Análisis de las estrategias heurísticas y valoración del conocimiento intuitivo en la resolución de problemas del Concurso Canguro Matemático

Analysis of heuristic strategies and evaluation of intuitive knowledge in the problem solving of the Kangaroo Math Competition

Cristina Pecharromán Gómez
Universidad de Valladolid, España

Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid, España

Verónica San Miguel Pérez
Universidad de Valladolid, España

Introducción

El Concurso Canguro Matemático (CCM) es un concurso internacional que consiste en la resolución de 30 problemas en un tiempo máximo de 75 minutos. Estos problemas se presentan con cinco posibles respuestas y, de ellas, una y sólo una es correcta. Los concursantes deben marcar una sola respuesta y no pueden escribir ninguna justificación, aunque puedan hacer anotaciones en papel aparte (tampoco pueden usar calculadoras) y pueden no. Hay una prueba para cada uno de los seis niveles de educación secundaria. Cada prueba está organizada en tres bloques con orden creciente de dificultad. Cada bloque tiene diez problemas y cada problema se valora positivamente con una determinada puntuación y una penalización si la respuesta es incorrecta. Estos problemas son propuestos por una comisión internacional de profesores vinculados a *Le Kangourou sans Frontières* (KSF) y no pretende evaluar conocimientos curriculares, sino capacidad de razonamiento y el uso de estrategias para resolver problemas que involucran conocimiento matemático de cursos previos. Este tipo de problemas se ajusta a lo que Kantowski (1977) denomina ejercicios y a la primera acepción de Schoenfeld (1992). Su resolución es inmediata, ya que o bien se aplican modelos muy básicos o estrategias muy básicas (conteo, ensayos, tanteos, repartos, …). En Castilla y León, este concurso tiene gran aceptación. Los datos de participación (www.canguromat.org.es) muestran que la participación por cursos disminuye a medida que aumenta el nivel académico, especialmente en los cursos de bachillerato.

Los objetivos principales de esta investigación son dos: por una parte, se valora los contenidos matemáticos presentes en los enunciados de los problemas del CCM de 1.º y 2.º de Educación Secundaria Obligatoria ESO, entre los años 2007 y 2012, con el referente de la Ley Orgánica de Educación (LOE); por otra parte, se analiza la actuación de los alumnos de 1.º ESO en la resolución de una selección de problemas del concurso. En concreto, se pretende analizar el uso de estrategias heurísticas, y observar y categorizar el conocimiento intuitivo que se desarrolla para la resolución de dichos problemas, bajo el marco teórico que propone Fischbein (1987). Stavy y Tirosh (2000) creen que los estudiantes reaccionan de forma similar en una amplia variedad de tareas matemáticas y científicas que no tienen relación matemática alguna y estas mismas autoras en 2004 argumentan que aplican las mismas estrategias resolutorias.

Para el desarrollo de la investigación, se elabora un marco teórico en el que se caracteriza la resolución de problemas, se pone de manifiesto la importancia del uso de estrategias heurísticas para la resolución de problemas, como la estrategia de visualización, y se caracteriza el conocimiento intuitivo que puede desarrollar el alumno desde su experiencia y conocimiento previo.

Se trata de una investigación educativa experimental que se desarrolla con un grupo de alumnos de 1.º ESO. A estos alumnos se les implementa un cuestionario elaborado con problemas seleccionados de las pruebas del CCM con el objetivo de caracterizar el desempeño de los alumnos en su resolución.

Finalmente, entre las conclusiones de la investigación destacamos la necesidad de una docencia que aborde la enseñanza y ejemplificación de estrategias de resolución o heurísticas, ya que, al no haber recibido una docencia específica con esta orientación, no son muchos los alumnos que ponen en práctica alguna estrategia heurística.

Antecedentes y marco teórico

En este apartado, se presentan ideas de investigaciones previas que caracterizan la resolución de problemas, el uso de estrategias heurísticas y el desarrollo de conocimiento intuitivo en la resolución de problemas.

Para Kantowski (1977) un problema no se resuelve de forma evidente y requiere el uso de información no rutinaria y cierto nivel de razonamiento, pero para resolver un ejercicio sólo se necesita usar datos recordados o aplicar directamente un algoritmo conocido, sin más procesos de razonamiento. Schoenfeld (1992) identifica varias concepciones de resolución de problemas según sus usos, entre ellos preparar a los alumnos para competiciones y, de forma general, considera dos definiciones del término problema: una, como algo que requiere el uso de las matemáticas y, otra, resolver una cuestión matemática que es confusa o difícil. Polya (1990) indica que aunque el objetivo está claramente definido, el método de solución no es inmediatamente accesible. Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) señalan que un problema presenta un bloqueo inicial, y desde la aceptación del problema, el método de resolución se basa en la exploración de estrategias de actuación.

La resolución de problemas es uno de los estándares curriculares del *National Council of teachers of Mathemáticas* (NCTM) y, sin duda, su publicación (NCTM, 1991) ha reforzado el interés como contenido curricular y como campo de investigación.

El currículo de Educación Secundaria Obligatoria de Castilla y León (2007) contempla entre sus objetivos la resolución de problemas, no sólo desde el uso de contenidos matemáticos, sino también para el desarrollo de estrategias de actuación ante los problemas. La resolución de problemas y el uso de estrategias heurísticas específicas se encuentran en el bloque de contenidos comunes del currículo de todos los cursos. Por ejemplo, en 1.º ESO se mencionan estrategias básicas como el análisis del enunciado y comprobación de la solución obtenida, pero en 2.º ESO, además, se consideran estrategias heurísticas específicas como el ensayo y error o la descomposición del problema en partes.

La importancia de la resolución de problemas también se manifiesta en las pruebas para la evaluación de la competencia matemática (PISA o pruebas de diagnóstico), en las que principalmente se propone resolver problemas de la vida cotidiana. Asimismo, la existencia de alguna actividad o concurso como el "Canguro Matemático", proporciona una orientación para que tanto alumnos como profesores se den cuenta de que es necesario conocer estrategias heurísticas de resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en este ámbito. Además del Canguro Matemático, en España, la Federación de Profesores de Matemáticas organiza dos "olimpiadas matemáticas": una en la ESO, que trata de despertar en los alumnos interés por la matemática, y, otra, de carácter internacional, en Bachillerato. El proyecto Problem@Web de Portugal tiene como objetivo la resolución de problemas de matemáticas mediante competiciones on line; participan alumnos de 10 a 12 años en un nivel y de 12 a 14 en otro. A nivel internacional destacan las 20 comunicaciones presentadas en el *Topic Study Group* 15 "*Problem solving in mathematics education*" del pasado ICME 12 que se celebró en Seul. Por otra parte, la Federación Mundial de Matemáticas Nacionales Competiciones publica una revista que contiene artículos sobre competiciones reales, resultados de competiciones, y artículos matemáticos e históricos de utilidad para los académicos y profesores de todo el mundo interesados en competiciones matemáticas y resolución de problemas. En España se han publicado numerosos trabajos sobre resolución de problemas (Almeida, Bruno & Perdomo-Díaz, 2014; Fernández Verdú, Callejo de la Vega, & Márquez Torres, 2014; Gascón Chavarri, 2014), entre otros, pero se ocupan de temas diferentes (estudiantes del Grado de Matemáticas, estudiantes para maestro, y estrategias de aprendizaje y resolución en ESO) y su orientación es completamente diferente.

Algunas estrategias heurísticas específicas que proponen Polya (1990) y Arthur (2009) para resolver problemas son: dibujar figuras o diagramas; ensayo-error; generalizar; particularizar; razonamiento regresivo desde la suposición del problema resuelto; inducción matemática; reducción al absurdo; analogía, utilización de la simetría, … Dado el gran número de herramientas heurísticas, surge el problema de elegir la mejor estrategia para cada problema. Esta investigación se desarrolla en el nivel de 1.º ESO, en el que principalmente se ponen en práctica o se necesitan estrategias específicas básicas como el ensayo-error y la visualización, pero no se requiere aplicar ningún modelo específico de resolución.

Dada la influencia de la visualización en la resolución de problemas, se comentan algunas características de este proceso cognitivo. Según Presmeg (2006), la visualización incluye procesos de construcción y transformación de imágenes mentales y representaciones espaciales implicadas en la actividad matemática. Esta caracterización incluye la interpretación de información figurativa y el procesamiento visual (conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y proceso de transformación de imágenes visuales), conceptos introducidos por Bishop (1983). Una imagen visual es una representación mental que describe información visual o espacial. Presmeg (1986) ofrece una clasificación de las imágenes visuales: imágenes concretas (imágenes de objetos físicos), imágenes cinéticas (incluyen movimiento físico o gestual), imagen dinámica (la propia imagen se mueve o transforma), imágenes de fórmulas, imágenes de patrones (interpretación esquemática, carente de detalles, del significado de contenido abstracto, no figurativo, relacional, …). La propia Presmeg señala que en matemáticas la eficacia de las imágenes visuales se observa cuando van acompañadas de procesos analíticos. Esto es algo que se pone de manifiesto constantemente en la resolución de problemas, la visualización se presenta como medio que conduce a la resolución del problema. Consideramos que la interpretación visual de los enunciados de problemas facilita la resolución del problema y, sobre todo, la comprensión del enunciado. La visualización es un proceso cognitivo que orienta la elección de la estrategias de resolución del problema, o proporciona en sí mismo una estrategia.

La resolución de problemas es un espacio favorable para el desarrollo de conocimiento intuitivo que pasa a formar parte del proceso de resolución del problema, pues unas veces justifica la elección de la estrategia de resolución y, otras, reinterpreta los resultados obtenidos tras un procedimiento matemático. Fichbein (1987) considera a la intuición como un tipo de conocimiento evidente y cierto para el individuo. El conocimiento intuitivo abarca interpretaciones o representaciones que elabora el individuo desde su evidencia y certeza, sin necesidad de una demostración analítica o una prueba empírica. La fuente principal del conocimiento intuitivo es la experiencia. Entre las características del conocimiento intuitivo que propone este autor mencionamos las que hemos utilizado para reconocer el conocimiento intuitivo que desarrolla el alumno en la resolución del problema: *evidencia*, que surge de la interpretación que el alumno hace del enunciado desde su conocimiento o experiencia previa; *certeza*, que en nuestro caso no viene dada por una fuente extrínseca (profesor, demostración, …), sino que consideramos que es el conocimiento previo del individuo que da un grado de certidumbre al conocimiento intuitivo desarrollado; *coerción*, porque el conocimiento intuitivo dirige el razonamiento del individuo y, consecuentemente, la elección de la estrategia de resolución, además es conocimiento que prevalece frente al conocimiento formal; *globalidad*, en el sentido de que el conocimiento intuitivo desarrollado se corresponde con la interpretación inicial y global del problema. Además, mencionamos dos mecanismos en el proceso de generación de intuiciones que ayudan a reconocer este conocimiento: *la clausura prematura*, desde el momento que la información desarrollada es aparentemente cierta e intrínsecamente consistente; y *el efecto de primacía*, el individuo tiende a optar por las primeras interpretaciones y evitar interpretaciones alternativas que pueden atentar contra el equilibrio del conocimiento.

Para la interpretación y clasificación del conocimiento intuitivo que observamos que desarrolla el alumno, elegimos una de las clasificaciones del conocimiento intuitivo que propone Fischbein (1987):

Intuiciones de afirmación, que son representaciones o interpretaciones de ciertos hechos aceptadas como ciertas, evidentes por sí mismas y consistentes. En nuestro caso, consideraremos intuición de afirmación a la idea o creencia que manifiesta el alumno, dotada de las características anteriores, y que justifica la elección de su respuesta (entre las cinco posibles), pero no hay un análisis o procedimiento matemático posterior que refuerce esta elección.

Intuiciones conjeturales, que están asociadas a la sensación de certitud sobre hechos futuros. Las intuiciones conjeturales son más o menos evaluaciones y predicciones generalmente no incluidas en una actividad sistemática de resolución. Consideramos esta intuición cuando la respuesta del problema no procede ni de la interpretación del enunciado, ni de un análisis o proceso matemático de resolución, sino de una catalogación o evaluación del tipo de problema.

Intuiciones de anticipación, que también son conjeturas pero que pertenecen explícitamente a la resolución de problemas. Una intuición de anticipación es la visión preliminar de la solución a un problema, que precede al análisis y al desarrollo completo del mismo. No todas las hipótesis son intuiciones, solamente aquellas que se asocien desde el inicio con alguna sensación de certeza o evidencia. Una intuición de anticipación es una solución preliminar a un problema específico, mientras que una intuición de afirmación representa una actitud cognitiva estable respecto a una situación más común y general. En nuestro caso, consideraremos intuición de anticipación a la idea o creencia que manifiesta el alumno, que justifica un análisis o procedimiento matemático explícito del que se extrae la respuesta del problema, y que está dotada de las características de conocimiento intuitivo mencionadas.

Intuiciones de conclusión, que resumen, de forma global y estructurada, las ideas esenciales de la solución de un problema previamente resuelto. Esto añade a la construcción formal y analítica una sensación de certeza directa e intrínseca. En nuestro caso, consideraremos intuición de conclusión a la reinterpretación del dato obtenido tras un análisis o procedimiento matemático de resolución del problema, dotada de las características de conocimiento intuitivo que propone Fischbein (1987).

Aunque en nuestro caso consideramos exclusivamente el modelo de Fichsbein (1987), evidentemente hay otros autores que se ocupan de modelos intuitivos. Así Stavy y Tirosh, (2000) y Tirosh, Stavy y Tsamir (2001) encontraron que los estudiantes reaccionan de manera similar y aplican las mismas reglas intuitivas en una amplia variedad de tareas matemática y científicas que, sin estar relacionadas conceptualmente, tienen algunas características externas comunes. Más reciente es el trabajo de Dane y Prat (2007), que revisan el concepto de intuición y relacionan características de las tareas con la eficacia de la intuición.

La producción de modelos es una forma de desarrollar conocimiento intuitivo. Según Fischbein (1987) si una noción no es representable intuitivamente se tiende a producir un modelo que pueda reemplazar dicha noción en el proceso de razonamiento por un modelo intuitivo. El modelo es un puente entre lo intelectualmente inaccesible y lo intelectualmente aceptable y manipulable. El autor considera modelos que están en relación de analogía con el original y distingue los *paradigmáticos*, en los que el modelo es una subclase de una categoría de entidades a la que pertenece el original (puede ser un ejemplo que sea representativo; es decir, que inspire el significado, las relaciones, los usos, …, del original), y los *analógicos*, cuando el modelo y el original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos, aunque con un grupo de propiedades estructurales comunes. Finalmente, el autor considera modelos *diagramáticos* o representaciones gráficas de relaciones o procesos. Un diagrama ofrece una representación sinóptica y global de una estructura o proceso que contribuye a su comprensión. Para Fischbein (1987), no toda representación visual proporciona conocimiento intuitivo. Para ello, la imagen debe ser una representación dinámica. Es decir, además de ser representaciones que ofrecen evidencia, inmediatez (la realidad es directamente percibida) y globalidad, deben guiar el desarrollo analítico hacia la solución.

Objetivos

Las ideas expuestas en el apartado anterior, nuestra experiencia docente y el carácter de los problemas con los que trabajamos en esta investigación, nos llevan a formular los siguientes objetivos específicos de la investigación:

O1. Analizar los contenidos matemáticos curriculares presentes en los enunciados de los problemas del CCM de 1.º y 2.º ESO, entre los años 2007 y 2012, con el referente del currículo LOE.

O2. Observar la necesidad del uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas del CCM en los cursos de 1.º y 2.º ESO.

O3. Analizar y valorar el uso de estrategias heurísticas en la resolución de los problemas del CCM, en concreto, las estrategias específicas de visualización y ensayo-error.

O4. Analizar y clasificar el conocimiento intuitivo presente en las respuestas de los alumnos.

Marco metodológico

El estudio que aquí se presenta es una investigación educativa de carácter cualitativo. Para su desarrollo se ha utilizado como referente el marco metodológico cualitativo conocido como estudio de casos. Desde que Stake creara esta metodología (Stake, 1998) han sido muchos los autores que han escrito sobre ella y la han aplicado. Así, Coller Porta (2005) tras una reseña histórica presenta numerosos ejemplos en los que se aplica esta metodología; Mendoza-Núñez (2006) realiza una interpretación cognitiva de la obra de Stake; Simone (2011) escribe sobre el concepto, diseño de investigación análisis de resultados y generalizaciones; Wassermann (1994), y Donoso-Vázquez y Sánchez-Martí (2013) utilizan el estudio de casos como metodología de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, para nosotros es insuperable el artículo de Stake (2005) y de los tres tipos de casos que considera (intrínseco, instrumental y colectivo) el aquí tratado se ajusta al caso instrumental. A continuación se describe el caso de estudio, pero el desarrollo de la investigación que aquí se describe propiciará la comprensión del mismo.

En primer lugar, de la página www.canguromat.org.es se descargan las pruebas del CCM de 1.º y 2.º ESO, entre los años 2007-2012, ambos incluidos, para el análisis del contenido matemático presente en los problemas de dichas pruebas.

En segundo lugar, se llevó a cabo una experimentación con un grupo de 48 alumnos que se presentaron al concurso del CCM. El objetivo de esta exploración era obtener información sobre las opiniones de estos alumnos sobre el propio concurso (grado de motivación, preparación previa, dificultades encontradas en el desarrollo, relación con contenidos estudiados, satisfacción). Para tal fin se elaboró un cuestionario que fue cumplimentado por estos alumnos. Su contenido y el análisis correspondiente se presentan después.

Finalmente, con intención de valorar el conocimiento intuitivo y uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas se elaboró y se pasó un cuestionario a un grupo natural de 38 alumnos de 1.º ESO. Este cuestionario tenía 12 problemas del CCM para que lo resolvieran durante 50 minutos. Estos alumnos, que eran todos los integrantes de 1.º de ESO, no tenían instrucción previa sobre resolución de problemas y uso de estrategias heurísticas. Pertenecían a un centro de secundaria donde la mayoría de los padres tenían alta formación y estaban muy interesados por los aprendizajes de sus hijos. Se pidió a los alumnos que escribiesen sus ideas y/o proceso seguido hasta la elección de una de las cinco posibles soluciones del problema, para poder luego evaluar estos procesos y valorar la presencia de conocimiento intuitivo. La prueba elaborada está dividida en tres bloques presentados en orden creciente de dificultad, de forma similar a las pruebas del CCM. Cada bloque consta de cuatro preguntas seleccionadas entre los bloques correspondientes de las pruebas del CCM desde 2007 hasta 2012. El único criterio que se utilizó para la selección de los problemas fue el de abarcar los bloques de contenido del currículo de acuerdo con los porcentajes de presencia de los contenidos que se ha observado en el análisis del contenido de las pruebas del CCM. Los problemas de esta prueba también se presentan junto con el análisis de los datos obtenidos de cada problema.

Contenidos matemáticos en las pruebas Canguro Matemático

En este apartado, se analizan los contenidos curriculares presentes en la prueba del CCM de 1.º y 2.º ESO, entre los años 2007 y 2012. También se observa si es necesario el uso de alguna estrategia heurística específica para resolver el problema.

Se consideran los seis bloques de contenido del currículo: contenidos comunes (B1), números (B2), álgebra (B3), geometría (B4), funciones y gráficas (B5), y estadística y probabilidad (B6). Los contenidos fuera del currículo oficial en el curso correspondiente los denominamos (FC), y si la resolución del problema requiere del uso de una estrategia heurística específica se señala con las siglas (EH).

La tabla 1 presenta una clasificación del contenido matemático presente en los problemas de las pruebas del CCM entre los años 2007 y 2012 para el curso de 1º ESO.

Tabla 1. Clasificación de los contenidos de las pruebas del CCM en 1.º ESO entre los años 2007 y 2012

AÑO	% B1	% B2	% B3	% B4	% B5	% B6	% FC	% EH
2007	33,33	26,67	0	26,67	0	0	13,33	13,33
2008	50	46,67	3,33	16,67	0	0	3,33	10
2009	50	36,67	0	20	0	0	10	6,67
2010	56,67	30	0	13,33	0	0	3,33	10
2011	66,67	26,67	3,33	13,33	0	0	6,67	20
2012	36,67	33,33	6,67	23,33	0	0	3,33	13,33
Totales	48,89%	33,34%	2,22%	18,89%	0%	0 %	6,67%	12,22%

Se observa que los contenidos del bloque de álgebra son reducidos. De hecho, en algunas pruebas no hay preguntas asociadas a este bloque de contenidos. Esto puede ser porque los contenidos curriculares de 1.º de ESO en álgebra son muy escasos y principalmente introductorios.

Los bloques de contenido de funciones y gráficas y estadística y probabilidad, en general, no aparecen en las pruebas. Sólo están presentes en una de las 180 preguntas analizadas y, en este caso, además, son contenidos fuera de currículo del curso correspondiente. Esto puede deberse a que la prueba se realiza en el mes de marzo de cada año, antes de que haya habido tiempo a enseñar estos contenidos, según la secuenciación curricular y la que contemplan los libros de texto.

El porcentaje de preguntas que requieren de una estrategia heurística específica (ensayo-error, dibujo diagramas) para su resolución es reducido, aunque no despreciable. Por el contrario, un importante porcentaje de ellas, cerca del 50%, requiere de la utilización de contenidos comunes (B1), entre los que se encuentran las estrategias heurísticas básicas (interpretación enunciados, comprobación solución, perseverancia y flexibilidad, …).

La mayoría de los contenidos fuera de currículo corresponden al bloque de contenidos de geometría (figuras en el espacio), aunque hay una pregunta que es del bloque de estadística y probabilidad (medidas de centralización). Estos contenidos suelen estar contemplados en los libros de texto de dicho curso, sin embargo, atendiendo a la temporalización usual de los contenidos en la programación, son contenidos que todavía no se han desarrollado en la fecha de realización de la prueba del CCM. Los organizadores de las pruebas entenderán que son contenidos que pueden tener un aprendizaje o un reconocimiento no formal a través de la experiencia, intuición o el razonamiento del individuo, o incluso pueden ser contenidos que forman parte del conocimiento del alumno por haber sido aprendidos en primaria.

La tabla 2 presenta una clasificación del contenido matemático de los problemas de las pruebas del CCM entre los años 2007 y 2012 para el curso de 2.º ESO.

Tabla 2. Clasificación de los contenidos de las pruebas del CCM en 2.º ESO entre los años 2007 y 2012

AÑO	% B1	% B2	% B3	% B4	% B5	% B6	% FC	% EH
2007	26,67	50	10	23,33	0	0	0	10
2008	36,67	33,33	6,67	33,33	0	0	0	10
2009	46,67	26,67	3,33	26,67	0	0	3,33	6,67
2010	43,33	43,33	10	13,33	0	0	3,33	10
2011	40	33,33	0	23,33	0	0	3,33	6,67
2012	30	43,33	10	20	0	0	0	16,67
Totales	27,22%	38,33%	6,67%	23,33%	0%	0%	1,66%	10%

Al igual que en 1. º ESO, se observa que los contenidos del bloque de álgebra son pocos. Predominan los contenidos relativos al bloque de números y geometría.

Aparecen contenidos fuera de currículo, pero el alumno debe conocerlos, porque son contenidos que aparecen en el currículo en el curso de 1.º ESO: sistemas de numeración. También aparece una pregunta relativa al bloque de funciones y gráfica que corresponde a contenidos impartidos en 1.º ESO (coordenadas cartesianas), luego, el alumno no debiera tener dificultades en resolverla.

El número de preguntas que necesita del uso de una estrategia heurística específica para su resolución es reducido, en cambio, es elevado el número de preguntas que necesitan de estrategias generales o básicas.

En ambos cursos se observa que la distribución de contenidos no varía demasiado, en los años analizados. En 1.º ESO predominan los contenidos del bloque de contenidos comunes y en 2.º ESO predominan las preguntas del bloque de números.

En ambos niveles se observa que las preguntas que tienen asociada mayor dificultad corresponden a aquellas que, además de necesitar de un contenido específico, necesitan del desarrollo de una estrategia heurística para su resolución.

Análisis de resultados de cuestionario de opinión sobre el CCM

La tabla 3 resume los datos obtenidos en el cuestionario de opinión de alumnos participantes en el CCM, sobre dicho concurso:

Tabla 3. Resumen de la valoración del CCM por alumnos participantes

Pregunta	Nada	Poco	Bastante	Mucho
Las preguntas que han aparecido en el concurso están relacionadas con temas que se ven en mi curso en clase.	5,36%	41,07%	46,43%	7,14%
Participar en el Canguro me ayuda a mejorar en matemáticas.	7,14%	50%	35,71%	7,14%
El concurso del Canguro me parece fácil.	23,21%	50%	23,21%	3,57%
Antes del concurso, he estudiado por mi cuenta para hacerlo mejor.	39,29%	46,43%	8,99%	5,36%
En mi centro se nos anima a participar en el concurso.	3,57%	14,29%	64,29%	17,86%
Me siento satisfecho con mi última participación en el concurso.	7,14%	33,99%	46,43%	12,5%

Resulta sorprendente que más un 40% de los encuestados considere que las preguntas del concurso están poco relacionadas con los contenidos que se ven en clase cuando, como hemos visto al analizar las pruebas, la relación directa con contenidos curriculares se da en casi la totalidad de las preguntas. Esto puede ser porque los contenidos curriculares que se necesitan forman parte del conocimiento previo arraigado del alumno y no son contenidos recién aprendidos en el curso. También ocurre que los problemas propuestos en el CCM no se asocian directamente con un concepto matemático, como ocurre usualmente en la práctica del aula, sino que muchas veces requieren del uso de estrategias heurísticas o combinación de varios conceptos o procedimientos matemáticos para su resolución.

También es llamativo el alto porcentaje que considera que el concurso es nada o poco fácil. Esto nos lleva a preguntarnos, ¿por qué la prueba les resulta tan complicada?. Creemos que la presencia de preguntas que requieren la utilización de una estrategia heurística específica puede ser una causa. Es decir, en general, no son ejercicios o problemas a los que están acostumbrados en el aula, en los que identifican de inmediato el concepto o procedimiento (modelo) matemático a utilizar y, en ellos, no suele ser necesario el uso de estrategias heurísticas específicas. Este tipo de estrategias no es usual que se enseñen o practiquen en el aula. Además, se requiere experiencia y práctica para llegar a dominarlas. Por tanto, el alumno encuentra dificultades en la resolución de los problemas del CCM por su desconocimiento de estrategias heurísticas de resolución de problemas que le permitan utilizar su conocimiento para resolver los problemas.

Los datos también ponen de manifiesto que los problemas del CCM son una forma de presentar conocimiento matemático que resulta novedosa para muchos alumnos y, por tanto, les resulta enriquecedor, porque les obliga a razonar, descubren otra forma de utilizar su conocimiento matemático y les permite reconocer su falta de práctica en la resolución de problemas. Otros alumnos opinan que este concurso no les ayuda en su formación matemática, quizá porque no reconocen la presencia del contenido matemático ni las habilidades que éste implica.

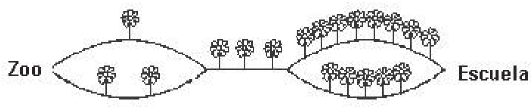
Análisis de datos del cuestionario de resolución de problemas del CCM

Los resultados de este cuestionario se presentan por problema, siguiendo el orden en el que aparecen en el cuestionario. Aunque se dijo a los alumnos que justificasen sus respuestas, no todos lo hicieron, por tanto, muchas de estas respuestas pueden ser respuestas al azar. Además, nos interesa observar el uso de estrategias heurísticas específicas, en concreto las estrategias de ensayo-error y visualización, y valorar la eficacia de este uso. Por tanto, el análisis de datos se realiza presentando el porcentaje de respuestas correctas (RC) y de respuestas incorrectas (RI) según la estrategia utilizada en la resolución del problema y según su ausencia de justificación. También se presentan los porcentajes totales de RC, RI y el porcentaje de respuestas no contestadas (NC). A estos datos les acompañará una reflexión que valora el uso de las estrategias heurísticas y el conocimiento intuitivo que se observa desarrollan los alumnos en sus respuestas a partir del enunciado del problema. Dado que los problemas no son muy elaborados, el conocimiento intuitivo, sobre todo, se observará entre las respuestas incorrectas justificadas. Es decir, se van a poder interpretar los errores desde el conocimiento intuitivo desarrollado. Se observa que los alumnos que responden bien y justifican sus respuestas hacen razonamientos directos o cálculos precisos, manifiestan un adecuado conocimiento matemático. No se ha observado que las respuestas correctas y justificadas tengan lugar a través del desarrollo de conocimiento intuitivo aunque, sin lugar a duda, está presente, ya que éste conocimiento está asociado a las operaciones básicas, las relaciones que establecen entre lo que perciben y lo que conocen, y en utilizar lo que conocen para ordenar, manipular, transformar, …, lo que percibe. A priori, nos plateamos buscar o identificar el conocimiento intuitivo a través de la pregunta, ¿qué conocimiento (conceptual, procedimental) asocia el alumno al enunciado?. Este conocimiento intuitivo se clasificará y caracterizará según el marco teórico que proporciona la obra de Fischbein (1987).

Problema 1

El Canguro va directamente del zoológico a la escuela. Cuenta todas las flores que encuentra en su camino. ¿Cuál de los números siguientes NO puede ser la cantidad de flores que puede encontrar?

A) 9 B) 10 C)11 D) 12 E) 13



Canguro Matemático 2010. Pregunta n.º 3 del nivel 1

Tabla 4. Análisis respuestas problema 1

Estrategia resolución	RC %	RI %	NC %
Ensayo/Error	21,05	7,89	0
Visualización + Ensayo/Error	10,52	0	0
Interpretación y explicación verbal	0	26,31	0
Sin justificar	18,42	15,79	0
Totales (%)	50	50	0

Sobre la estrategia de resolución

Se observa que algunos alumnos optan por el uso de una estrategia específica de resolución y, en la mayoría de estos casos, se llega a la solución correcta del problema. Todos los alumnos que optan por la estrategia de visualización resuelven bien el ejercicio.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Ninguna de las opciones de respuesta que ofrece el problema: no se interpreta bien el enunciado. Se cuenta la totalidad de las flores de los tramos, que son 19. Es posible que haya una focalización en una parte del enunciado "Cuenta todas las flores..." (2 alumnos).

Elige la cantidad más pequeña de entre las respuestas dadas: no prueban caminos ni cuentan flores. El alumno observa que hay bastantes flores luego es "evidente" que de las posibles respuestas no ocurra la de menor cantidad (por descarte). Se trataría de una intuición de afirmación porque no hay un posterior análisis del problema, se trata de un conocimiento que surge tras la lectura del enunciado (5 alumnos).

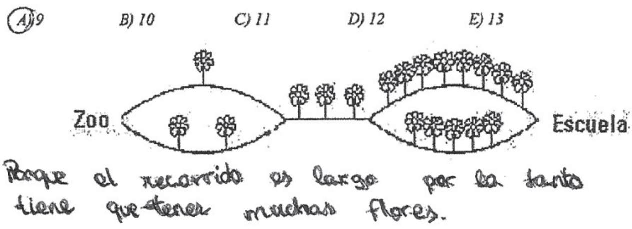


Imagen 1. Intuición afirmación — Respuesta del alumno 21

Elige la cantidad más grande: no se prueban caminos ni cuentan flores. El alumno tiene un planteamiento acumulativo. Para él es evidente que llegado a una cifra, se llega a las anteriores. Entonces, procediendo por descarte, al que no se llegará es al número mayor que ofrece las respuestas. Se trataría de una intuición de afirmación porque no hay un posterior análisis del problema, se trata de un conocimiento que surge tras la lectura del enunciado (1 alumno).

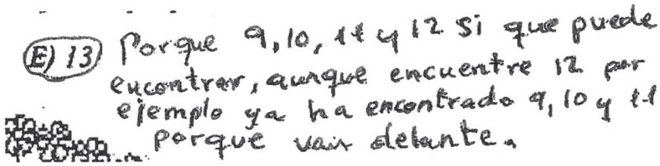


Imagen 2. Intuición afirmación — Respuesta del alumno 30

Problema 2

Se tienen tres cajas, una blanca, otra verde y la tercera roja. Una de ellas contiene una barra de chocolate, otra una manzana y la última está vacía. Se sabe que la barra de chocolate está en la caja blanca o en la roja, y que la manzana no está ni en la blanca ni en la verde. La caja donde está el chocolate es:

A) Blanca B) Roja C) Verde D) Roja o Verde E) imposible saberlo

Canguro Matemático 2009. Pregunta n.º 5 del nivel 1

Tabla 5. Análisis respuestas problema 2

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización	10,52	2,63	0
Interpretación y explicación verbal	34,21	18,42	0
Sin justificar	10,52	23,68	0
Totales (%)	55,26	44,73	0

Sobre la estrategia de resolución

Son pocos alumnos los que optan por una estrategia de visualización, aunque resulta efectiva. Realizan un esquema que recoge los datos del enunciado y le utilizan para interpretar dicho enunciado. En general, la mayoría de los alumnos optan por una interpretación y explicación verbal del problema.

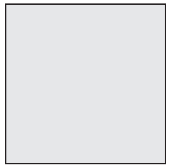
Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Mala lectura o interpretación del enunciado (3 alumnos) — Intuición de afirmación. Focalización en parte del enunciado y omisión del resto o falta de comprensión del resto del enunciado: "*la barra de chocolate está en la caja blanca o en la roja*". Se indica que es imposible saberlo porque el chocolate puede estar en la caja blanca y en la roja (3 alumnos) — Intuición conjetural.

Problema 3

Un cuadrado de papel se corta en dos partes, mediante un único corte recto. ¿Cuál de las siguientes no puede ser la forma de ninguna de las dos piezas en que se ha dividido el cuadrado?

A) Cuadrado B) Rectángulo C) Triángulo rectángulo
D) Pentágono E) Triángulo isósceles



Canguro Matemático 2011. Pregunta nº 3 del nivel 1

Tabla 6. Análisis respuestas problema 3

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización + Ensayo/Error	26,31	13,15	0
Interpretación y explicación verbal	2,63	10,52	0
Sin justificar	15,79	31,57	0
Totales	44,73	55,26	0

Sobre la estrategia de resolución

Algunos alumnos optan por una estrategia de visualización, aunque no siempre resulta efectiva debido a que no hay un análisis visual completo de las posibilidades que ofrece el enunciado. Bastantes alumnos optan por la interpretación y explicación verbal del problema.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Se presentan varias respuestas, incluida la del cuadrado. El alumno prueba o visualiza algunas posibilidades, pero no todas. Análisis insuficiente de la figura y las posibilidades (3 alumnos), a lo que hemos llamado Intuición de anticipación.

Respuesta-Pentágono: No se acepta que pueda surgir una figura de más lados que el cuadrado al realizar un sólo corte (3 alumnos). Se trata de una intuición de afirmación porque no motiva ningún análisis que confirme esta idea.

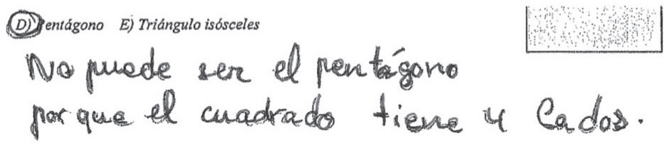


Imagen 3. Intuición afirmación —Respuesta del alumno 24

Respuesta-Triángulo isósceles: El alumno afirma que de una figura regular, como es el cuadrado, no se puede obtener dos triángulos irregulares. Es una intuición de afirmación, porque no está asociada a ningún análisis posterior. Además se observa otro error: el alumno no sabe lo que son triángulos isósceles (2 alumnos). Otro alumno afirma que no se puede obtener un triángulo isósceles con un solo corte. Aquí se ha producido un mal análisis o un insuficiente análisis motivado por la tendencia a la clausura prematura.

Problema 4

La abuela de Víctor y Miguel les ha dado manzanas y peras para que las lleven a casa. En total son 25 piezas de fruta. En el camino, Víctor se come 1 manzana y 3 peras, y Miguel 3 manzanas y 2 peras. Al llegar observan que llevan tantas peras como manzanas. ¿Cuántas peras les dio la abuela?

A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

Canguro Matemático 2012. Pregunta nº 8 del nivel 1

Tabla 7. Análisis respuestas problema 4.

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Cálculo numérico	23,68	44,73	0
Sin justificar	10,52	18,42	0
Totales (%)	34,21	63,15	2,63

Sobre la estrategia de resolución

No se observa el uso de una estrategia específica de resolución. Se lleva a cabo un cálculo numérico derivado de la interpretación que hace cada alumno del enunciado.

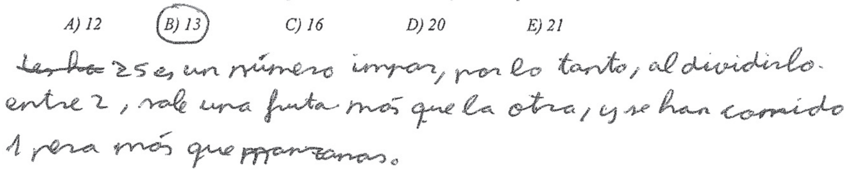
Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta 8 (no está entre las posibles): Cálculo incompleto derivado de una lectura incompleta o parcial del enunciado — Focalización en una parte del enunciado: "*llevan tantas peras como manzanas*" (5 alumnos). Intuición de afirmación.

Respuesta 20: Cálculo erróneo derivado de una insuficiente interpretación del enunciado. Focalización en una parte del enunciado: "*¿Cuántas peras les dio la abuela?*". Tiene lugar una parcialidad de los datos, focalización en las peras y se ignoran las manzanas (2 alumnos) — Intuición de conclusión.

Respuesta 12: El alumno 11 focaliza su atención en la frase "*llevan tantas peras como manzanas*". Entonces divide la cantidad inicial entre dos y, aunque no le da exacto, toma el resultado del cociente (redondeando por defecto) como solución. Como su resultado, coincide con una de las respuestas, lo da por bueno. Se trataría de una intuición de conclusión fundamentada en unos cálculos y en la aproximación a una de las respuestas, la orientada desde el cálculo de la división.

Respuesta 13 (interpretación errónea): Igual que en el caso anterior, un alumno focaliza su atención en la frase "*llevan tantas peras como manzanas*". Hace un cálculo mental aproximado de la mitad. Se trataría de una intuición de conclusión fundamentada en el cálculo aproximado de la mitad y en la aproximación a una de las respuestas. Otro alumno, también por medio de una intuición de conclusión, elige 13 porque se han comido una pera más que manzanas.


A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

25 es un número impar, por lo tanto, al dividirlo entre 2, sale una fruta más que la otra, y se han comido 1 pera más que manzanas.

Imagen 4. Intuición conclusión — Respuesta del alumno 29

Respuesta 16: Hay un cálculo incompleto derivado de una interpretación insuficiente del enunciado y quizá porque en el desarrollo se encuentra una de las posibles respuestas. Hay una clausura prematura del problema (6 alumnos) — Intuición de anticipación.

Problema 5

Ana, Blanca, Cecilia y Diana practican cada una un deporte diferente: kárate, fútbol, volleyball y judo, no necesariamente en este orden. A Ana no le gustan los deportes de pelota, la judoka Blanca a menudo asiste a los partidos de fútbol para ver jugar a su amiga Diana. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdad?

A) Ana juega al volleyball B) Blanca juega al fútbol C) Cecilia juega al volleyball D) Diana hace kárate E) Ana hace judo

Canguro Matemático 2007. Pregunta nº 12 del nivel 1

Tabla 8. Análisis respuestas problema 5

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización	7,89	0	0
Interpretación y explicación verbal	31,57	21,05	0
Sin justificar	10,52	26,31	0
Totales (%)	50	47,36	2,63

Sobre la estrategia de resolución

Un pequeño porcentaje de alumnos utiliza la estrategia de visualización con buenos resultados. Realizan un esquema que recoge la información e interpretación del enunciado.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta E: Insuficiente interpretación del enunciado. Focalización en una parte del enunciado: "*A Ana lo le gustan los juegos de pelota*". No consideran o no se dan cuenta de la información que se extrae de la expresión "la judoka Blanca" (7 alumnos) — Intuición de afirmación.

Otras respuestas también manifiestan una insuficiente interpretación del enunciado. No se relacionan bien todos los datos que contiene el problema.

Problema 6

Harry suelta una paloma mensajera a las 7:30 de la mañana, para mandarle un mensaje a Ron. La paloma le da el mensaje a las 9:10 de la mañana, volando 4 km. cada 10 minutos. ¿Qué distancia hay entre Harry y Ron?

A) 14 km.   B) 20 km.   C) 40 km.   D) 56 km.   E) 64 km.

Canguro Matemático 2007. Pregunta nº 17 del nivel 1

Tabla 9. Análisis respuestas problema 6

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Cálculo numérico	15,78	36,84	0
Interpretación y explicación verbal	0	2,63	0
Sin justificar	21,05	18,42	0
Totales (%)	36,84	57,89	5,26

Sobre la estrategia de resolución

No se observa el uso de una estrategia específica de resolución. Se lleva a cabo un cálculo numérico derivado de la interpretación que hace cada alumno del enunciado.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Errores en el planteamiento. Estos errores y los siguientes están ligados a hechos futuros (6 alumnos). Intuición conjetural.

Errores en el cálculo del tiempo (4 alumnos) — Intuición conjetural.

Respuesta 14 Km: Error en los cálculos del tiempo. Da la respuesta que más se aproxima al resultado de sus cuentas — Intuición de conclusión (1 alumno).

Respuesta 40 Km: Multiplican 10 minutos por 4 Km. Consideran que se obtienen kilómetros y el tiempo lo ignoran. Hay una interpretación muy particular de los datos, posiblemente buscando una solución entre las dadas como posibles. Se observa clausura prematura (2 alumnos) — Intuición conjetural.

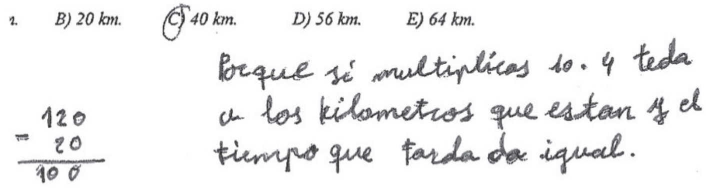


Imagen 5. Clausura prematura — Respuesta del alumno 28.

Respuesta 64 Km: No hace cálculos. Considera que la paloma tarda mucho, de ahí deduce que la distancia que recorrerá será la mayor — Intuición de afirmación (1 alumno).

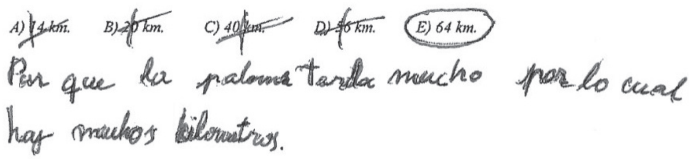


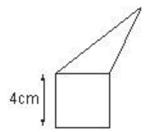
Imagen 6. Intuición afirmación — Respuesta del alumno 23

Problema 7

El triángulo y el cuadrado tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es el perímetro de la figura completa (un pentágono)?

A) 12 cm B) 24 cm C) 28 cm D) 32cm

E) Depende de las medidas del triángulo



Canguro Matemático 2008. Pregunta nº 13 del nivel 1

Tabla 10. Análisis respuestas problema 7

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Cálculo numérico	5,26	26,31	0
Interpretación y explicación verbal	0	21,05	0
Sin justificar	7,89	39,47	0
Totales (%)	13,15	86,84	0

Sobre la estrategia de resolución

Se lleva a cabo un cálculo numérico derivado de la interpretación que hace cada alumno del enunciado. Sin embargo, la interpretación del enunciado necesita de la interpretación de una figura, por tanto, interviene un proceso de visualización. Se observan dificultades en la interpretación global de la figura como pentágono, hacen una interpretación discreta de cuadrado y triángulo, lo que dificulta el reconocimiento de perímetro de la figura.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta D: (5 alumnos) Calculan el perímetro del cuadrado y lo multiplican por dos porque en el enunciado se dice que tienen el mismo perímetro. No se dan cuenta de que las figuras comparten un lado — Interpretación discreta de la figura.

Respuesta B: 1 (alumno) Consideran seis lados, incluido el lado común, y todos iguales de 4 cm. Hay 3 alumnos que calculan el perímetro del cuadrado sin contar el lado común con el triángulo (12 cm) y luego dicen que éste es el perímetro del triángulo, finalmente, suman ambas cantidades. Intuición de anticipación, pues se modifica el concepto de perímetro.

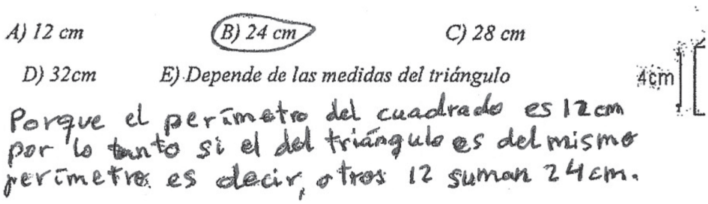


Imagen 7. Intuición anticipación — Respuesta del alumno 30

Respuesta C: (1 alumno) Interpreta bien la figura pero hace los cálculos mal. Intuición de conclusión.

Respuesta E: No hacen ningún cálculo porque consideran que faltan las medidas del triángulo. No saben calcularlas. Se produce una insuficiente interpretación del enunciado (7 alumnos) — Intuición de afirmación.

En general, se observan errores en el planteamiento de los cálculos debidos a una interpretación incorrecta del enunciado y de la figura adjunta. Por ejemplo, para el cálculo del perímetro se considera el lado común de las figuras que configuran la figura entera. Falta de visualización de la figura de forma conjunta.

Problema 8

Rebeca quiere poner todos sus CDs en una bolsa, pero un tercio de ellos no le caben. Esos CDs que no le caben los pone en tres cajas. Pone siete en cada caja, pero todavía le sobran dos. ¿Cuántos CDs tiene Rebeca?

A) 23 B) 21 C) 20 D) 19 E) 69

Canguro Matemático 2008. Pregunta nº 17 del nivel 1

Tabla 11. Análisis respuestas problema 8

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización + cálculo numérico	2,63	0	0
Cálculo numérico	28,94	21,05	0
Interpretación y explicación verbal	2,63	5,26	0
Sin justificar	15,78	23,68	0
Totales (%)	50	50	0

Sobre la estrategia de resolución

En general, se lleva a cabo un cálculo numérico derivado de la interpretación que hace cada alumno del enunciado. El alumno 1 elabora un esquema con los datos del problema desde el que realiza los cálculos de forma correcta — Intuición de conclusión

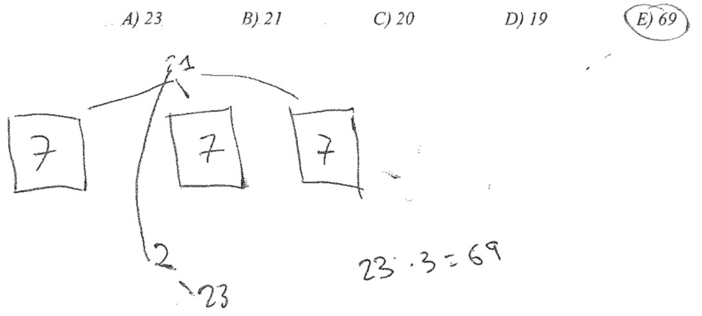


Imagen 8. Modelo diagramático a través del que tiene lugar el proceso de resolución del problema — Respuesta del alumno 1

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta 23: Cálculos incompletos (6 alumnos) — Intuición de anticipación.

Respuesta 21: Error de planteamiento de las operaciones. (1 alumno) — Intuición de afirmación.

Respuesta 69: Hay 1 alumno que no realiza operaciones. Da esta respuesta argumentando que no es número par, pero tampoco lo son otras posibles respuestas de la opción múltiple — Intuición de conclusión.

Sin respuesta: Otro alumno considera una cantidad inicial de 100 CD`s, a partir de la que opera siguiendo las instrucciones del enunciado. Intuición de anticipación, pues el alumno da una cifra inicial de CD`s que utiliza para su posterior análisis. En el proceso de cálculo no considera los datos que da el problema.

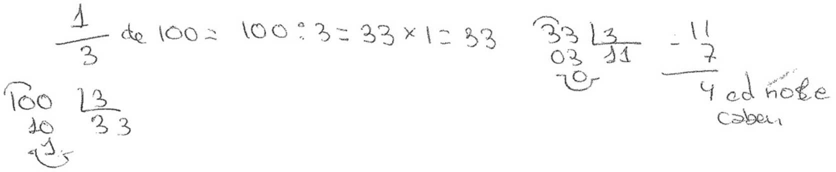
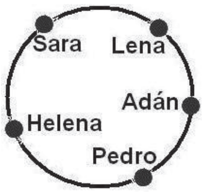


Imagen 9. Intuición anticipación — Respuesta del alumno 26

Problema 9

Para decidir quién se va a quedar con el último pedazo de la tarta de cumpleaños de Lena, ésta, juntamente con Adán, Helena, Pedro y Sara formaron un círculo, conforme al dibujo. Usan la frase CAN-GU-RO-FUE-RA-TU para contar en sentido antihorario, una sílaba cada uno, de modo que sale de la rueda el que dice: TU. Repiten el recuento hasta que solo queda uno. Lena fue la encargada de elegir quien empieza a contar. ¿Con quién debe comenzar, de modo que el último pedazo de tarta sea para Adán?



A) Adán *B) Lena* *C) Helena* *D) Sara* *E) Pedro*

Canguro Matemático 2010. Pregunta nº 23 del nivel 1

Tabla 12. Análisis respuestas problema 9

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Ensayo/Error	10,52	44,73	0
Interpretación y explicación verbal	0	7,89	0
Sin justificar	2,63	34,21	0
Totales (%)	13,15	86,84	0

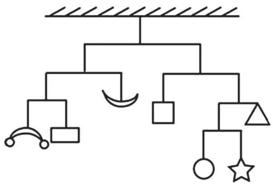
Sobre la estrategia de resolución

Aunque se utiliza la estrategia de ensayo-error de forma mayoritaria, las respuestas erróneas ponen de manifiesto que, en general, no se ha interpretado bien el enunciado (10 alumnos) o siguen mal las instrucciones del mismo (3 alumnos). En la interpretación de la figura tiene lugar un proceso de visualización, regido por las instrucciones del enunciado.

Problema 10

La figura representa un móvil en equilibrio. Sin contar el peso de las barras horizontales y el de los hilos, el peso del móvil es 112 gramos. ¿Cuál es el peso en gramos de la estrella?

A) 7 *B) 6* *C) 12* *D) 14* *E) 16*



Canguro Matemático 2010. Pregunta n. º 21 del nivel 1

Tabla 13. Análisis respuestas problema 10

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Cálculo numérico	5,26	42,10	0
Interpretación y explicación verbal	0	7,89	0
Sin justificar	5,26	34,21	0
Totales (%)	10,52	84,21	5,26

Sobre la estrategia de resolución

En general, se lleva a cabo un cálculo numérico derivado de la interpretación que hace cada alumno del enunciado. La interpretación del problema necesita de una interpretación del enunciado y de una visualización del gráfico que lo acompaña. El alumno debe interpretar el equilibrio de la figura como la existencia de una igualdad de peso entre ambos brazos del móvil.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta 16: Suponen que todas las piezas pesan igual (intuición de anticipación). A continuación, dividen el peso total entre el número de piezas (14 alumnos),

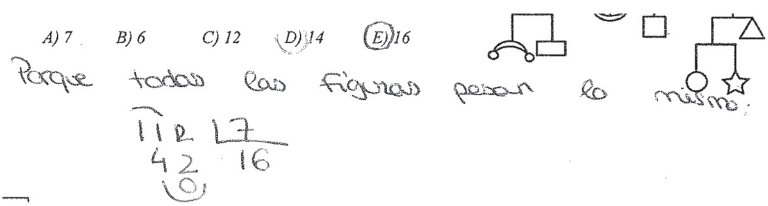


Imagen 10. Intuición anticipación — Respuesta del alumno 21

Respuesta 16: Hay 1 alumno que toma como respuesta el peso mayor porque considera que la estrella “es lo que más abulta del dibujo” — Intuición de afirmación.

Respuesta 14: No interpretan bien la figura. No acaban el proceso de cálculo (2 alumnos) — Intuición de anticipación.

Respuesta 6: Considera el menor peso porque interpreta a las figuras como pequeñas — Intuición de afirmación (1 alumno).

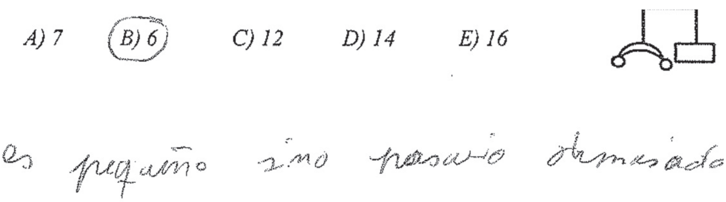


Imagen 11. Intuición anticipación — Respuesta del alumno 23

Respuesta 12: El alumno observa que hay equilibrio, y ese equilibrio le condiciona la elección de su respuesta: la que está en la posición del medio de las dadas ("porque si no, se caerían") — Intuición de afirmación (1 alumno).

Problema 11

Alex dice que Pedro miente. Pedro dice que Marcos miente. Marco dice que Pedro miente. Toni dice que Alex miente. ¿Cuántos de los cuatro chicos mienten?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Canguro Matemático 2011. Pregunta nº 24 del nivel 1

Tabla 14. Análisis respuestas problema 11.

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización	5,26	7,89	0
Interpretación y explicación verbal	2,63	36,84	0
Sin justificar	7,89	36,84	0
Totales (%)	15,78	81,57	2,63

Sobre la estrategia de resolución

Son dos chicos los que mienten, pero el planteamiento de este problema es confuso, porque la solución tiene dos interpretaciones. Si se considera que Toni, sobre el que no se dice nada, dice la verdad, entonces Pedro dice la verdad y Alex y Marcos mienten. En cambio, si se considera que Toni miente, entonces Pedro miente y Alex y Marcos dicen la verdad. Dos alumnos que han respondido bien y han señalado quién mentía, han optado por la opción de que Toni miente.

Asimismo, el problema trae una errata en el nombre de Marcos, lo que ha confundido a tres alumnos pues han creído que son cinco chicos, pese a que la pregunta del enunciado da a entender que son cuatro chicos.

En general, las respuestas de los alumnos no están suficientemente justificadas, ni visualmente, ni verbalmente. Se observa falta de comprensión y análisis del enunciado. Muchos se fijan en los nombres, pero no en las relaciones que produce la acción de mentir. Algunos alumnos esquematizan la información que les da el enunciado e intentan resolver el problema a través de este esquema, pero llegan a la respuesta correcta, el esquema es insuficiente para interpretar el enunciado.

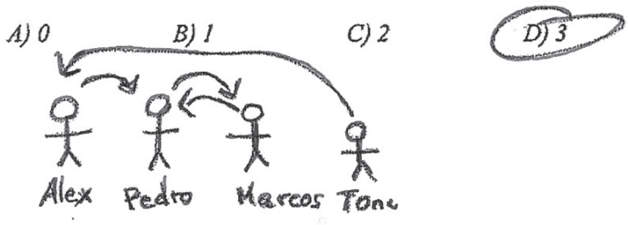


Imagen 12. Modelo diagramático a través del que tiene lugar el proceso de resolución del problema — Respuesta del alumno 3

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas

Respuesta 4: (1 alumno) "*Porque es lo más lógico*" — Intuición conjetural. Hay una lectura del enunciado que motiva al alumno la categorización del problema. No hay una interpretación ni análisis del enunciado.

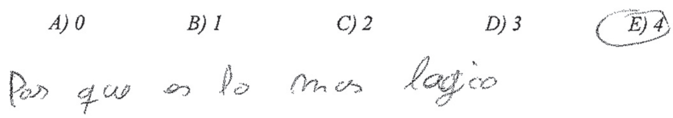


Imagen 13. Intuición conjetural — Respuesta del alumno 23

Respuesta 3: Interpretación sesgada del enunciado: "*nadie dice que Toni mienta*". Intuición de conclusión que surge tras un análisis del enunciado (7 alumnos) — Intuición de conclusión.

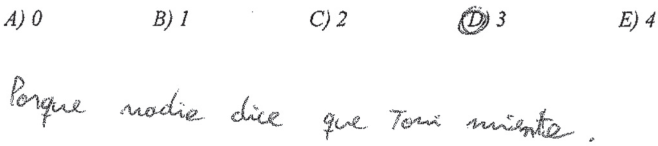


Imagen 14. Intuición de conclusión — Respuesta del alumno 36

Respuesta 1: Interpretación sesgada del enunciado: "*más de una persona ha dicho que Pedro miente*". Intuición de conclusión que surge tras un análisis del enunciado (1 alumno).

Problema 12

Inés tiene 10 años de edad. Su madre, Luisa, cuadruplica su edad. ¿Qué edad tendrá Luisa cuando Inés tenga el doble de la edad que tiene ahora?

A) 40 años *B) 50 años* *C) 60 años* *D) 70 años* *E) 80 años*

Canguro Matemático 2007. Pregunta nº 21 del nivel 1

Tabla 15: Análisis respuestas problema 12

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**NC %**
Visualización	2,63	0	0
Cálculo numérico	2,63	60,52	0
Sin justificar	10,52	23,68	0
Totales (%)	15,78	84,21	0

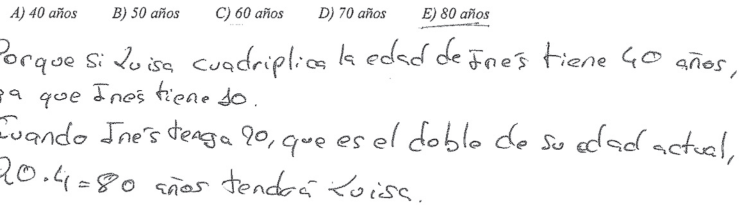
Sobre la estrategia de resolución

Aunque un alumno recurre a la esquematización de la información del enunciado y llega a la respuesta correcta, la mayoría de los alumnos realiza un cálculo numérico que surge de la interpretación directa del enunciado verbal.

Interpretación de algunas respuestas incorrectas justificadas.

Respuesta 80: Considera que si la hija dobla su edad, la madre también (3 alumnos) — Intuición de anticipación.

Respuesta 80: Realizan el problema bajo la consideración de que la madre cuadruplica siempre la edad de la hija (16 alumnos) — Intuición de anticipación.

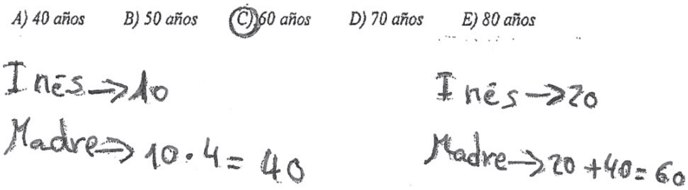


A) 40 años B) 50 años C) 60 años D) 70 años E) 80 años

Porque si Luisa cuadriplica la edad de Inés tiene 40 años,
ya que Inés tiene 10.
Cuando Inés tenga 20, que es el doble de su edad actual,
20·4=80 años tendrá Luisa.

Imagen 15. Intuición de anticipación — Respuesta del alumno 37

Respuesta 60: Realizan los cálculos de manera que para la madre pasan tantos años como la edad de la hija, en vez de sólo los años que pasan para la hija. Además, el proceso de resolución del alumno 4 manifiesta una actuación por analogía, ya que cuando tiene que calcular la edad de la madre por segunda vez, utiliza la edad de la hija como referente de los cálculos, como hizo en el primer cálculo, aunque las operaciones son distintas (3 alumnos) — Intuición de conclusión.



A) 40 años B) 50 años C) 60 años D) 70 años E) 80 años

Inés → 10
Madre → 10·4 = 40

Inés → 20
Madre → 20+40=60

Imagen 16. Actuación por analogía — Respuesta del alumno 4

La tabla 16 muestra un resumen en porcentajes de las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas propuestos.

Tabla 16. Resumen de las estrategias utilizadas

Estrategia resolución	**RC %**	**RI %**	**TOTAL**
Calculo Numérico	12,45	32,23	44,69
Interpretación y explicación verbal	10,26	20,88	31,14
Visualización + Ensayo/Error	5,13	1,83	6,96
Ensayo/Error	4,40	7,33	11,72
Visualización	3,66	1,47	5,13
Visualización + cálculo numérico	0,37	0,00	0,37
Totales (%)	36,26	63,74	100,00

Como se puede apreciar, las respuestas incorrectas son casi el doble las respuestas correctas, las estrategias que más han utilizado, por este orden, han sido la de cálculo numérico y la de interpretación y explicación verbal. Por otra parte, la proporción entre respuestas correctas e incorrectas es más desfavorable en cálculo numérico y las más favorables cuando interviene la visualización.

Tabla 17. Clasificación del conocimiento intuitivo encontrado en las respuestas de los problemas — Porcentajes de cada tipo en cada problema y totales

CONOCIMIENTO INTUITIVO					
Problemas	Afirmación	Conjetural	Anticipación	Conclusión	Elaboración diagrama
Problema 1	3,92	0,00	1,31	0,00	Sí
Problema 2	1,96	1,96	0,00	0,00	Sí
Problema 3	3,27	0,00	2,61	0,00	
Problema 4	3,27	0,00	3,92	3,27	
Problema 5	4,58	0,00	0,00	0,00	Sí
Problema 6	0,65	6,54	1,31	0,65	
Problema 7	4,58	0,00	5,88	0,65	
Problema 8	0,65	0,65	3,92	1,96	Sí
Problema 9	6,54	1,96	0,00	0,00	
Problema 10	2,61	1,96	9,15	0,00	
Problema 11	0,00	0,65	0,00	5,23	Sí
Problema 12	12,42	0,00	1,96	0,00	Sí
Totales (%)	44,44	13,73	30,07	11,76	

A la vista de la tabla que resume el conocimiento intuitivo es notorio que el más abundante es el conocimiento intuitivo de afirmación, seguido del de anticipación, pero con una diferencia sustancial y, en tercer lugar, con frecuencias parecidas, pero muy alejados, los conocimientos intuitivos conjetural y de conclusión. La distribución en la tabla de este tipo de conocimientos es muy irregular y, dependiendo del tipo de tarea, abundan más unos u otros. Sin embargo, cabe afirmar que el conocimiento intuitivo de afirmación está presente en todas las tareas excepto en una, el conocimiento intuitivo de anticipación en ocho, el conocimiento intuitivo conjetural en seis y el conocimiento intuitivo de conclusión sólo en cinco estrategias. Finalmente, aun viendo la efectividad de la elaboración de diagramas, sólo los elaboran en la mitad de las tareas propuestas.

Conclusiones y problemas abiertos

En este apartado, se presentan las conclusiones de esta investigación siguiendo los objetivos propuestos y atendiendo a los resultados obtenidos.

La valoración de los contenidos curriculares del CCM pone de manifiesto que en general, los contenidos que se requieren para resolver los problemas del CCM forman parte de los contenidos curriculares del curso correspondiente al nivel de la prueba o de cursos anteriores. No se ha observado la presencia de los bloques de contenidos de álgebra (en 1.º de ESO), funciones y gráficas y estadística y probabilidad (en 1.º y 2.º), quizá por ser contenidos que se suelen enseñar al final de curso, según la temporalización usual de las programaciones y los libros de texto, y la prueba del CCM se realiza con anterioridad, aunque se podrían poner contenidos de estos bloques de cursos anteriores. Por tanto, el alumno puede utilizar su conocimiento matemático en el proceso de razonamiento y de elaboración de estrategias de resolución. Sin embargo, la resolución de algunos problemas requiere del uso de estrategias heurísticas específicas, como ensayo-error y visualización. En concreto, los problemas más difíciles de la prueba (los últimos) se caracterizan porque, en muchas ocasiones, es necesaria la aplicación de una estrategia heurística específica, además de un conocimiento matemático concreto. La falta de conocimiento de estas estrategias puede generar dificultades en la resolución de los problemas de este concurso, ya que no siempre la aplicación de una estrategia surge de forma innata de la intuición o conocimiento del alumno. Finalmente, es llamativo observar que muchos alumnos consideran que no hay relación entre los problemas planteados en el CCM y los contenidos matemáticos que se enseñan en clase. Se considera que la falta de experiencia en la resolución de problemas, el no reconocer un concepto o procedimiento matemático de uso habitual por el alumno tras la lectura del enunciado y la necesidad del uso de estrategias heurísticas específicas pueden ser algunas razones de esta creencia.

En relación a la valoración del uso de estrategias heurísticas al resolver problemas del CCM, se observa que hay alumnos que sí las utilizan, en concreto las estrategias de ensayo-error y uso de diagramas o figuras, para resolver problemas que así lo requieren. Sin embargo, es posible que no sean conscientes de que lo están haciendo. En algunas preguntas, la utilización de la estrategia ha llevado a contestar correctamente a casi todos los alumnos que la han utilizado, lo que es otra muestra de su importancia y utilidad. Se considera que la estrategia heurística es una guía o camino entre el conocimiento que dispone el alumno y el saber usar este conocimiento para resolver el problema. Sin embargo, es elevado el porcentaje de alumnos que no saben poner en práctica una estrategia y, o bien, no saben contestar, o bien, utilizan otros procedimientos como la interpretación verbal del proceso de resolución o cálculos numéricos a partir de los datos del problema.

El proceso cognitivo de visualización se ha manifestado en forma de procesamiento visual. Es decir, ha tenido lugar la interpretación visual de enunciados verbales. Tienen lugar conversiones de la representación verbal del problema a una representación gráfica o esquemática de los datos que ofrece dicho enunciado. Siguiendo la clasificación de Presmeg (1987) se elaboran imágenes patrones que se utilizan para la resolución del problema. Se observa que el alumno elabora imágenes desde la información que aportan los enunciados como forma de expresar la interpretación y comprensión de este enunciado. También se ha observado que los alumnos utilizan las imágenes elaboradas para la resolución del problema y, en algún caso, esto ha implicado la transformación o manipulación de la imagen (problemas: 1, 2, 5, 8, 11, 12). Por otra parte, también ha tenido lugar la interpretación de información figurativa, en concreto, la interpretación de los gráficos que acompañaban al enunciado de los problemas. Es en este caso donde se han observado los mayores errores y dificultades, porque la interpretación del alumno no se correspondía con la que orientaba el enunciado del problema. Se hacían interpretaciones discretas o insuficientes de la figura (problemas: 3, 7, 9, 10). En general, se puede decir que el uso de la estrategia de visualización ha facilitado la resolución del problema.

Entre otras dificultades observadas destacamos la interpretación inadecuada del enunciado, en concreto, la interpretación parcial o focalización en una parte del enunciado (problemas: 1, 2, 4, 5).

Finalmente, la justificación de las respuestas ha permitido observar el desarrollo de conocimiento intuitivo. Este conocimiento se manifiesta como evidencias que surgen tras la interpretación personal del enunciado, y cuyo grado de certidumbre viene avalado por el conocimiento previo del alumno. Este conocimiento justifica la respuesta y condiciona la estrategia de resolución del problema o la interpretación final de la solución. También se ha observado que hay una tendencia a la clausura prematura y el efecto de primacía, es decir, a admitir las primeras ideas que le vienen a la mente al individuo sin tendencia al replanteamiento de las mismas. Esto viene reforzado por el hecho de que predominan las intuiciones de afirmación, ideas que le surgen al individuo no justificadas por un análisis posterior, frente a las de anticipación. En la tabla 16 presentamos la clasificación del conocimiento intuitivo que hemos encontrado en las respuestas.

El carácter de los problemas, poco elaborados, ha propiciado el desarrollo de intuiciones de afirmación y conclusión. Por esta misma razón, no se observa el uso de modelos paradigmáticos o analógicos, aunque en el problema 12 se ha observado una actuación por analogía. En cambio, sí se ha observado la producción de modelos diagramáticos, como forma de expresar la información que transmite el enunciado del problema e interpretar y utilizar dicha información. En términos de Presmeg estos modelos son lo que hemos denominado imágenes patrones, porque no se trataba de imágenes estáticas, sino de imágenes que se utilizaban para interpretar el enunciado y probar las distintas posibilidades.

Finalmente, de este estudio surge un problema abierto. En NCTM (1991) se señala que la resolución de problemas debe constituir un objetivo prioritario de la educación matemática y una parte integral de la actividad matemática. Perales (1993) advierte que en muchas ocasiones se pide a los alumnos que resuelvan problemas-tipo similares a los hechos en clase, lo que favorece la evaluación de los saberes declarativos y no de los procedimentales. Considera que hay una gran ausencia de metodologías específicas para la resolución de problemas en los programas oficiales y en los libros de texto educativos. Profundizando en estas ideas, la experiencia en el aula y, en concreto, el desarrollo de esta investigación ponen de manifiesto que la resolución de problemas muchas veces requiere del uso de estrategias heurísticas específicas, que no todos los alumnos saben desarrollar o poner en práctica de manera autónoma y eficiente. Por tanto, como problema abierto para futuras investigaciones se propone la elaboración de un diseño de enseñanza de estrategias heurísticas. Es decir, la docencia debe contemplar la enseñanza y ejemplificación de estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Es evidente que habrá un diseño de enseñanza específico para cada estrategia y su docencia es necesario realizarla a través de la resolución de un problema concreto. A priori, la ejemplificación pone unos límites a la generalización del aprendizaje de la estrategia, pero estos límites se pueden subsanar con la práctica en la resolución de problemas que necesiten de la estrategia heurística que se estudia. Esta enseñanza debe capacitar a los alumnos para el uso de estrategias heurísticas, promoverá en ellos el desarrollo de la competencia matemática de resolución de problemas y contribuirá al desarrollo de la capacidad de razonamiento del individuo.

Referencias

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2014) Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 9–34.

Arthur, D. (1995). Problem solving classes. In F. Forster, D. Hounsell, & S. Thompson (Eds.), *Tutoring and Demonstrating: A Handbook* (pp. 25–38). United Kingdom: University of Sheffield. Consultado octubre 2013: http://www.docs.hss.ed.ac.uk/iad/Learning_teaching/Tutors/Handbook/Tutors-Chapter4.pdf

Coller Porta, X. (2005). *Estudio de casos*. (Cuadernos metodológicos). Centro de Investigaciones Sociológicas: Madrid.

Consejería de educación de la Junta de Castilla y León (2007). Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL*, 23 de mayo de 2007.

Dane, E., & Pratt, M. G. (2007). Exploring Intuition and Its Role in Managerial Decision Making. *The Academy of Management Review*, *32*(1), 33–54.

Donoso-Vázquez, T., & Sánchez Martí, A. (2013). *Orientación educativa y profesional. Estudio de casos*. ISEP (intervención), Barcelona.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Holland: Reidel.

Fernández Verdú, C., Callejo de la Vega, M. L., & Márquez Torres, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 407–424.

Gascón Chavarri, J. (2014). Estrategias de aprendizaje y motivación en la resolución de problemas aritmético-algebraicos. Un estudio con alumnado de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 293–294.

Giardino, V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. *Topoi*, *29*, 29–39.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla: S.A.E.M. THALES.

Mendoza-Nuñez, A. (2006). *El estudio de casos: un enfoque cognitivo*. México: Editorial Trillas.

Ortega, T., Pecharromán, C., & Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Revista Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 99–116.

Perales, F. J. (1993). Resolución de problemas una revisión estructurada. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *11*, 170–179. Consultado diciembre 2013:
http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v11n2p170.pdf

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42–46.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 205–235). Netherlands: Sense Publishers.

Schoenfeld A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Simone, H. (2011). *El estudio de caso. Teoría y práctica.* Madrid: Ediciones Morata.

Stake, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Cases Studies. In N. K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.), The Sage Handbook of Qualitative Research (pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.

Tirosh, D., Stavy, R., & Tsamir, P. (2001). Using the intuitive rules theory as a basis for educating teachers. In F. L. Lin, & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics education* (pp. 73–85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Resumen. En este artículo se presenta una investigación en la que se analizan los contenidos matemáticos presentes en pruebas del Concurso Canguro Matemático de 1.º y 2.º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en relación con el currículo oficial. Se analizan las estrategias heurísticas que se utilizan en la resolución de una selección de problemas del concurso en 1.º ESO (12–13 años), y se caracteriza el conocimiento intuitivo que se desarrolla en el proceso de resolución de estos problemas. El estudio pone de manifiesto un desajuste curricular y la necesidad de una docencia que aborde la enseñanza o ejemplificación de estrategias heurísticas y que promueva el uso de las mismas en la resolución de problemas, el uso preferente de visualizaciones y ensayo-error, y se hace una clasificación del conocimiento intuitivo.

Palabras clave: Resolución de problemas, concurso matemático, estrategias heurísticas, intuición, visualización.

Abstract. This article presents a research which analyzes the mathematical contents present in the tests discussed in the Kangaroo Math Competition of the first two courses of secondary Education (ESO) in relation to the official curriculum. On the one hand, it is analyzed the heuristic strategies used in solving a selection of problems in the first course of ESO (12–13 years old) competition and, on the other hand, it is characterized the intuitive knowledge developed in the process of solving these problems. This study highlights a curricular mismatch and the need of a teaching which addresses the development and exemplification of heuristic strategies and which promotes their use in problem solving, the preferential use of displays and trial and error and a classification of intuitive knowledge is made.

Keywords: Problem solving, mathematical contest, heuristic strategies, intuition, visualization.

■■■

CRISTINA PECHARROMÁN GÓMEZ
Universidad de Valladolid, Facultad de Educación y Trabajo Social, España
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales, y de la Matemática
pecharroman@am.uva.es

TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN
Universidad de Valladolid, Facultad de Educación y Trabajo Social, España
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales, y de la Matemática
ortega@am.uva.es

VERÓNICA SAN MIGUEL PÉREZ
Universidad de Valladolid, Facultad de Educación y Trabajo Social, España
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales, y de la Matemática
veroguel88@gmail.com

(recebido em outubro de 2014, aceite para publicação em fevereiro de 2016)