

Acciones de validación en Matemática en clases de la escuela secundaria

Validation actions in Mathematics in high school classes

Marcela Cristina Falsetti

Instituto del Desarrollo Humano
Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina

Javier Ignacio Lugo¹

Instituto del Desarrollo Humano
Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina

Introducción

En este trabajo se presenta una indagación exploratoria sobre las acciones involucradas en el proceso de validación en Matemática de un grupo de alumnos de una escuela de nivel secundario superior del conurbano de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. La edad de los estudiantes se encuentra entre 16 y 17 años. El estudio, realizado en el marco de una investigación de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), fue llevado a cabo por un equipo de investigación de la UNGS del cual formaba parte el profesor del curso. El interés de este equipo es conocer cuáles acciones de validación realizan los alumnos frente a actividades para el aprendizaje diseñadas y secuenciadas por los investigadores-docentes con el fin de provocar situaciones que invitan a validar las producciones de los estudiantes del grupo observado.

La validación es, en general, una actividad científica o técnica por la cual se elaboran las garantías de que el conocimiento, producción o procedimiento construidos cumplen con las especificidades y requerimientos institucionales², que pueden ser de tipo técnico, de tipo funcional o de rigor y formalismo. Mediante esta actividad, el saber y el saber hacer personales se acercan al saber institucional, sea éste el escolar, el científico o el técnico, y se ejerce además un control sobre la producción individual. En Matemática, la validación contempla la demostración matemática. En Educación Matemática, además de la demostración como producción para la validación, se contempla la prueba matemática (Balacheff, 1987; Brousseau, 1995; Hanna, 1995; Hanna, 2000; Harel & Sowder, 1998; Herbst, 2000; Stylianides, 2007).

La forma en que hemos promovido el aprendizaje de la validación es mediante una dinámica de resolución de situaciones problemáticas en pequeños equipos, en modalidad taller. Los temas tratados fueron función cuadrática y funciones exponencial y logarítmica. El desafío para el profesor fue instalar la dinámica de taller en base a situaciones problemáticas, abandonando paulatinamente el lugar ostensivo de la enseñanza para dedicarse a orientar los aprendizajes, invitar continuamente a los alumnos a explicar sus producciones, justificarlas y argumentar, diseñar cuidadosamente las clases y registrar lo sucedido en ellas. El desafío para los alumnos fue tratar de abandonar el rol de receptor, al que estaban acostumbrados, por uno más activo, encarar situaciones para las que no estaba explicado el tema previamente y para la cual no contaban con ningún ejercicio tipo resuelto, ir vinculando las resoluciones y encontrando patrones para hacer emerger conocimiento, esmerarse por explicar lo realizado, intercambiar entre pares, etc.

Las variables de estudio han sido las acciones que el estudiante lleva a cabo cuando produce las razones que garantizan que lo realizado responde a lo pedido y es matemáticamente correcto. Además, en este trabajo intentamos hacer un vínculo entre el análisis de las acciones de validación y el análisis bajo la perspectiva de los tipos de prueba introducidas por Balacheff (1987).

Los datos de la investigación se obtuvieron a través de la observación participante del profesor y a través de entrevistas personales con alumnos de una muestra intencional.

El marco referencial de este trabajo tuvo en cuenta las nociones y las prácticas sobre validación introducidas por autores como Brousseau (1995), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1999) en relación con el aprendizaje de la validación. En la mayoría de los trabajos de investigación referidos al aprendizaje de la prueba, tales como Bernardis y Moriena (2010), Balacheff (1987), Brousseau (1995), Hanna (1995, 2000), Harel y Sowder (1998), Herbst (2000), Miyakawa (2002), Sánchez (2003) y Stylianides (2007), se analizan eventos o problemas puntuales, especialmente de geometría, de álgebra o teoría de números, reduciéndose a un análisis local. Uno de los aportes de este trabajo es que en general no hay demasiadas investigaciones didácticas sobre la validación en Matemática con contenidos sobre funciones, y en especial funciones exponencial y logarítmica. Además, en este trabajo se muestra qué sucede al trascender el tratamiento coyuntural de un problema o una situación determinados ya que no se aborda sólo algunos eventos, sino que se observan los mecanismos de prueba a lo largo de un período prolongado y siguiendo una planificación de enseñanza en ámbito escolar y con varias secuencias de clase. Esta investigación se realizó respetando la programación curricular prescripta para nivel educativo del curso.

Marco Teórico

Según Brousseau (1995), para aprender a validar matemáticamente es necesario vencer la resistencia a incorporar formas propias de la validación en Matemática y desarrollar una actitud de prueba. De acuerdo con este autor, esto se logra transitando por una situación de validación, la cual, en relación con la de acción y la de formulación, debería activar

una dialéctica de defensa y refutación incentivando al estudiante a defender su producción ante pares así como interpelar la de otros.

Para conceptualizar aquellos procesos implicados en la validación en Matemática tuvimos en cuenta los trabajos que tratan sobre la validación bajo la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas (Balacheff, 1987; Brousseau, 1995; Sadovsky, 2005) y también los trabajos de Arsac (1992), Duval (1999) y Balacheff (1991).

Para una mejor caracterización del proceso de validación, consideramos la siguiente definición (Barreiro, Falsetti, Formica, Marino, & Mellincovsky, 2009):

Un sujeto en situación de aprendizaje valida un conocimiento matemático cuando se cumplen las tres siguientes condiciones:

- es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido;
- en sus razones o garantías debe hacer explícita la asignación de sentidos de los objetos matemáticos que manipula y éstos deben corresponderse con significados matemáticos aceptados por la Institución Matemática;
- las aseveraciones formuladas, por medio de las cuales se presentan las razones o las conclusiones deben provenir de razonamientos matemáticamente correctos, o sea que para la Matemática actual, deben ser el resultado de aplicar un sistema lógico deductivo.

Validación, prueba y demostración: puntos de similitud y de diferenciación

En el campo de la Didáctica de la Matemática los términos más usuales referidos al requerimiento de justificación del conocimiento matemático son: validación, prueba y demostración. Entre ellos el término *demostración* tiene mayor convergencia de significados usados por los distintos autores (ver por ejemplo Balacheff, 1987; Duval, 1999; Godino & Recio, 2001; Sáenz Castro, 2002). Se considera que una demostración matemática es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas tendientes a deducir lógicamente el valor “verdadero” de lo inferido o concluido. En Matemática, un enunciado se asume convencionalmente como verdadero (axioma) o bien se deduce de los que le preceden con la ayuda de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definido cuya validez es socialmente compartida por la comunidad de matemáticos. Godino y Recio (2001) señalan que en el ámbito de la Matemática, las demostraciones son deductivas pero no formales, esta aseveración se comprende mejor a partir de lo señalado por Alcolea Banegas (2002) quien sostiene que los matemáticos acercan la demostración a la idea de argumento que transmite suficiente convicción como para lograr la comprensión de los resultados presentados y su aceptación por parte de los expertos.

Con respecto al significado de *prueba* asumimos que es un discurso argumentativo, a favor o en contra de una aseveración que involucra objetos y relaciones matemáticas. Según Stylianides (2007), la prueba presenta las siguientes características:

1. Usa afirmaciones sobre conocimiento aceptado por la comunidad de la clase.
2. Emplea formas de razonamientos (modos de argumentación) que son habituales y reconocidas en la clase y acordes al alcance conceptual de sus integrantes.
3. Es comunicada con formas de expresión que son apropiadas para la comunidad de la clase.

Cabe aclarar que hay otra acepción posible de prueba como forma genérica de validar y explicar lo verdadero en Matemática (Fawcett, 1938; Hanna, 1995 citados por Herbst, 2000).

Por último, el término *validación* fue inicialmente difundido junto con la Teoría de Situaciones de Brousseau (1995) y asociado a aquella situación social de aprendizaje en la que se da lugar a la adaptación de los sujetos aprendices al medio, el cual pone en tensión, por confrontación, lo producido por el individuo con los requisitos o resultados solicitados. Es constitutivo de la situación de validación la dialéctica de defensa y refutación por parte de los sujetos que aprenden. Como resultado de dicha situación dialéctica se produce una prueba de la validez, tanto de lo producido en el medio contextualizado como de la sentencia o de la aseveración general, descontextualizada, que enuncia cómo lo producido “funciona” bajo ciertas condiciones. Otros autores, como Selden y Selden (2000), se refieren a “validación” en el sentido de “validación de la prueba” siendo este un proceso de verificación de que la misma cumple con los requerimientos lógicos que aseguran que el razonamiento que conduce a la inferencia realizada es correcto. Nosotros interpretamos que la validación según estos autores no tiene que ver con la producción de la prueba sino que es posterior, aunque de ella la prueba también se retroalimenta y se reconstruye. En este trabajo adoptamos la perspectiva de Brousseau.

En suma, el principal punto de contacto de los tres conceptos es la búsqueda de la verdad matemática como condición de aceptación indiscutida de lo presentado o producido por una comunidad (la científica, la del aula, la escolar, la comunidad de uso, etc.). Un punto de diferenciación es que la demostración y la prueba son productos mientras que la validación es un proceso. Otro punto de diferenciación es el alcance del término, la demostración es un tipo de prueba que requiere el cumplimiento de ciertos requisitos de organización, jerarquización, uso del lenguaje simbólico y rigurosidad lógica ya que la demostración es sometida a la evaluación de una comunidad científica de matemáticos expertos; en cambio una prueba en general puede basarse en recursos más intuitivos e inductivos capaces de lograr comprobación y convencimiento en ámbitos más locales, como puede ser una comunidad de profesionales (ingenieros por ejemplo) o una clase de matemática, etc.

Dimensiones de la validación. Acciones de validación

Según lo explicado en la sección anterior, validar en Matemática implica, por un lado, una confrontación del conocimiento personal con un sistema externo al sujeto, constitui-

do por reglas, principios y símbolos consensuados en el seno de una comunidad de producción, científica o escolar, y por otro la elaboración de garantías que puedan defender la producción personal en un ámbito social. En la validación en Matemática convergen distintas dimensiones, a saber:

- la dimensión discursiva, que se refiere al conocimiento general de las prácticas argumentativas y explicativas;
- la dimensión disciplinar, que se refiere al conocimiento de lo matemático específico y sistematizado: axiomas, objetos, relaciones, operaciones, propiedades, etc., que se ponen en juego en las justificaciones y las pruebas;
- la dimensión lógica, que se refiere al conocimiento de las leyes y reglas de deducción, las equivalencias lógicas, el uso y alcances de cuantificadores en las funciones proposicionales, etc.;
- la dimensión simbólica, que se refiere al conocimiento de los símbolos que representan los conceptos matemáticos y de los símbolos que se usan para la estructuración de la deducción;
- la dimensión personal, que se refiere a cómo los individuos actúan particularmente para originar las garantías y razones esgrimidas en las argumentaciones que avalan el conocimiento producido haciendo uso de los conocimientos de cada una de las dimensiones anteriores.

La demostración matemática es la forma más acabada de validación en Matemática, pero hemos querido considerar otros formatos menos formales que, aún sin llegar a ser demostraciones en el sentido estricto, pueden también dar garantía sobre lo producido en un momento determinado y en una comunidad de aula. Por eso, uno de nuestros propósitos con este trabajo es conocer las formas personales del proceso de validación, que debieran ir aproximando al estudiante a un proceso de validación más cercano al que la “institución matemática” pretende para garantizar que su conocimiento personal es válido. Esto se relaciona con lo que Balacheff (1987) denomina *proceso de validación*, el cual “consiste en asegurarse las garantías necesarias de un compromiso en la acción; en este caso la acción de decidir sobre la verdad de una aserción”. Según este autor forman parte de este proceso cuestiones como: la toma de conciencia de las contradicciones, la elaboración de pruebas de distinto tipo, la argumentación y la refutación como parte de la misma, etc. Además, agrega que los procesos de validación son razonamientos que tienen como finalidad asegurar la validez de una proposición y producir, eventualmente, una explicación, una prueba o una demostración.

Nuestro análisis se ubica en la dimensión personal y refiere a acciones identificadas, mediante la observación participante y el análisis de producciones, en los momentos de elaboración de razones y garantías (Falsetti, Marino, & Rodríguez, 2004; Barreiro et al., 2009). A continuación listamos las acciones a observar:

- A1 Hacer ensayos o intentos.

- A2 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos desconectados de la actividad a resolver.
- A3 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver.
- A4 Identificar alguna regularidad a partir de una cierta cantidad de casos particulares.
- A5 Enunciar ambigüedades.
- A6 Ejemplificar.
- A7 Anticipar, predecir.
- A8 Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección.
- A9 Encontrar analogías o similitudes.
- A10 Describir (mostrar pasos y procedimientos).
- A11 Ejemplificar mostrando regularidades.
- A12 Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento).
- A13 Explicar (dar razones y relaciones).
- A14 Comparar (establecer semejanzas y diferencias).
- A15 Justificar por la “autoridad” (libro, docente, par experto).
- A16 Reconocer contradicciones.
- A17 Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.
- A18 Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.
- A19 Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas.
- A20 Derivar conclusiones con premisas dadas.
- A21 Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión).
- A22 Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).
- A23 Apelar a un registro semiótico para validar lo producido en otro registro.

Estas acciones están presentes en las elaboraciones de las pruebas, ya sean de tipo *pragmáticas* o *intelectuales* (Balacheff, 1987; Brousseau, 1995). Las pragmáticas son aquellas en las que se muestran las acciones que llevaron al resultado o la enunciación de la propiedad; las intelectuales en cambio son las basadas en las relaciones y definiciones, estructuradas en forma de razonamiento. Balacheff (1987), amplía estos tipos de prueba, estableciendo una distinción mayor dentro de cada uno de ellos. En las de tipo pragmático distingue el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico mientras que en la de tipo intelectual exhibe la experiencia mental y la demostración.

Son varias las investigaciones sobre validación que estudian las pruebas según la tipología introducida por Balacheff (Bernardis & Moriena, 2010; Miyakawa 2002; Sánchez, 2003). El nuestro es un estudio de reconocimiento y análisis de las acciones de validación, en lugar de sólo el reconocimiento de la tipología de Balacheff, lo cual permite realizar una mayor desagregación para el análisis, tanto a-priori como a-posteriori, y mayor facilidad en la búsqueda de recurrencias conductuales.

Contexto de la investigación

La escuela y la clase

La escuela secundaria en la Argentina es de carácter obligatorio. En la provincia de Buenos Aires se extiende por seis años y se divide en dos ciclos: el secundario inferior, primero, segundo y tercer años, y el secundario superior, cuarto, quinto y sexto años. La experiencia fue realizada en una clase del quinto año con estudiantes edades entre 16 y 17 años, en una escuela con orientación en Humanidades y Ciencias Sociales. Por las características de esta institución, los alumnos del grupo habían transitado juntos los estudios primarios y secundarios.

El equipo de investigación contaba ya con un diagnóstico sobre el alumnado y con tres meses de trabajo con él, previo a poner en marcha el dispositivo didáctico. Entre las características principales de este curso mencionamos que, en su formación matemática, los estudiantes no habían ejercido demasiado la práctica de justificar sus producciones, sino que las actividades trabajadas resultaban ser generalmente ejercicios que correspondían con un hacer más mecanizado que reflexivo. Para los estudiantes la experiencia de trabajo con resolución de problemas en pequeños grupos, tal como se planteó para este estudio, resultaba inusual y esta fue su primera experiencia. La experiencia completa de implementación tuvo una duración de seis meses.

Contenidos y su tratamiento en las clases

Durante el período en que se realizó el seguimiento de los alumnos, se trabajaron las funciones cuadráticas, las exponenciales y logarítmicas. Estos contenidos se corresponden con el diseño curricular de la Provincia de Buenos Aires.

Antes de empezar con nuestro estudio, los alumnos habían repasado con el profesor el concepto de función, sus características y formas de representación, mediante exposición

dialogada. Luego se abordó función lineal, mediante una dinámica de taller, en pequeños equipos.

Metodología

Enfocamos nuestro estudio hacia lo que un grupo de aula de adolescentes en un ámbito natural de clase de Matemática realiza frente a situaciones problemáticas que invitan a resolver, explorar, a obtener regularidades y sobre todo a justificar, explicar, garantizar lo producido y a validar. En la experiencia fue importante el dispositivo didáctico que consistió en una secuencia de actividades, diseñadas y analizadas previamente, junto con la gestión de la clase, la cual se desarrolló en modo de taller en pequeños equipos. Enmarcamos nuestra investigación en una metodología de investigación acción. Entendemos la misma como aquel enfoque participativo, en base a un plan de realización, eminentemente práctico, permeable a cambios que mejoran la práctica de enseñanza durante la experimentación en pos de lograr mejores resultados observables en el aprendizaje de la validación (Reason & Bradbury, 2001; Romera Iruela, 2012). Para profundizar el análisis de las conductas observadas, consideramos además una muestra intencional de alumnos a los cuales hicimos un seguimiento especial de sus respuestas y reacciones en la clase frente a las actividades para el aprendizaje. Luego complementamos esta información con una entrevista a estos alumnos para que ellos dieran cuenta de los cambios en sus conductas en relación con la validación.

Esta metodología se mostró adecuada para nuestro estudio dado que la situación de aprendizaje fue en el escenario natural del aula, con un plan anticipado que fue poner en acción el dispositivo didáctico diseñado y observar su funcionamiento en una clase regular. Además el profesor-investigador intervino cambiando situaciones de aprendizaje “in situ” y “a posteriori” cuando el grupo no reaccionaba frente a lo propuesto, mejorando así la realidad del aula. La reflexión sobre lo sucedido en la clase, dio lugar en ciertas oportunidades a cambios según lo observado del funcionamiento de la propuesta didáctica. Tales modificaciones fueron por ejemplo: reformulación de preguntas, reacomodación de los grupos de trabajo, ajustes de problemas, devolución a los estudiantes sobre lo aprendido, reprogramación de los tiempos, etc. El profesor a cargo del curso gestionó la clase, puso en acto las actividades y realizó una observación participante, registrando lo sucedido al interior de cada uno de los grupos de trabajo. El profesor del curso, al ser también investigador, sabía que se debían activar procesos de validación, por lo cual sabía en qué momentos intervenir y bajo cuáles preguntas. Los cambios hechos clase a clase, el diseño de las actividades y su reformulación según los cambios del curso, fueron realizados por el profesor y supervisados en el seno del equipo de investigación del cual el profesor era parte, sobre la base de lo observado en la clase. Los datos se obtuvieron mediante la observación de acciones de los alumnos, orientada por una planilla resultante del análisis a priori de las actividades, y por notas de campo del profesor. El seguimiento de los alumnos se desarrolló durante cuarenta clases de dos horas cada una, distribuidas a lo largo de un semestre.

La planificación previa: las actividades para la clase

Criterios para un diseño de actividades que favorezcan la validación

Adoptamos criterios para desarrollar actividades para la clase que activen los procesos de validación y que fueran realizables en el contexto descrito. Para la elaboración de dichos criterios tuvimos en cuenta los trabajos de Brousseau (1995), quien sostiene la necesidad de generar una dialéctica de argumentación de defensa y refutación a partir de una situación adidáctica. Por su parte, Duval (1999) y Hanna (2000) se refieren al aprendizaje de la demostración, considerada como parte de la validación, planteando una forma de acceder a dicho aprendizaje mediante actividades que abran vías facilitadoras tales como la exploración, la explicación, la argumentación, la visualización, la conjeturación. Por último, otro trabajo que hemos tenido en cuenta para el diseño de las actividades es el de Arsac (1992) el cual se refiere a las características de las situaciones de enseñanza para la apropiación de las reglas del debate matemático.

En relación con lo expuesto en el párrafo anterior y teniendo en cuenta el contexto de trabajo, hemos adoptado los siguientes criterios para diseñar las actividades: a) que presentaran un desafío para el grupo de estudiantes descrito, lo que implicaba que no se visualizara la solución de forma inmediata, así como también que no resultaran evidentes los modos de resolver la actividad planteada; b) que el alumno estuviera en contacto con algunos aspectos del contenido antes de que éste fuera presentado y organizado por el profesor; c) que diera lugar a la exploración y, en la medida de lo posible, a la conjeturación; d) que en ellas se trabajaran distintos registros semióticos y que los mismos se relacionaran entre sí; e) que la elaboración de razones estuviera ligada a la toma de decisiones para que responda a una necesidad del alumno y no una exigencia del profesor; f) que pudieran realizarse en equipos promoviendo la discusión y el intercambio; y g) que pudieran, en conjunto, manifestar la mayor cantidad posible de acciones de validación.

Análisis a priori

Arsac (1992) señala que es necesario prever lo que puede pasar con el funcionamiento de una situación para gestionar mejor lo que sucede durante la validación y sacar más provecho para los fines para los que fue diseñada. En este sentido, anticipamos cuáles serían las posibles acciones de validación (ver marco teórico) que cada ítem permitiría desarrollar en la puesta en acto de las actividades. Las acciones son contextualizadas de acuerdo a cada actividad, por ejemplo cuando nos referimos a *A11 (Ejemplificar mostrando regularidades)* en un problema de función cuadrática donde debe emerger una fórmula, identificamos que deben dar ejemplos de cómo es el cálculo en cada caso numérico, lo cual se ve con detalle en la sección *Ejemplo de actividad, de confección de tabla y de registro*. A partir de este análisis, se confeccionó una planilla que permitió orientar y agudizar la observación y el registro de lo sucedido al interior de la clase. Si durante el desarrollo de la clase, alguno de los alumnos manifestaba una acción de validación que no había sido prevista, también se tomaba nota de ella para luego incorporarla en el análisis.

Se diseñaron e implementaron treinta y cuatro actividades, de las cuales veintinueve eran más propicias para analizar comportamientos en relación con la validación.

La gestión de la clase

En general la clase comenzaba con la resolución en pequeños grupos de la actividad propuesta. Para ello, se disponía un tiempo (dependiente de las características de la actividad y del avance en su resolución) para que los alumnos no sólo pudieran resolver la situación sino que además generen razones que permitan justificar lo realizado. Durante ese período el docente transitaba por cada grupo observando lo producido por sus integrantes y atendiendo las consultas de modo que no diera pautas sobre cómo resolver una determinada actividad ni respondiera sobre la validez de lo realizado por los alumnos mediante apreciaciones del tipo “correcto-incorrecto” o “bien-mal”. Una vez concluido el trabajo grupal, se retomaba en la pizarra la resolución propuesta por los diferentes grupos, las dificultades, las preguntas o inquietudes surgidas y, con mayor profundidad, la exposición de las razones dadas por los estudiantes que garantizaban que lo producido era válido.

La observación participante

La observación del docente estuvo orientada mediante una planilla (ver tabla 1), efectuada luego del análisis a priori, en la cual se registraba la frecuencia con la que emergía cada acción de validación. Además, se tomaban algunas notas sobre aspectos cualitativos que se ampliaban, en un diario de clases, inmediatamente después de cada clase.

Con la intención de sistematizar lo manifestado en las clases en relación con las acciones de validación que se sucedieron, se elaboró la tabla 2.

La selección de una muestra intencional para seguimiento particularizado y entrevista

Además de la observación de todo el grupo de clase, se seleccionó una muestra intencional de seis estudiantes de la clase de los se observó de qué manera manifestaban las acciones de validación. Mientras se registraba mediante planilla lo que sucedía al interior de todos los equipos de trabajo, también se tomaba nota del comportamiento de estos estudiantes en particular. De ellos se consideraron producciones en clase, test de evaluación y entrevista personal. Profundizamos el estudio de estos seis casos, pues reconocemos que, además de la presencia o ausencia de las acciones, es necesario conocer la asignación de sentidos que el estudiante otorga a los objetos matemáticos con los que trabaja. Por otro lado, reducir la cantidad de alumnos a observar nos permitió profundizar en esos aspectos. Se eligieron seis estudiantes según el desempeño manifestado antes de implementar la propuesta de enseñanza, en cuanto a sus habilidades, competencias, y dificultades en el estudio de la Matemática. Se consideró para su selección, la calidad de las producciones e intervenciones de los alumnos en la clase y los resultados en las evaluaciones durante el período previo al inicio de la investigación. Dos de ellos tenían un desempeño bajo, con dificultad para aprender Matemática y desagrado por la materia, otros dos con desempeño medio, que lograban con mucho esfuerzo entender las cuestiones específicas de la asignatura, y dos con muy buen desempeño, interesados en la asignatura, inquietos para abordar desafíos matemáticos y aplicados en el estudio. Se eligieron estos tres tipos de es-

tudiantes para poder ver cómo se manifestaban los aspectos cualitativos de las acciones de validación en cada tipo. El número de seis nos pareció abordable y con ellos teníamos más posibilidades de conservar uno de cada tipo. Las personas fueron elegidas teniendo en cuenta además la regularidad de asistencia a las clases de Matemática para contar con un registro continuado sobre su actuación.

Ejemplo de actividad, de confección de tabla y de registro

De lo descripto, presentamos, a modo de ejemplo, un esquema resumido en el que mostramos:

- a) Una situación problemática planteada a los alumnos.
- b) Las acciones de validación identificadas a priori para dicha actividad que se espera que los alumnos manifiesten.
- c) El resultado del seguimiento global del grupo en su totalidad, que es la contabilización de los alumnos que han manifestado esa acción u otra que haya surgido
- d) Las notas del profesor en relación con lo manifestado por los alumnos de la muestra reducida. Se han nombrado a estos estudiantes como AL1 y AL2, de buen desempeño, AL3 y AL4, de desempeño medio y AL5 y AL6, de desempeño bajo.

Actividad implementada

El precio de un espejo cuadrado depende de su tamaño y de si incluye marco de madera o no. El metro cuadrado de espejo cuesta \$30 y el metro lineal de marco de madera cuesta \$15

- a. Con \$337,50 ¿De qué medidas se puede comprar un espejo sin marco? ¿Y con marco?
- b. Si el precio del marco es de \$150, ¿Puede determinar el precio total del espejo? Si es posible, hallarlo; si no, decir qué dato agregaría.
- c. ¿Qué información necesita para conocer el precio total del espejo? ¿Cómo determina el precio con esa información?

Análisis a priori: Acciones de validación previstas.

- *A11 Ejemplificar mostrando regularidades.*
 - Se espera que los alumnos determinen una fórmula, aunque sea empírica, sin descripción literal, pueden reemplazar la variable por los valores adecuados al problema y mostrar que el resultado obtenido es el precio dado como dato.
- *A17 Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen:*

- Se espera que los alumnos reconozcan que la fórmula propuesta para modelizar la relación entre medidas y precio resulta adecuada, en tanto funciona para el caso dato a) y puede, con las variables presentadas, obtener resultados razonables de acuerdo a la situación.

En la primera columna de la siguiente tabla se muestran las acciones de validación manifestadas en la implementación, en la segunda columna se registra el total de alumnos de la clase que ha utilizado cada acción y en la última columna se describe el modo en que los estudiantes de la muestra lo han manifestado.

Tabla 1 — Acciones de validación manifestadas

Acciones de validación	Seguimiento global	Seguimiento particular
Ejemplificar mostrando regularidades	13	Ítem c: AL4 y AL6 encuentran una fórmula correcta y muestran que la misma se corresponde con la situación. Nombran x a la medida del lado del espejo y muestran que al reemplazar la variable x por los valores con los que trabajaron en los ítems anteriores se corroboran los resultados. Por ejemplo, el caso de $x = 2,5$. Por otra parte, para justificar la fórmula AL5 muestra los ejemplos previos que le permitieron plantearla, en relación con 3cm, 2cm y 5cm. Es decir, menciona que funciona para esos valores.
Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen	14	Ítem a y c: AL1, AL2 y AL3 reconocen que la fórmula de la situación debe ser $30x^2 + 60x$, donde x representa la medida del lado del espejo, pues mencionan que x elevado al cuadrado representa el área del espejo y por lo tanto, el primer término da información sobre cuánto se paga por el espejo y el segundo término cuánto se paga por el marco (haciendo referencia a los valores propuestos en el enunciado).

Análisis de Actividades

Seguimiento del conjunto de la clase

A continuación se muestra una tabla que contabiliza las ocurrencias de las acciones de validación estudiadas durante la implementación sobre el total de alumnos que asistieron cuando se realizó cada actividad, cantidad que varió entre 18 y 20 alumnos. Anotamos

Una primera lectura de los valores recopilados en la tabla anterior muestra una gran fluctuación en el uso de las diferentes acciones de validación. Por ejemplo, se observa en las acciones A3 *Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver*, y A13 *Explicar, dando razones y relaciones* que, estando presente en muchas actividades, tienen un porcentaje de manifestación oscilante. En este sentido, no pareciera existir un aprendizaje en el uso de las acciones en la mayoría de los estudiantes. En particular, si se compara de forma independiente lo sucedido en los temas trabajados tampoco se percibe una regularidad evidente en la manifestación de las distintas acciones.

A partir de los valores de la tabla, observamos que la acción de validación con mayor ocurrencia durante el desarrollo de las clases resulta ser A13 *Explicar, dando razones y relaciones*. Es posible que recurrir a las explicaciones resulte ser una práctica más cercana o habitual de estos alumnos, para quienes la validez de los conocimientos era una responsabilidad del docente, quien, generalmente, recurría a explicaciones y exposiciones para lograrlo.

Otra de las acciones que presenta alta frecuencia es A10 *Describir, mostrando pasos y procedimientos*. Los alumnos consideran que describir lo que hicieron es suficiente validación de lo obtenido.

Por otra parte, de los valores sistematizados en la tabla se observa que para la acción A14 *Comparar* se han diseñado seis actividades que posibilitarían su aparición, sin embargo, los alumnos han manifestado esta acción sólo en una de ellas. Quizás, y en relación con lo mencionado anteriormente, no les es posible establecer semejanzas o diferencias entre lo actual y lo trabajado en el inicio con este tipo de metodología donde la detección de vínculos con lo previo recae primordialmente en los estudiantes.

Por último, al contrastar la información que se exhibe en la tabla con las acciones de validación previstas en el análisis a priori observamos que si bien en algunas actividades los estudiantes recurren al uso de acciones que no fueron contempladas en el análisis previo, son las acciones anticipadas aquellas que se utilizan con mayor frecuencia. De esta manera se sostiene la importancia del análisis a priori en relación con la anticipación de las acciones de validación que se desarrollarían y, al mismo tiempo, se pone en evidencia la necesidad de reforzar actividades que permitan fomentar, favorecer y hasta promover el uso de alguna acción de validación por sobre otras, por ejemplo, la acción A14.

Lo manifestado por los alumnos de la muestra intencional

En esta sección, se presenta cómo se han manifestado en los alumnos de la muestra intencional ciertas acciones específicas durante todo el proceso de estudio de los temas *función cuadrática* y *funciones exponencial y logarítmica*. Además, se identifica si las acciones trabajadas permitieron conducir hacia alguno de los tipos de prueba pragmática o intelectual (Balacheff, 1987; Brousseau, 1995). Finalmente, se comentan las apreciaciones de estos estudiantes, indagadas en una entrevista, en relación con sus aprendizajes de la validación.

Análisis de las acciones

En relación con tema *función cuadrática* retomamos las acciones A3 *Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados con la actividad a resolver*, A13 *Explicar, dando razones y relaciones* y A17 *Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen*. Para el tema *funciones exponenciales y logarítmicas* se consideran las acciones A10 *Describir, mostrando pasos y procedimientos* y A13 *Explicar, dando razones y relaciones*.

Las acciones de validación seleccionadas son aquellas con mayor ocurrencia a lo largo del proceso de estudio de los contenidos matemáticos, esto es, fueron anticipadas en el análisis preliminar en la mayoría de las actividades o bien se han manifestado en mayor medida en la implementación de las actividades. Como se ha mencionado, se han nombrado a los estudiantes de la muestra como AL1 y AL2, de buen desempeño, AL3 y AL4, de desempeño medio y AL5 y AL6, de desempeño bajo.

Comenzamos el análisis con acción A17 *Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen* y determinamos que los seis alumnos han logrado utilizarla cuando tienen que validar una fórmula o un gráfico. Por ejemplo, en la actividad que se presenta en la sección *Ejemplo de actividad, de confección de tabla y de registro* los estudiantes pudieron reconocer cuándo su propuesta se adecuaba a la actividad, aunque sólo AL1, AL2 y AL3 interpretan la información global que brinda la fórmula en relación al contexto en el que se desarrolla el problema. Es decir, explican, sin necesidad de ejemplos, por qué la fórmula es $30x^2 + 60x$, mencionando que la variable x representa la medida del lado del espejo y que el primer término da información de cuánto se paga por el espejo y el segundo, cuánto se paga por el marco. Por otra parte, los seis alumnos son capaces de determinar si un gráfico, ya sea propio o dado, se ajusta a la situación en cuestión porque o bien interpretan la información presente en él o identifican incoherencias entre el gráfico y la situación.

En relación con la acción A3 *Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados con la actividad a resolver*, podemos señalar que los alumnos optan por justificar por procedimientos en lugar de apelar a una definición. Por ejemplo, en el caso de validar la solución de una ecuación cuadrática sólo dos de ellos, AL1 y AL2, mencionan que el número obtenido es solución por ser aquél que satisface la igualdad, mientras que el resto justifica por haberlo obtenido luego de realizar la transposición de términos.

En cuanto a la acción A13 *Explicar, dando razones y relaciones*, los seis estudiantes de la muestra distinguen relaciones entre los diferentes objetos matemáticos que manipulan y las utilizan en sus respuestas. Algunas razones o relaciones usadas son: relacionar una fórmula de una función con su representación gráfica, señalar que dos puntos dados resultan ser simétricos pues sus abscisas están a la misma distancia del eje de simetría, dar un valor aproximado para la imagen de una función evaluando su expresión en los extremos de un intervalo, etc.

Para la acción A10 *Describir, mostrando pasos y procedimientos* los alumnos suelen mostrar los pasos que han realizado y los procedimientos utilizados en la resolución de la actividad como forma de justificar. Por ejemplo, en un problema de crecimiento

exponencial, asociado a una función exponencial de base 2, AL5 describe cómo va aproximando en cada paso el tiempo para el cual la cantidad de bacterias es de 250000. Para ello calcula la cantidad a las 17 y 18 horas mediante 2^{17} y 2^{18} respectivamente. Luego, elige valores cercanos a 18 (tales como 17,9; 17,96; 17,965) pues sostiene que por los cálculos realizados el número buscado resulta próximo a 18. Menciona que continuando de esta manera se encuentra el valor 17,94959.

Por último, distinguimos que si bien las cuatro acciones de validación que se contemplaron en esta sección se han manifestado en el discurso de todos los alumnos de la muestra, se perciben ciertas diferencias en cuanto a cómo fueron utilizadas por cada uno de ellos. Por ejemplo, aunque todos manifiestan la acción A3 *Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados con la actividad a resolver*, las elecciones sobre qué objeto usar son diferentes, por ejemplo, algunos apelan a definiciones y otros a procedimientos. Al mismo tiempo, observamos que las formas de reconocer que lo producido resulta adecuado al problema de origen (acción A17) varían en los diferentes alumnos. Asimismo, algunas de las razones dadas por los estudiantes al explicar (acción A13) también se diferencian, por ejemplo, para justificar que $x = -\frac{3}{2}$ no es la abscisa del vértice de una parábola que tiene por raíces a $x = 5$ y $x = -2$, AL2 menciona que el eje de simetría se debería encontrar en $x = \frac{3}{2}$, por ser la mitad entre 5 y -2 . Sin embargo, AL3 sostiene la falsedad de esa afirmación sin encontrar el valor correcto para el eje de simetría sino que señala que la distancia desde $x = -2$ a $x = -\frac{3}{2}$ es mucho menor que la distancia entre $x = 5$ y $x = -\frac{3}{2}$. Además, a pesar que los alumnos utilicen la acción A10 *Describir, mostrando pasos y procedimientos* se observan diferencias en los procedimientos que llevan adelante. Por ejemplo, mientras que algunos aproximan el tiempo t para el cual $2^t = 2500$ por medio del tanteo, otros señalan que el primer paso es realizar un gráfico para encontrar el intervalo donde se encuentra el valor de t pedido y que recién en un segundo paso se aproxima dicho valor mediante los cálculos.

Los tipos de prueba según Balacheff y su vinculación con las acciones de validación

En los desempeños de los estudiantes de la muestra hemos podido observar algunos de los tipos de prueba presentados por Balacheff (1987). Asociamos en los diferentes tipos de prueba que identificamos las acciones de validación que se manifestaron con la intención de observar si había alguna relación o recurrencia entre el tipo de prueba y las acciones de validación. A modo de ejemplo de la asociación que hicimos, presentamos algunos casos a continuación:

Tabla 3 — Tipos de prueba y acciones de validación

<i>Empirismo Ingenuo</i>	
<i>EJEMPLO</i>	Actividad de aumentos acumulativos, interés capitalizado.
<i>PRESENTACIÓN</i>	AL2 sostiene que la expresión que permite hallar el monto de dinero para una capitalización con x periodos en el año está dada por $\frac{1000}{1+r}(1+r)^x$.

	Determina el monto de dinero obtenido al finalizar un año cuando la capitalización es cuatrimestral, y por lo tanto hay tres períodos, mediante el cálculo $\frac{1000}{3^3}4^3$, cuando la capitalización es semestral (dos períodos) por medio de $\frac{1000}{2^2}3^2$ y cuando es trimestral (cuatro períodos) a través de $\frac{1000}{4^4}5^4$.
ACCIONES DE VALIDACIÓN OBSERVADAS	A4 <i>Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad)</i>
Experiencia Mental	
EJEMPLO 1	Actividad en la que se pide hallar el exponente x de forma que 10^x dé por resultado diferentes valores expuestos en una tabla, entre ellos -10 .
EXPLICACIÓN	AL2 menciona que cuando x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto el resultado de realizar 10^x será cada vez más pequeño y se aproximará a cero pero nunca resultará menor que él por lo que no es posible que se pueda alcanzar el valor -10 . Aquí observamos cómo el alumno retoma y utiliza de forma autónoma propiedades y características propias de una función exponencial de base mayor a uno para sostener su respuesta.
ACCIONES DE VALIDACIÓN RELACIONADAS	A13 <i>Explicar (dar razones y relaciones)</i>
Ejemplo Genérico	
EJEMPLO 1	Actividad contextualizada que se representa mediante la expresión $f(x) = 3^x - 1$.
EXPLICACIÓN	AL1 y AL2 identifican que el número que suma a la potencia en la fórmula de la función corresponde con su asíntota, pues si las funciones del tipo a^x tienen asíntota cero implica que los valores se aproximan al cero, con lo cual cuando se le sume (o reste) un valor, la asíntota va a ser ese número, pues las imágenes que antes se acercaban al cero ahora se van a aproximar a él.

En este sentido, para determinar que la asíntota de la función es la recta de ecuación $y = -1$ estos alumnos muestran que para valores de x negativos menores que -3 , la distancia entre las imágenes correspondientes y el número -1 es muy pequeña. Mencionan que si se continúa con valores del dominio cada vez menores (pero de mayor valor absoluto), esa distancia se hace más chica todavía (tanto como uno quiera).

***ACCIONES DE
VALIDACIÓN
RELACIONADAS***

A3 Usar fórmulas, definiciones o procedimientos conectados a la actividad a resolver

En el análisis general, en mayor frecuencia se evidencia el empirismo ingenuo, asociado en varias ocasiones con la acción A4 Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad). Este tipo de prueba se presenta en situaciones donde los alumnos intentan justificar que una expresión o un gráfico son correctos a través del reconocimiento de ciertas regularidades observables. En relación con el ejemplo genérico, si bien se manifiesta el uso de este tipo de prueba, no encontramos alguna regularidad que permita establecer una asociación entre esta y las acciones de validación estudiadas. Por otra parte, sí existen evidencias del uso de la experiencia mental en algunas actividades que permiten asociarla en distintas oportunidades a la acción A13 Explicar (dar razones y relaciones).

Entrevistas: apreciaciones de los estudiantes

Luego de concluido el período de implementación de la propuesta, se entrevistó a cada uno de los seis estudiantes que conformaron la muestra, para conocer las apreciaciones de estos estudiantes sobre las dificultades presentes en el proceso de aprender a validar. El guión de las entrevistas se realizó en conjunto por el equipo de investigación y las entrevistas fueron hechas por un investigador que no fue el profesor del curso. Algunas de las preguntas se focalizaron en las interacciones que se produjeron entre los alumnos en el curso. Al respecto, se pretendía conocer sobre los intercambios, si en éstos se discutía cómo resolver la actividad o cómo generar las garantías de lo producido. También se pretendió averiguar si los alumnos reconocieron algún progreso personal en Matemática que pudiera asociarse a la propuesta. Además, se indagó sobre el lugar que ocupó la justificación durante el desarrollo de la propuesta.

Todos los estudiantes han señalado que la forma de trabajo llevada a cabo resultó ser inusual para ellos y demandó un gran esfuerzo. Al respecto, uno de ellos manifestó que esto no se debe a que la propuesta conlleve una gran dificultad sino que el esfuerzo se debía a la falta de hábito ya que “uno solamente se dedica a hacerlo, ya me dieron las cosas entonces lo único que tengo que hacer es... hacerlo y nada más”. Por otro lado, dos de los estudiantes (los de menor rendimiento) sostuvieron que, en ciertos momentos o actividades, esta propuesta resultaba demasiado dificultosa y que el trabajo que ellos debían realizar se tornaba más complejo, al respecto uno de los alumnos dice: “también es como más difícil (...) hay que razonar mucho y relacionar”. Debido a esto, y ante la pregunta

de si elegirían nuevamente este tipo de trabajo en el que se pretende que validen, estos alumnos optaron por no tener que transitar por un proceso que demande esa exigencia, sino transitar por una propuesta que les resulte más accesible.

Sin embargo, el resto de los alumnos (cuatro de seis) frente a la misma pregunta destacaron que progresaron en sus conocimientos en Matemática. Uno de ellos señala: “como que a mí siempre me gustó resolver, resolver, nunca me gustó explicar lo que hacía, pero me di cuenta que si uno resuelve y entiende algo tiene que ser capaz de explicarlo”. Por último, destacamos que uno de los alumnos resaltó la propia posibilidad de “elaborar teoría”, reconociendo que éste resultó ser un aspecto favorable de la propuesta.

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la actuación de los alumnos frente a situaciones problemáticas en las cuales es necesario validar la elaboración y producción matemática propias. En este sentido, tratamos de indagar sobre las manifestaciones de las acciones de validación en el comportamiento de los estudiantes frente a situaciones problemáticas que invitaban a justificar o realizar una prueba, es decir acciones que los alumnos utilizarían recurrentemente para tratar de elaborar una prueba. Siendo que la experiencia se realizó enmarcada por la programación curricular en el ámbito escolar, que condiciona tiempos de ejecución, formas de evaluación, contenidos y destinatarios, consideramos que los resultados trascienden la “artificiosidad” del experimento eventual como en general se reporta en los estudios didácticos. En función de los resultados obtenidos en el seguimiento prolongado, observamos una gran fluctuación en los porcentajes de las manifestaciones de distintas acciones, que parecería mostrar que el hecho que se promuevan ciertas acciones de validación en muchas actividades y que los alumnos las manifiesten en algunas de ellas no significa que adquieran ejercicio y apropiación de esa acción en las siguientes actividades, ni siquiera correspondientes al mismo tema matemático. Las acciones se encuentran mayormente ligadas al tipo de actividad que se plantea más que al tema bajo el cual se efectúa la propuesta, por lo que una determinada acción puede manifestarse en un alto porcentaje en una actividad y ser casi inutilizada en otra del mismo tema. Por otra parte, tal como fue anticipado al principio clasificando las acciones de validación dentro de los aspectos personales, la forma en la que se utiliza una determinada acción de validación puede variar de un estudiante a otro. A raíz de las entrevistas, consideramos que las habilidades, dificultades y actitudes que cada uno de ellos posee en Matemática influyen en la particularidad de la manifestación de las distintas acciones.

La enseñanza a través de resolución de problemas llevada a cabo en esta experiencia, presentando el contenido matemático mediante un contexto de aplicación de la matemática, no se ha mostrado suficientemente efectiva para estos alumnos para incorporar prácticas propias del debate matemático (Arsac, 1992) tales como la elaboración de contraejemplos para invalidar un enunciado (a la que podríamos asociar las acciones A6: ejemplificar, A17: reconocer adecuación), hacer explícitas las propiedades que se asumen para la resolución y la validación (a la que podríamos asociar las acciones A3: cuestiones

conectadas con la actividad, A8: elegir justificadamente, A17, A19: identificar condiciones, etc.), el reconocimiento de que los ejemplos que verifican un enunciado no son suficientes para probar que eso es verdadero (a la que podríamos asociar las acciones A6, A17, etc.). De lo dicho, se nos plantea el interrogante de cómo avanzar hacia un aprendizaje efectivo de la validación en las aulas, con restricciones de tipo institucionales, de prescripción curricular, de programación temporal y de acreditación de conocimientos. En estos ámbitos, como el que se desarrolló nuestra experiencia, se dificulta sostener una práctica de validación que incluya aspectos deductivos y un discurso de tipo argumentativo, con recursos que trasciendan la actividad presentada y que trasciendan las características personales de los alumnos. En la entrevista personal ellos expresaron la dificultad en resolver problemas y en mantener la conducta de dar razones y explicaciones de lo que hacían. Esto, junto con los valores cuantitativos obtenidos en el seguimiento global, da cuenta de la dificultad que existe en revertir el aprendizaje tradicional centrado en la práctica mecanizada y sujeta al modelo de trabajo presentado por el profesor. Aunque durante toda la experiencia se intentó romper con la dinámica: “explicación del profesor — desarrollo del tipo de actividad por parte del profesor — replicación de lo realizado por el profesor por parte del alumno con mínimas variantes”, para instalar una dinámica de acción autónoma frente a la situación y de intercambio entre pares, esto no fue suficiente para provocar aprendizajes sustantivos en validación ni generar una “actitud de prueba” (Brousseau, 1995) en los que participaron en la experiencia, salvo en aquellos que tenían ya una predisposición y buen desempeño anterior, quienes no dejaron de señalar que les resultaba más complejo, aunque más interesante, esta forma de estudiar matemáticas.

En relación con las categorías de estudio de la validación introducidas por Balacheff (1987) mediante los tipos de prueba, podemos decir que si bien observamos que algunas acciones de validación se relacionaron con las pruebas pragmáticas o las intelectuales, no es evidente la existencia de algún tipo de emparejamiento que permitiera asociar un conjunto de acciones con un tipo de prueba en particular. Pensamos que el hecho de considerar las acciones de validación en lugar de limitarnos a identificar tipos de prueba ha sido más conveniente por ser más analítico y operativo al momento de observar los mecanismos de validación en el aula.

Notas

1 El trabajo de este autor para este artículo fue subvencionado mediante la Beca para Graduados en docencia e investigación de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

2 El término “institucional” es usado aquí en el mismo sentido con el que lo utilizan autores como Chevallard (1992), Gascón (1998) y Godino y Batanero (1994).

Referencias

Alcolea Banegas, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. *Contrastes. Revista Interdisciplinaria de Filosofía*, 7, 15–34.

- Arsac, G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège: Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Lyon: Presses Universitaires de Lyon-IREM.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.
- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T., & Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en Matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon* (72), 39–60.
- Bernardis, S. M., & Moriena, S. (2010). Análisis de pruebas en un entorno de geometría dinámica. *Yupana*, 10(5), 27–40.
- Brousseau, G. (1995). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–111.
- Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International Newsletter on Teaching and Learning in Mathematics Proof*. Recuperado el 6 de Mayo de 2015, de <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html>
- Falsetti, M., Marino, T., & Rodríguez, M. (2004). Validación en Matemática en situación de aprendizaje. In *Memorias del VI Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy: Edumat, Univ. Nac. de Luján.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7–33.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405–414.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–2), 5–23.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Herbst, P. (2000). The articulation and structuring of conceptions in the mathematics class: argument and public knowledge. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Recuperado el 3 de Mayo de 2015, de <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/000304Theme/000304ThemeUK.html>
- Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of the sum of two even numbers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 353–360). Norwich: PME.
- Reason, P., & Bradbury, H. (2001). Inquiry and participation in search of a world worthy of human aspiration. In P. Reason & H. Bradbury (Eds.), *Handbook of action research: Participative inquiry and practice* (pp. 1–14). London: Sage.
- Romera Iruela, M. J. (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. *Investigación en la escuela*, 78, 69–80.
- Sadovsky, P. (2005). *La Teoría de Situaciones Didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

- Sáenz Castro, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. In M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 47–62). Almería, España: Universidad de Almería.
- Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 15(2), 27–53.
- Selden, A., & Selden, J. (2000). *Proof, Validation, and Trains of Thought*. Recuperado el 14 de Junio de 2015, de Mathematical Association of America: <http://www.maa.org/question-2-proof-validation-and-trains-of-thought>
- Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–231.

Resumen. Se reporta aquí una investigación exploratoria sobre cómo un grupo de estudiantes del nivel secundario superior (16–17 años) valida su conocimiento matemático. La investigación fue realizada en las clases de un curso de una escuela de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Se estudian acciones que los estudiantes manifiestan en actividades diseñadas para promover la justificación, la confrontación, la defensa y la refutación. Mediante las acciones identificadas, los alumnos elaboran razones para construir un argumento y que pueda conducir a una prueba de tipo pragmática o intelectual (Brousseau, 1995). La experiencia se ha desarrollado en un ámbito escolar de clases regulares, con alumnos organizados en equipos de pares dentro de la clase, por tiempo prolongado. El estudio muestra una gran fluctuación en la apropiación de acciones para la validación, es decir recursos o acciones que son empleadas en un problema y podrían volver a emplearse en otros, no aparecen en el mismo grado que el anterior.

Palabras clave: validación en Matemática; prueba matemática; acciones de validación, enseñanza de la Matemática; escuela secundaria.

Abstract. In this article, an exploratory research on how a group of students of higher secondary level (16–17 years old) validates their mathematical knowledge is reported. The research took place in the classes of a course at a secondary school in Buenos Aires, Argentina. Actions that students manifest in activities designed to promote justification, confrontation, defence and refutation are studied. Through identified actions, students elaborate reasons to build an argument and may lead to a proof, either pragmatic or intellectual type (Brousseau, 1995). Although experience has developed into a time-extended regular school classes, in teams of peers, the study shows a large fluctuation in the appropriation of shares for validation, i.e. resources or actions that are used in a problem and could be used again in other one, they do not appear in the same degree as before.

Keywords: validation in Mathematics, mathematical proof, validation actions, teaching math in high school

■■■

MARCELA CRISTINA FALSETTI

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina
mfalset@ungs.edu.ar

JAVIER IGNACIO LUGO

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina
jlugo@ungs.edu.ar

(recebido em outubro de 2014; aceite para publicação em fevereiro de 2016)