encontrá-las, fosse por meio de um desenho, de um cálculo, ou mesmo com a explicação escrita do raciocínio utilizado. Após o desenvolvimento da tarefa, os alunos foram convidados a registrar as suas soluções na lousa e a explicar aos colegas o raciocínio empregado.

Uma análise preliminar das soluções escritas dos alunos apontou que cinco duplas chegaram à conclusão de que nenhuma das três afirmativas apresentadas no problema

(as afirmativas de Melissa, Álvaro e Júlio) estava correta. Em suas investigações, essas duplas utilizaram diferentes estratégias de resolução que abordavam dobraduras, recortes, malhas quadriculadas e cálculos. Outras três duplas realizaram cálculos e determinaram os valores corretos do perímetro e da área dos retângulos em questão, porém não chegaram a uma conclusão sobre qual dos personagens estava certo. Houve, ainda, uma dupla que, em decorrência de erros de cálculo, chegou a uma conclusão errônea. As outras duplas apresentaram erros relacionados à não compreensão do enunciado do problema e à confusão entre os conceitos de área e perímetro. Essa diversidade de estratégias de resolução foi apontada por Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015) como característica típica de problemas abertos. Apresentamos, na Figura 3, uma solução apresentada por uma das duplas que concluiu que nenhuma das três afirmativas apresentadas no problema estava correta.

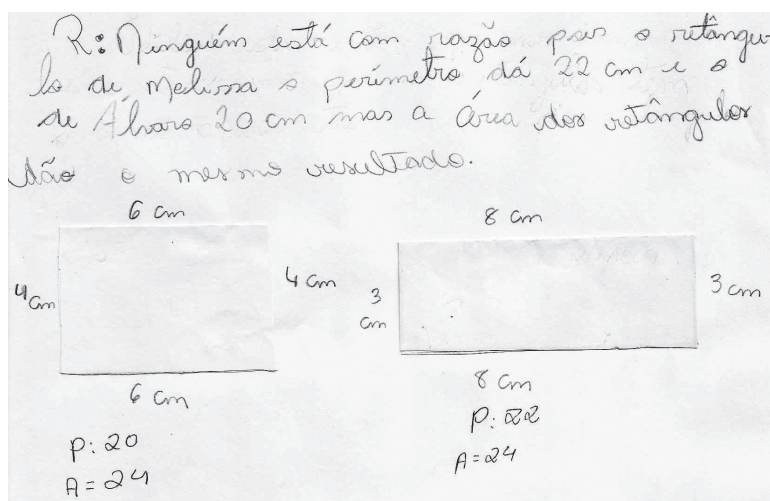


Figura 3. Resolução dos alunos

Na resolução do problema, esta dupla optou por reproduzir fisicamente os retângulos mencionados no problema (desenharam os retângulos com as medidas indicadas e, em seguida, os recortaram). Não encontraram dificuldades em reproduzir a forma como Melissa e Álvaro realizaram suas dobras. Representando a medida do perímetro por P e da área por A , chegaram à conclusão de que os retângulos apresentavam diferença quanto às medidas dos perímetros “o retângulo de Melissa o perímetro dá 22 cm e o de Álvaro 20 cm” e igualdade quanto às medidas das áreas “mas a área dos retângulos são o mesmo resultado”.⁵

Foi no momento de socialização e discussão dos resultados (sétima etapa do roteiro de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas), que percebemos o progresso dos alunos. De acordo com Allevato e Onuchic (2014), nesta etapa o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resolu-

ções de modo a aprimorar os processos de resolução e a apresentação (escrita) da solução. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) também descrevem o momento de socialização dos resultados como de crucial importância, pois, além de representar um balanço de todo o trabalho realizado, permite o surgimento de novas indagações, a reflexão sobre a investigação desenvolvida, a sistematização de novas ideias e o desenvolvimento da capacidade de se comunicar matematicamente. Apresentamos, a seguir, um trecho do diálogo entre os alunos da classe e o professor, acerca da resolução apresentada:

Aluno B: Nós pensamos assim: nós pegamos e medimos tudo. Daí nós calculamos o perímetro e a área de cada figura. Aí nós vimos que os perímetros deram diferentes e só o valor das áreas deu igual. Como eles afirmaram coisas diferentes nós chegamos à conclusão de que nenhum deles está certo. Nem o Álvaro, nem a Melissa e nem o Júlio.

Professor: Então vocês acham que ninguém está certo?

Aluno N: Eu também acho.

Professor: Por quê?

Aluno N: Porque o perímetro do Álvaro deu 20 e o perímetro da Melissa deu 22 e a área dos dois deu 24.

Aluno O: Professor, primeiro a gente tinha colocado que o Júlio estava certo. Daí a gente foi multiplicar e somar e chegamos a diferentes resultados. Então, ninguém está certo.

Aluno C: Professor, a gente falou que a Melissa estava certa porque ela afirmou que o perímetro dela era maior que o do Álvaro. A gente também colocou que o Júlio estava certo porque ele disse que os dois retângulos têm a mesma área.

O aluno *B* procura justificar sua conclusão descrevendo todo o caminho trilhado durante a resolução da atividade. O aluno *N* concorda com a justificativa do aluno *B*, acrescentando os resultados dos cálculos efetuados pela sua dupla. O aluno *O*, por sua vez, relata que, inicialmente, havia levantado a hipótese de que Júlio estava certo e, após tentar confirmar sua hipótese através da realização de cálculos, a refuta, chegando à conclusão de que nenhum dos três personagens estava correto. A explicação apresentada pelo aluno *O* revela que a investigação por ele empreendida permitiu a reformulação da hipótese inicial, demonstrando a passagem de uma concepção apoiada no conhecimento intuitivo para uma concepção referendada por um conhecimento mais próximo do conhecimento matemático formal. Neste mesmo diálogo, percebe-se, ainda, por parte do aluno *C*, a dificuldade em estabelecer comparações e determinar quem estava com a razão. A conclusão de que ninguém estava certo parece incomodar o aluno, que reluta em chegar a esse veredicto. A necessidade de indicar o nome de algum personagem em sua solução vem

reforçar o falso paradigma de que todo problema tem solução. De qualquer modo, esse conjunto de formulações, (re)formulações, refutações de hipóteses e justificativas foi proporcionado pela experiência matemática e reflexão sobre ela, conforme Veloso (1998).

Destacamos, também, o facto de que, mesmo sem um trabalho sistemático com exercícios de cálculo de perímetros e áreas, os alunos envolvidos nesse diálogo relacionaram corretamente o perímetro do retângulo com a medida de seu contorno, e a área do retângulo com a medida de sua superfície; e associaram o cálculo do perímetro com a adição das medidas dos lados, e o cálculo da área com a multiplicação das medidas de comprimento e largura do retângulo. Anteriormente os alunos haviam realizado uma atividade na qual determinavam o perímetro e área de retângulos através da contagem de quadrículas em uma malha quadriculada.

Para além da determinação das medidas de perímetro e área de regiões retangulares, julgamos que o problema proposto cumpriu seu papel como um elemento introdutório do conceito de que figuras com a mesma área não apresentam, necessariamente, o mesmo perímetro. Este pode ser um bom início para o estudo de figuras geométricas isoperimétricas e equivalentes.

Considerações Finais

A resolução de um problema aberto e as investigações que se sucederam possibilitaram uma abordagem diferente da usualmente adotada em sala de aula, favorecendo o surgimento de diferentes resoluções e encaminhamentos para os questionamentos propostos, respeitando os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos e permitindo diferentes abordagens para um mesmo conteúdo matemático.

Ressaltamos a importância do momento de socialização e discussão das estratégias empregadas na resolução e dos resultados obtidos. Problemas abertos, e as investigações que se sucedem, possibilitam um momento marcado por partilha de ideias, questionamentos, indagações, argumentações e refutações. A descoberta, pelos alunos, de uma variedade de estratégias e procedimentos plausíveis de serem aplicados à resolução do problema revela que os momentos de apresentação e discussão a respeito do que foi observado e produzido nas investigações mostram-se favoráveis à formação do pensamento matemático. Assim, percebemos que, além da produção de conhecimentos relacionados às grandezas geométricas perímetro e área, os alunos desenvolveram capacidades de argumentação e comunicação matemáticas enquanto buscavam validar seus resultados, corroborando a posição de Hintz (2014) que afirma que discussões matemáticas em sala de aula ajudam os alunos a desenvolver a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos.

Retomando os apontamentos colocados na introdução desse artigo, sobre o lugar que a resolução de problemas pode assumir no atual cenário educativo da Matemática, concluímos que o ensino de Matemática através da resolução de problemas abertos e as investigações deles decorrentes configuram-se como uma abordagem atual da resolução de

problemas e podem desempenhar a função de alavancar a aprendizagem dos alunos, e permitir que os alunos efetivamente compreendam a Matemática Escolar.

Notas

- 1 Avaliação Nacional do Rendimento Escolar — Anresc (também denominada “Prova Brasil”): trata-se de uma avaliação censitária envolvendo os alunos do 5.º ano e 9.º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, que tem o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas brasileiras. Participam desta avaliação as escolas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nos anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo (Brasil MEC, 2015).
- 2 A Educação Básica, no Brasil, constitui-se de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, tendo, o Ensino Fundamental duração de 9 anos.
- 3 A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação expressa uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, nessa metodologia a avaliação é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vista a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário (Allevato & Onuchic, 2009).
- 4 O leitor interessado pode encontrar um maior detalhamento dessas etapas em Allevato e Onuchic (2014).
- 5 A forma precária pela qual os alunos se expressam (erros ortográficos e de construção gramatical), apesar de relevante, não constitui o foco de nossa pesquisa, de modo que iremos nos concentrar nos aspectos matemáticos relacionados à resolução dos alunos.

Referências

- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM.
- Allevato, N. S. (2005). Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência (tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, Brasil.
- Allevato, N. S., & Ferreira, R. B. (2013). Leitura e Escrita na Aprendizagem Matemática Através da Resolução de Problemas. In A. M. Nacarato, & C. E. Lopes (Org.), *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática* (pp. 107–126). Campinas: Mercado das Letras.
- Allevato, N. S., & Onuchic, L. R. (2009). Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM*, 33 (55), 1–19.
- Allevato, N. S., & Onuchic, L. R. (2014). Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In L. R. Onuchic, N. S. Allevato, F. C. Nogueira, & A. M. Justulin (Org.), *Resolução de Problemas: teoria e prática* (pp. 35–52). Jundiaí: Paco Editorial.
- Bicudo, M. A. (2006). Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: M. C. Borba & J. L. Araújo (Org.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 101–114). Belo Horizonte: Autêntica.
- Branco, M. G. (2014). As tarefas de exploração e investigação na aprendizagem da geometria. *Educação e Matemática*, 126, 43–48.

- Brasil MEC (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática — 1.º e 2.º ciclos. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental.
- Brasil MEC (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática — 3.º e 4.º ciclos. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental.
- Brasil MEC (1999). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática — Ensino Médio. Brasília, DF: Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Brasil MEC (2006). Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2. Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica.
- Brasil INEP (2015). *Aneb e Anresc (Prova Brasil)*, recuperado em 24 setembro, 2015, de <http://prova-brasil.inep.gov.br>.
- Bustamante, J. G., Ribeiro, C. M., & Navarro, M. M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos. *Anais eletrônicos da Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 14. Chiapas, Mexico: CIAEM. Recuperado em 24 julho, 2015, de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem.
- Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? *Boletim GEPEM*, 60, 241–254.
- Contreras, L. C., & Carrillo, J. (1998). Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. *Educación Matemática*, 10 (1), 26–37.
- Hatfield, L. L. (1978). Heuristical Emphasis in the Instrution of Mathematical Problem Solving: rationales and research. In L. L. Hatfield, & D. A. Bradbard (Org.), *Mathematical Problem Solving: papers from a research workshop*. Columbus: ERIC.
- Hintz, A. B. (2014). Strengthening discussions. *Teaching Children Mathematics*, 20 (5), 318–324.
- Krulik, S., & Reys, R. E. (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (2005). *Problem Driven Mathematics: applying the Mathematics beyond solutions*. Chicago: McGraw-Hill.
- Lambdin, D. V., & Walcott, C. (2007). Changes Through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. In W. G. Martin (Ed.), *The Learning of Mathematics* (pp. 2–25). Reston: NCTM.
- Lester Jr., F. K. (2003). *Teaching Mathematics though Problem Solving: Prekindergarten — Grad 6*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Library of Congress Cataloguing.
- Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1999). Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Org.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 175–182). Lisboa: APM.
- Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In M. A. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 199–218). São Paulo: Editora UNESP.
- Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. (2010). O estado da arte da resolução de problemas. *Anais do Congresso Internacional de Ensino de Matemática 5*. Canoas: Ulbra.
- Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *BOLEMA*, 25 (41), 73–98.
- Pironel, M. (2002). *A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. Dissertação, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.
- Polya, G. (1944). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). Lisboa: APM.

- Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas de ProfMat 2003* (pp. 25–39). Santarém: APM.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Schoen, H. L. (2003). *Teaching Mathematics through Problem Solving. Grade 6–12*. Reston: NCTM.
- Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, 39, 537–551.
- Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In A. P. Shulte, *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31–42). Reston: NCTM.
- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as atividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, & H. Brunheira (Org.) *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69–85). Lisboa: APM.
- Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula* (6 ed.). Porto Alegre: Artmed.
- Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais: materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Vianna, H. M. (2003). *Pesquisa em educação: a observação*. Brasília: Plano Editora.
- Vieira, G., & Allevato, N. S. (2012). Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. In C. A. Santos, N. S. Allevato, L. H. Amaral, & E. Curi (Org.), *Ensino de ciências e matemática: a produção discente na pós-graduação* (pp. 29–47). São Paulo: Terracota.
- Willoughby, S. S. (2000). Perspectives on Mathematics Education. *Learning Mathematics for a New Century* (pp. 1–15). Reston, NCTM.
- Zeichner, K. M. (1998). Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In C. M. Galdi, D. Fiorentini, & E. M. Pereira (Org.), *Cartografia do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)* (pp. 207–236). Campinas: Mercado das Letras.

Resumo. Considerando-se o atual cenário de complexidade em que o contexto escolar está inserido e as demandas por um ensino de Matemática que permita aos alunos efetivamente compreenderem a Matemática que estudam, o presente artigo apresenta como alternativa uma perspectiva atual do trabalho com resolução de problemas nas aulas de Matemática. Nessa perspectiva, valorizam-se as investigações matemáticas decorrentes da proposição de problemas abertos. Com o objetivo de discutir as investigações realizadas pelos alunos a partir de problemas abertos e suas possibilidades para o ensino de Matemática são apresentados dados de uma pesquisa de campo de abordagem qualitativa realizada com alunos com idades entre 11 e 12 anos de uma escola pública brasileira. Os dados apresentados permitem concluir que o caráter aberto do problema proposto e a investigação que se sucedeu desempenharam um papel preponderante na emergência de diversas estratégias de resolução pelos alunos, respeitando os diferentes estilos de aprendizagem e possibilitando diferentes abordagens para um mesmo conteúdo matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução de Problemas. Problemas Abertos. Investigações Matemáticas.

Abstract. Considering the present complex scenario where the school context is inserted and the need for Mathematics teaching that will enable students to understand Mathematics effectively, the present article shows a present perspective of working on problem solving in Mathematics classes. In such perspective, the mathematical investigations from the proposition of open problems are valued. With the objective of discussing the investigations carried out by students from open problems and their possibilities for Mathematics teaching, data from a qualitative approach field research conducted with 11 and 12-year old students from a Brazilian public school are presented. Such data lead to the conclusion that the open character of the proposed problem and the further investigation played a very important role in the emergency of several strategies of solution by the students, respecting the different kinds of learning and favoring different approaches for the same mathematical content.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving. Open Problems. Mathematical Investigations.

■■■

NORMA ALLEVATO

Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil

normallev@gmail.com

GILBERTO VIEIRA

Prefeitura Municipal de São José dos Campos e

ETEP Faculdade de São José dos Campos, São Paulo, Brasil

gilbertoeducador@yahoo.com.br

(recebido em maio de 2015, aceite para publicação em outubro de 2015)