A Resolução de Problemas: o legado de Pólya e uma leitura do CERME 2015

Problem solving: the legacy of Pólya and a reading of CERME 2015

Manuel Joaquim Saraiva
Universidade da Beira Interior e UIED, Portugal

Introdução

Falar sobre a resolução de problemas leva-nos inevitavelmente a Pólya (1945), um dos responsáveis por este tema estar na ordem do dia desde os anos 50 do século passado. Para o recordar recorreremos às palavras de um dos seus pupilos, Kilpatrick (2014), registadas numa entrevista recente dada à revista *Educação e Matemática*. Segundo elas, Pólya queria que os alunos vissem a Matemática em construção e não apenas como um produto acabado. A Matemática em elaboração é uma ciência indutiva produzindo os seus segredos através de palpites inteligentes, seguidos por cuidadosos testes, a que se seguem outros palpites aperfeiçoados, realçando o poder do exemplo específico para iluminar a generalização.

Ainda segundo as palavras de Kilpatrick (2014), Pólya distinguia os problemas rotineiros dos problemas não rotineiros, sendo estes, e para ele, os que permitiam tomar consciência do poder da Matemática. Neste sentido, para Pólya era imperdoável que na escola os alunos não tomassem contacto com problemas desta natureza. Naturalmente ele considerava importante a resolução de problemas rotineiros, que nunca deveriam ser encarados de forma exclusiva, mas é a aprendizagem de problemas não rotineiros o que permite que os alunos possam ganhar confiança na sua capacidade de fazer Matemática e não simplesmente absorvê-la — um aluno, em que toda a sua carreira escolar é gasta em aulas de Matemática em que nunca são propostos problemas que o desafiem, sai dela com uma visão completamente estéril do que a Matemática é e do que ela pode ser.

A resolução de problemas é ensinável e, para Pólya, os alunos não precisam ter capacidades específicas para aprenderem a resolver problemas. O que eles precisam é de sucesso na resolução de problemas e a confiança que daí resulta podem adquiri-la de um professor que seja sensível à necessidade que os alunos têm de ser bem-sucedidos. O professor terá de ser um ator — mostrar aos alunos como se pensa a resolver um problema (pensar em voz alta a resolver um problema), pois a imitação e a prática são o principal meio através do qual a resolução de problemas é aprendida.

Na entrevista de Kilpatrick (2014) são sintetizadas duas das questões fundamentais a tratar na abordagem deste tema — i) interesse/utilidade da resolução de problemas não rotineiros, e ii) o seu ensino e aprendizagem. Se a primeira questão é pacífica — é consensual —, o ensino e a aprendizagem da resolução de problemas não o é. Para alguns, a resolução de problemas, na escola, deve ser trabalhada no fim de terem sido ensinados os conceitos e ideias matemáticas para que os alunos apliquem o que aprenderam antes; para outros, nos quais se inclui o autor deste texto, a resolução de problemas deve ser trabalhada ao longo do ensino dos conceitos e das ideias matemáticas, com o intuito de desenvolver o raciocínio matemático e o espírito crítico dos alunos, tendo, assim, uma natureza transversal e não só de fim de capítulo.

Estudar a ideia chave da solução de um problema (Que importância tem? Como surge para o resolvedor? Como se relaciona com a atenção e a fixação do resolvedor?) é relevante e tem uma enorme importância didática. Isto, porque para a resolução de um problema é fundamental o surgimento de uma ideia que aponte para a sua resolução. Por sua vez, a promoção da descoberta de tal ideia no aluno resolvedor do problema será, porventura, um objetivo que um professor pretenderá alcançar, orientando, assim, o seu papel mediador.

Identificar características dos bons resolvedores de problemas não rotineiros é ganhar um conhecimento que pode ser projetado para todos os alunos — se aqueles fazem e pensam assim, porque não procurar que todos os alunos resolvedores de problemas não rotineiros desenvolvam tais características?

Refletir sobre resoluções feitas por outros (Será um bom promotor da resolução de problemas? Inibe o resolvedor, ou, pelo contrário, promove o raciocínio matemático e o espírito crítico e, em última análise, a resolução do problema?) também se assume relevante e com uma forte importância didática. Não se trata apenas de desbloquear momentos de impasse e de bloqueio, mas, essencialmente, expor os alunos a múltiplas perspetivas sobre um problema não rotineiro, o que pode promover, eventualmente, *skills* auto regulatórios. A importância didática resulta, entre outras, da chamada de atenção aos alunos para as semelhanças e diferenças dos métodos usados nas resoluções dos outros, orientando, assim, o papel de mediador do professor.

Distinguimos problemas da resolução de problemas. Preocupa-nos a natureza de um problema (não rotineiro; rotineiro; com contexto matemático, ou outro, como o real), porém, o que pretendemos apresentar e refletir neste texto é, essencialmente, a resolução de problemas não rotineiros. Estamos interessados nas ações que os resolvedores desenvolvem para os resolverem, em particular os bem-sucedidos em tal tarefa. Valorizamos, também, o papel mediador que pode desempenhar o professor.

Para um melhor enquadramento do que entendemos por problema não rotineiro [um problema "rotineiro" é muitas vezes designado por um problema "regular", um "exercício", para cuja resolução o resolvedor usa técnicas e regras já suas conhecidas e que são aplicadas de imediato para a resolução da situação], bem como com as suas características principais, concordamos com Felmer, Perdomo-Diaz, Giaconi e Espinoza (2015). Consideramos que um problema não rotineiro é aquele onde a pessoa que o resolve não sabe uma estratégia ou algoritmo para o resolver; algumas das características que têm os problemas não rotineiros: i) Precisam de mais reflexão e de mais tempo do que os problemas regulares ou exercícios; ii) Não podem ser resolvidos com uma regra simples, ou apenas relembrando e aplicando um facto conhecido; iii) Usualmente podem ser resolvidos usando estratégias diferentes; iv) Podem ter uma ou mais soluções; v) São desafiadores para a pessoa que está a resolvê-los; vi) Não têm de ser confundidos com problemas com contexto real, e vii) ter, ou não, contexto real não determina problemas não rotineiros.

Neste artigo, usaremos o termo "problema" com o sentido de "problema não rotineiro". Quando quisermos fazer referência a um problema rotineiro, tal será explicitado.

O CERME (*Congress of European Research in Mathematics Education*) tem vindo a assumir-se como um espaço de excelência onde se partilha e discute a temática da investigação em educação matemática, ao nível europeu. É uma referência obrigatória, embora não única, claro, para quem se preocupa com a investigação nesta área. A realização do CERME 2015, em fevereiro de 2015, leva-nos à curiosidade e, por que não dizê-lo, à "urgência" em refletir sobre o que nele foi dito e escrito.

O objetivo deste artigo, após recordar algum do legado de Pólya, é apresentar uma síntese e uma reflexão sobre o que foi lido em textos do CERME 2015 no que concerne à resolução de problemas. Para tal reflexão, selecionaram-se os textos publicados nas Atas do CERME 2015 onde os seus títulos faziam referência explícita à resolução de problemas, a saber: *The three faces of problem solving* (Dahl, 2015); *Developing student questioning when problem solving: the role of sample student responses* (Evans & Swan, 2015); *Problem solving teaching practices: observe rand teacher's view* (Felmer, Perdomo-Diaz, Giaconi, & Espinoza, 2015); *Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts* (Koichu, 2015); *Solving a problem by students with different mathematical abilities — a comparative study using eye-tracking* (Sajka, & Rosiek, 2015); *Unsolvable mathematical problems in kindergarten: are they appropriate?* (Tirosh, Tsamir, Leverson, Tabach, & Barkai, 2015). Tais leituras conduziram-nos: i) às ideias que surgem ao resolvedor de um problema para a sua resolução; ii) à identificação de algumas das características que os alunos bem-sucedidos apresentam e iii) à importância que poderão ter nos resolvedores de problemas as resoluções desenvolvidas por outros, e, de forma transversal, ao papel mediador do professor no ensino e aprendizagem da resolução de problemas em Matemática. Procurou-se, ainda, relacionar, entre si, as ideias apresentadas, bem como relacioná-las com outras, como a *Mediação semiótica na sala de aula de Matemática* (Bussi, & Mariotti, 2008) e a *Abstração em contexto e as ações epistémicas* (Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001).

A ideia chave da solução

Na procura de um modelo que oriente a aprendizagem da resolução de problemas, Koichu (2015) questiona-se com perguntas do tipo: i) Como é que os matemáticos resolvem problemas? Que fases e que ciclos é que eles seguem quando resolvem problemas?

Como, e se sim, podem as heurísticas de resolver problemas ser ensinadas? ii) Quais são os atributos da resolução de problemas de Matemática que vão para lá das heurísticas? iii) Como é que os atributos de resolução de problemas aparecem? Como é que ocorre a tomada de decisão quando uma pessoa resolve um problema? e iv) Que normas socio-matemáticas deveriam ser promovidas para suportar a autonomia intelectual dos alunos na resolução de problemas? Este autor pretende construir uma ferramenta para melhor compreender o processo que Pólya designou como uma fonte heurística embebida na fase da planificação da resolução de um problema. Assim, é seu objetivo responder às seguintes duas perguntas: 1. De onde pode vir a resolução de um problema?, e 2. Através de que atividades, e fontes, pode uma cadeia de desvios de atenção em direção a uma invenção de uma ideia chave para um problema matemático ser construída por um resolvedor de problemas em contextos educacionais socialmente diferentes?

Neste sentido, Koichu avança com o conceito de "ideia chave da solução", definindo-o como sendo uma ideia heurística que é inventada pelo resolvedor do problema e que evoca a convicção que a ideia pode ser mapeada para uma solução total (completa) do problema. Esta é uma solução que, para o conhecimento do resolvedor, será aceitável no contexto educacional no qual ocorre a resolução do problema. Como exemplos de ideias chave de solução são indicados: i) uma construção auxiliar que possibilite o resolvedor de um problema de geometria ver uma cadeia de deduções ligando os dados de um problema com o que é pedido para provar; ii) um caminho para associar os termos de uma equação trigonométrica sofisticada para que o resolvedor comece, por exemplo, a ver a equação como uma equação quadrática; e iii) uma forma de representar um problema de palavras como um grafo que faz a solução transparente (por exemplo, o problema das sete pontes de Euler).

Koichu (2015) constrói o seu *modelo de confluência* para a resolução de problemas (ver figura 1):

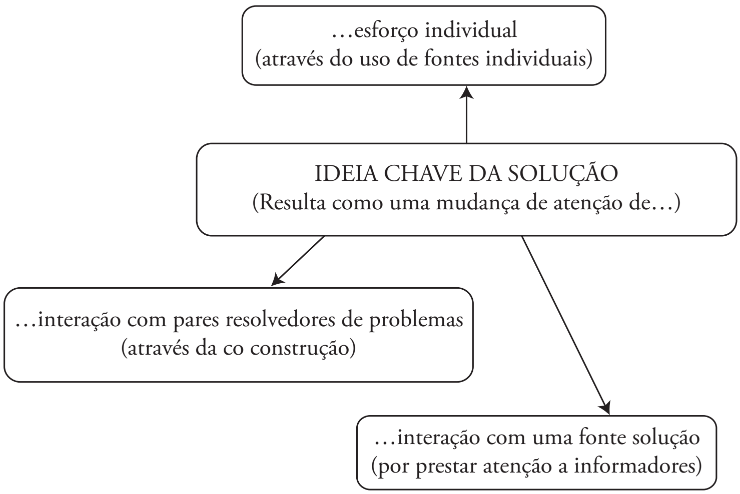

Figura 1. Modelo de confluência de resolução de problemas de Matemática

Neste modelo, uma ideia chave da solução não emergirá necessariamente de uma só vez e a sua invenção não é obrigatoriamente acompanhada por um momento "aha!", tal como acontece com uma ideia luminosa (*insight*). A sua estrutura assenta nas seguintes premissas:

I. Mesmo quando um problema é resolvido em colaboração, ele tem um resolvedor individual, ou seja, um indivíduo que inventa e eventualmente partilha a sua ideia chave de solução;

II. Uma ideia chave de solução pode ser inventada por um resolvedor individual como um *mudar de atenção* numa sequência da sua *mudança de atenção* quando enfrentou o problema.

Ou seja, e de forma geral, um caminho de um resolvedor de *mudanças de atenção* pode ser estipulado por: i) Esforço individual e por fontes; ii) Interações com os pares resolvedores que não sabem a solução e lutam pelos seus próprios meios com o problema, ou tentam resolvê-lo em conjunto; e iii) Interação com uma fonte de conhecimento acerca da solução, ou de partes dela, tal como um livro, a Internet, um professor, ou uma turma que já encontrou a solução mas ainda a não disponibilizou.

Estas três possibilidades podem ser usadas separadamente, ou complementando-se cada uma delas, numa resolução de problemas, evidenciando, assim, a importância do trabalho colaborativo e relacional, seja com os colegas da turma, seja com o professor, ou com artefactos diversos, como o manual escolar ou a Internet. Segundo Koichu (2015), a teoria de Mason relativa às "mudanças de atenção" serve como uma teoria que abraça a estrutura do seu modelo de confluência e ele identifica a invenção de uma ideia chave de solução como sendo uma mudança de atenção. Recordemos que, segundo Mason (2010), a aprendizagem é uma transformação de atenção que envolve mudanças na forma e no foco de atenção, onde, para aquele autor, a atenção é interpretada como sendo não só o que é observado por um indivíduo mas também o como é que os objetos são observados. Agarrar a totalidade é a estrutura da atenção onde a pessoa está a contemplar o todo sem focar-se no particular. Discernir os detalhes é uma estrutura da atenção na qual a atenção de uma pessoa é apanhada por um detalhe concreto que se torna distinto do resto dos elementos do objeto observado. Porém, e para Mason (2010), discernir detalhes não é algorítmico nem logicamente sequencial. Reconhecer relações entre os elementos discernidos é um desenvolvimento a partir dos detalhes discernidos que ocorre muitas vezes de forma automática, referindo-se a conexões específicas entre elementos específicos.

É assim que Koichu (2014) questiona o porquê de um indivíduo fazer mudanças de atenção de um objeto para um outro na forma como o faz. Ou seja, o processo de inventar uma ideia chave de solução é visto como um caminho de mudança de atenção dos resolvedores, nos quais os objetos incorporados na formulação do problema ou na imagem da situação do problema são atendidos e mentalmente manipulados pela aplicação de esquemas disponíveis. O processo em geral é direcionado a uma meta, mas mudanças concretas podem ser esporádicas. Assim, e para Koichu (2014), um caminho de mudanças de atenção depende de vários fatores, incluindo: 1. As características dos resolvedores; 2. As fontes afetivas, cognitivas e matemáticas do resolvedor; e 3. O contexto no qual se resolve o problema.

A mudança de atenção depende dos recursos individuais do resolvedor, sejam eles afetivos, cognitivos e/ou matemáticos. Torna-se claro, por exemplo, que um aluno com uma experiência matemática diferente da de um outro colega seu, como na prática da resolução de situações da complexidade da que está a resolver, a sua atenção "é chamada" para determinados aspetos da situação e muda-a, muito provavelmente, para um outro aspeto diferente — esteja explicitado na situação, ou exista nos seus recursos previamente adquiridos, nomeadamente matemáticos.

O contexto no qual se resolve um problema, e particularmente o contexto do próprio problema, é um suporte para o aluno resolver a situação que lhe é colocada (Dahl, 2015). Porém, se o aluno estiver perante um contexto que não lhe é familiar, ou do qual tem "más recordações", é natural que a sua atenção fique condicionada, levando a que ela, bem como a sua respetiva mudança, se processe de maneira diferente da de um outro colega seu, cuja relação com o contexto seja mais próxima.

Relativamente à importância do contexto, Tirosh, Tsamir, Leverson, Tabach e Barkai (2015) afirmam que alguns alunos voltam-se para ele no sentido de encontrar uma solução prática, pelo que devemos estar abertos para soluções resultantes das normas culturais relacionadas com o contexto em causa. Na perspetiva de Koichu (2015), isto significa, certamente, que a atenção, e a sua mudança, e muito concretamente a criação de uma ideia chave da solução, estará ligada não só ao contexto do problema, e no qual se resolve o problema, mas também às normas culturais associadas ao contexto. Para um professor, ter este aspeto em conta é importantíssimo para o seu papel mediador. Ele é fundamental para a procura e elaboração das tarefas a propor aos alunos, bem como para a sua dinamização em sala de aula.

Características dos bons resolvedores de problemas

Com a preocupação de identificar diferenças e semelhanças no processo de resolução de problemas por alunos matematicamente dotados e por alunos que não evidenciem tais talentos, Sajka e Rosiek (2015) estudam aspetos da atenção dos resolvedores dos problemas, embora sem recorrerem ao modelo de confluência de Koichu (2015), nem à teoria da mudança de atenção de Mason (2010). Recorrem à metodologia do seguir a trajetória do olhar (*eye-tracking*) e referem as seguintes diferenças encontradas: i) O tempo de análise do enunciado do problema; ii) O número e a colocação das fixações [paragem do olhar num determinado aspeto]; e iii) O número de fixações enquanto é analisado o enunciado do problema. Para aquelas autoras, a *duração do tempo total da resolução de um problema* não é um parâmetro importante de diferenciação e a *rapidez de resolução de um problema* também não é uma característica dos alunos matematicamente dotados. Por outro lado, o número de fixações representa uma medida sensitiva e de confiança que pode levar a intuir algo. Segundo Sajka e Rosiek (2015), os participantes mais eficientes desenvolvem estratégias adequadas, isto é, "sabem para onde olhar". Há uma correlação entre o número de fixações e a eficiência dos participantes na resolução da situação, afirmando que as diferenças podem encontrar-se na forma de olhar um problema, bem como na leitura que os alunos fazem das representações matemáticas. Afirmam, ainda, que os alunos precisam de aprender "como ler problemas de Matemática".

Sintetizam a sua investigação afirmando que:

1. A média de tempo total da resolução do problema pelos alunos dotados foi a mesma que a de todos os participantes no estudo.

2. O tempo total de resolução de um problema pelos alunos dotados foi muito diversificado (alguns rápidos, outros médios e outros lentos). A rapidez não foi um parâmetro dos alunos dotados matematicamente.

3. O tempo de análise do enunciado do problema foi um diferenciador entre o grupo de alunos dotados e os não-dotados. Aqueles dedicaram em média 65,9% do tempo total da resolução dos problemas para analisar a formulação do problema, enquanto os não-dotados devotaram apenas 36,5% do seu tempo a este propósito.

4. Os alunos dotados concentraram-se na formulação (enunciado) do problema e encontraram o número máximo de fixações na área da informação crucial, que tinha de ser um ponto de partida para a descoberta da resposta correta — eles sabiam para onde olhar. Pelo contrário, os outros alunos olharam para vários locais, de uma forma semelhantemente caótica.

5. O número de fixações durante a análise do enunciado do problema foi também um diferenciador entre os dois grupos. Quer o número médio de fixações, quer o seu número máximo para os alunos dotados foram o dobro relativamente aos alunos não dotados.

Para as autoras, as fixações eram sintomas visuais de esforço mental e de motivação para resolver o problema, ou seja, os alunos não dotados não estavam suficientemente motivados para resolver o problema ou para fazerem um esforço mental.

De acordo com esta investigação, e para uma boa aprendizagem para resolver problemas, devemos insistir para que os alunos gastem mais tempo na leitura e interpretação do enunciado (mantenham a sua atenção/fixação). Tal pode promover-lhes a possibilidade de se concentrarem nos aspetos mais relevantes do próprio problema e, assim, estabelecerem estratégias de resolução, nomeadamente a invenção de uma ideia chave da solução.

Confirmam-se ainda determinadas caraterísticas dos alunos bem-sucedidos, como o alcance da ideia chave da solução (que passará pelo estabelecimento de uma estratégia para a concretizar). Observam-se mudanças de atenção em função dela, numa direção para implementar, por exemplo, a solução apropriada, elegante, eficiente e generalizável. Registam-se, ainda, fixações mais frequentes em torno do que o aluno pensa ser mais importante. Destaca-se também a persistência do resolvedor bem-sucedido.

Esta investigação vem confirmar a sabedoria popular de que "depressa e bem não há quem". Vem, também, dar conhecimento aos professores de que não é na quantidade que deverá assentar o ensino da Matemática, em particular no ensino da resolução de problemas. A mediação do professor deverá canalizar-se no sentido de uma sensibilização dos alunos para a importância da fixação, paragem do olhar em determinados aspetos do enunciado do problema, para a interpretação, e total compreensão do enunciado, mesmo que para isso seja "gasto" mais algum tempo. Assim, o professor poderá estar a contribuir para que um aluno deixe de executar determinadas ações, certas resoluções, do tipo "fazer por fazer", mas sem compreender muito bem por que o está a fazer — pois ainda não compreendeu o enunciado do problema, nem lhe surgiu tão pouco uma ideia chave da solução.

A metodologia *eye-tracking* tem muitas afinidades com o modelo de confluência de Koichu (2015), nomeadamente ao nível do conceito de fixação, que pode ser interpretado como uma atenção. Ambos realçam a resolução bem-sucedida de um problema.

O modelo de Koichu persegue o surgimento de uma ideia fundamental que ilumine a resolução do problema (ideia chave da solução), enquadrando-a nas características dos resolvedores, nas fontes afetivas, cognitivas e matemáticas do resolvedor e no contexto no qual se resolve o problema. A metodologia *eye-tracking* procura características dos bons resolvedores de problemas que passam pela forma como eles olham o enunciado (fixações), analisam e selecionam a informação que lhes é fornecida.

As duas perspetivas apontam para a compreensão do que faz e pensa um bom resolvedor de problemas.

As resoluções de outros

Com o objetivo de fornecer oportunidades aos alunos que estão a resolver problemas para se autorregularem através do questionamento, Evans e Swan (2015) elaboram tarefas que incluem respostas tipo de outros alunos, com as quais expõem os alunos resolvedores a múltiplas perspetivas sobre um problema. Depois dos alunos tentarem resolver o problema são-lhes dadas as respostas tipo para compararem, criticarem e completarem colaborativamente. Os autores exploram a capacidade dos alunos para adotarem as metas de outra pessoa (as respostas tipo de outros alunos) para completarem uma solução, e a sua capacidade, através do uso da comparação, para identificarem os critérios merecedores quando criticam as soluções completas.

Para o sucesso da resolução de problemas, e na fase inicial de planificação, Evans e Swan (2015) estabelecem comparações entre resolvedores bem-sucedidos e insucedidos. Afirmam que os primeiros preocupam-se em elaborar metas a atingir, enquanto os segundos, muitas vezes, mantêm essas metas imprecisas. Para as alcançar, os resolvedores bem-sucedidos monitorizam cuidadosamente os seus progressos quanto a esses alvos, enquanto os outros, muitas vezes, usam estratégias naïves e ineficazes (por exemplo, as de tentativa e erro), em vez de considerarem os métodos mais poderosos à sua disposição.

Os resolvedores bem-sucedidos persistem face aos obstáculos, usam rotineiramente estes alvos para voltarem atrás, e questionam-se com questões do tipo: Onde vai dar esta estratégia? Deveria ela ser tão complicada? Esta resposta faz sentido? As respostas a estas questões podem prontamente levar a uma alteração da direção para implementar, por exemplo, a solução apropriada, elegante, eficiente e generalizável. Este comportamento contrasta com o dos resolvedores insucedidos que, muitas vezes, perseguem linhas ineficazes ou infrutíferas de questionamento implacável, sem pararem para considerarem estratégias alternativas, permanecendo sem certeza do critério para julgar a qualidade do seu trabalho, ou de testar a correção da resposta.

Segundo Evans e Swan (2015), há estudos que sugerem que os alunos podem desenvolver *skills* de autorregulação pela reflexão crítica sobre o trabalho de outros. Por isso, é importante proporcionar-lhes oportunidades para avaliarem por eles próprios, e pelos pares, quer as metas que foram estabelecidas, quer as resoluções realizadas em torno do problema. Na investigação que realizaram, cujo objetivo era o do desenvolvimento de materiais didáticos (recursos de intervenção), bem como o de estudar o que acontece quando esses recursos são postos em ação nas aulas, aqueles autores usaram recursos “todos incompletos”. A tarefa dos alunos era a de completar os resultados matemáticos e comunicá-los. Depois disto, os alunos iriam tentar comparar e ligar as soluções completas de forma explícita. Esta estrutura do *design* da investigação, e segundo Evans e Swan (2015), dá a oportunidade aos alunos de colocarem questões a si próprios sobre as metas dos recursos, tais como: O que está este meu colega a fazer? Porque é que os meus colegas estão a fazer aquilo? O que é que eles vão fazer a seguir? Isto pode influenciar positivamente o próprio desempenho dos alunos quando resolvem problemas, ao promoverem *skills* auto regulatórios e na produção de metas direcionadas para a ação, promovendo persistência face aos obstáculos. Dá, também, a oportunidade aos alunos, ao serem questionados para comparar abordagens alternativas a problemas matemáticos, de colocarem a si próprios, questões como: Quais são as diferenças entre estas duas respostas? Em que medida estas diferenças beneficiam ou constrangem a solução? Porquê x em vez de y?

Com isto — a exposição dos alunos a soluções múltiplas, nomeadamente se estas soluções são comparadas, mais do que consideradas individualmente — pretende-se que os alunos alcancem uma estrutura matemática mais coerente, compreensiva, flexível e abstrata. Porém, e para aqueles autores, a investigação também indica que não é suficiente sugerir simplesmente que as soluções sejam comparadas, é preciso haver instigações que chamem a atenção dos alunos para as semelhanças e diferenças dos métodos, realçando, assim, o papel importante de mediação por parte do professor.

A investigação levada a cabo por Evans e Swan (2015) foi realizada com alunos do 9.º ano, numa turma de 30 alunos, com um professor guia e uma tarefa concreta. A experiência realizou-se durante quatro aulas consecutivas. A intervenção na aula que os autores explicitam teve a seguinte estrutura:

1. Os alunos trabalharam sobre a Tarefa na aula anterior, o que permitiu ao professor ver as formas em que os alunos compreenderam e representaram o problema;

2. Após o professor ter reintroduzido o problema a toda a turma, de forma breve, os alunos trabalharam primeiro individualmente e depois em pares, completando as respostas tipo de alunos;
3. Uma vez que os alunos não estavam habituados a comparar respostas, o professor explicou brevemente, recorrendo a um exemplo não matemático, os benefícios de fazer comparações;
4. Os alunos colocaram depois os seus trabalhos num póster e interpretaram, completaram e compararam as soluções;
5. Numa discussão com toda a turma os alunos reviram aquilo que aprenderam.

Evans e Swan (2015) concluem afirmando que os alunos: i) preferiram o método da "prova e aperfeiçoamento" relativamente a outros como o algébrico ou o gráfico; ii) muitas vezes desligaram a representação matemática do contexto do problema e fizeram pouca tentativa para os ligarem; iii) aquilo que observam numa solução e as questões que eles colocam a si próprios sobre ela é influenciado pela experiência anterior das aulas de Matemática; e iv) precisam de muito apoio. Afirmam, ainda, que é importante dar oportunidades aos alunos para refletirem nas resoluções que fizeram.

Nestas conclusões encontramos diversas afinidades com o que foi referido atrás. Observou-se que os alunos nem sempre fizeram a ligação da representação matemática ao contexto do problema, tendo mesmo feito pouca tentativa para os ligarem. Assim, assiste-se a uma não transferência imediata do contexto do problema para a representação matemática — este aspeto levanta questões como: O que leva a essa não transferência? Que desvantagem é que isso traz?

É registada a influência da experiência matemática dos alunos na sua atividade, nomeadamente na de resolução de problemas, relevando a importância que tem a prática de ensino em torno de respostas dadas à resolução de problemas — resolver problemas aprende-se.

O papel de mediador do professor é reforçado, desde a seleção da tarefa, à tomada de conhecimento da forma como os alunos a trabalham, à reintrodução do enunciado a toda a turma, à apresentação de exemplos, onde os alunos ganham a importância de se efetuarem comparações entre resoluções, e à dinamização da discussão coletiva.

Com as oportunidades dadas aos alunos para refletirem nas soluções que fizeram permite-se que os alunos possam fazer: i) fixações em certos aspetos do enunciado; ii) mudanças de atenção "cirúrgicas"; e iii) promover uma ideia chave da solução.

Considerações finais

O legado de Pólya, no que respeita à temática da resolução de problemas, continua a provocar interesse, e aprofundamento, na comunidade de investigação em Educação Matemática. Koichu (2015) pretende compreender melhor a heurística por ele referida, nomeadamente alcançar uma maior clareza quanto à resposta a questões do tipo: i) De onde pode vir a resolução de um problema? ii) Através de que atividades e fontes pode uma cadeia de desvios de atenção em direção a uma invenção de uma ideia chave para um problema matemático (ideia chave da solução) ser construída por um resolvedor de problemas nos diversos contextos educacionais? Sajka e Rosiek (2015), procurando identificar características dos bons resolvedores de problemas, recorrem à metodologia do *eye-tracking*, estudando a forma como os alunos olham o enunciado (fixação), analisam e selecionam a informação fornecida. De acordo com estas investigações, e para uma boa aprendizagem para resolver problemas, devemos insistir para que os alunos gastem mais tempo na leitura e interpretação do enunciado (mantenham a sua atenção/fixação) de modo a promover-lhes a possibilidade de se concentrarem nos aspetos mais relevantes do próprio problema e, assim, estabelecerem estratégias de resolução, em particular, a descoberta da ideia chave da solução.

Com forte convicção sobre a importância da reflexão sobre resoluções de outros, Evans e Swan (2015) defendem que é fundamental dar oportunidades aos alunos para refletirem nas resoluções dos problemas — as próprias, bem como as de outros.

Todas estas perspetivas de aprofundamento e de melhor compreensão sobre a resolução de problemas convergem no realce que dão ao papel fundamental de mediador do professor de Matemática. Desde a importância da seleção das tarefas a propor aos alunos, à forma de ouvir e analisar as suas respostas e ao papel dinamizador de uma discussão coletiva são etapas fundamentais para a promoção da capacidade dos alunos aprenderem a resolver problemas. O próprio aspeto referido por Pólya, da importância de um professor resolver problemas em voz alta para os alunos ouvirem e verem como pensa o professor, é referido claramente por Evans e Swan (2015), aquando da necessidade de apresentação, e respetiva discussão em torno da sua resolução, de exemplos de novas situações intermédias relacionadas com o problema inicial.

Para a investigação em Educação Matemática terá todo o interesse em relacionar estas perspetivas — a que se baseia na atenção e sua mudança (Koichu, 2015), a do *eye-tracking* (Sajka & Rosiek, 2015), nomeadamente na fixação, e a da relevância da resolução de outros (Evans & Swan, 2015) —, com outras como, por exemplo, a que assenta na semiótica, em particular no que respeita ao papel mediador do professor. Como se relaciona o *design* de investigação apresentado por Evans e Swan (2015) com a perspetiva do ciclo didático[1] (Bussi & Mariotti, 2008)? Ao nível da construção do novo conhecimento matemático, nomeadamente o da resolução de problemas, como se relaciona a invenção da ideia chave da solução, a atenção e a mudança de atenção (Koichu, 2015), bem como a fixação (Sajka & Rosiek, 2015), por exemplo, com a perspetiva da abstração em contexto, AiC[2] (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001)?

Esta procura em compreender como surge a um resolvedor de problemas uma ideia chave da solução, como se processa a sua mudança de atenção, a sua fixação em aspetos do enunciado de um problema, bem como identificar o papel que desempenham as resoluções de outros, em particular a mediação do professor permite: i) não só enriquecer o conhecimento sobre a resolução de problemas, em particular a atividade dos bons resolvedores, em termos teóricos, mas, também, ii) dar pistas concretas muito úteis para o ensino e aprendizagem da resolução de problemas na aula de Matemática.

Notas

1 Sequência de ensino que pode ser estruturada de modo a aplicar-se um ciclo diferenciado de atividades que visam o desenvolvimento de diferentes componentes de um processo semiótico complexo e compreendem atividades com artefactos (Bussi & Mariotti, 2008).

2 A abstração é definida como sendo uma atividade vertical para a reorganização dos constructos matemáticos prévios dentro da Matemática e pelos significados matemáticos de modo a conduzir o aluno a um novo constructo (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Referências

Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp. 746–783). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Dahl, J. (2015). The three faces of problem solving. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 1571–1576). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Evans, S. & Swan, M. (2015). Developing student questioning when problem solving: the role of sample student responses. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 3015–3021). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Felmer, P., Perdomo-Diaz, J., Giaconi, V. & Espinoza, C. (2015). Problem solving teaching practices: observer and teacher's view. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 3022–3028). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Hershkowitz, R., Schwarz, B.B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*, 195–222.

Kilpatrick, J. (2014). Como vamos de resolução de problemas? *Educação e Matemática*, *130*, 3–9.

Koichu, B. (2014). (with contributions by G. Goldin, I. Weinzweig, S. Vinner and R. Leikin). Reflections on problem solving. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. Advances in Mathematics Education* (pp. 113–135). Netherlands: Springer.

Koichu, B. (2015). Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 2668–2674). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Mason, J. (2010). Attention and intention in learning about teaching through teaching. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.), *Learning through teaching mathematics, Mathematics Teacher Education*, *5* (pp. 23–47). Netherlands: Springer.

Pólya, G (1945). *How to solve it: a new aspect of the mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Sajka, M. & Rosiek, R. (2015). Solving a problem by students with different mathematical abilities — a comparative study using *eye-tracking*. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 1752–1758). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Tirosh, D., Tsamir, P., Leverson, E., Tabach, M. & Barkai, R. (2015). Unsolvable mathematical problems in kindergarten: are they appropriate? In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME 9*) (pp. 2010–2016). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Resumo. Neste artigo parte-se do legado de Pólya (1945), realçando a importância da resolução de problemas sob o ponto de vista matemático e escolar. Faz-se, em seguida, uma síntese e uma reflexão sobre o que foi escrito no CERME 2015 acerca da resolução de problemas. É feita uma incursão pela relevância da descoberta de uma ideia chave da solução, pelo resolvedor, associada à atenção e à sua mudança. Identificam-se características dos bons resolvedores de problemas não rotineiros e aborda-se, ainda, o papel mediador desempenhado pelo professor, nomeadamente na análise e comparação de resoluções de outros colegas, promovendo a capacidade autorreguladora nos alunos.

Palavras-chave: Resolução de problemas; ideia chave da solução; resoluções de outros colegas; a atenção; o papel mediador do professor; autorregulação.

Abstract. This text starts with the legacy of Pólya (1945), highlighting the importance of problem solving in school and from the mathematical point of view. It presents, afterwards, a summary and a reflection on what was written in CERME 2015 about problem solving. It makes an incursion on the relevance of the discovery of a key solution idea, by the solver, associated with the attention and its change. There are identified good features of the solvers of non-routine problems and also it is referred the mediating role played by the teacher, namely in the analysis and comparison of others resolutions, promoting self-regulatory capacity in students.

Key words: Problem solving; key solution idea; sample student responses; the attention; the mediating role of the teacher; self-regulation.

MANUEL JOAQUIM SARAIVA
Universidade da Beira Interior e UIED, Portugal
manuels@ubi.pt

(recebido em abril de 2015; aceite para publicação em outubro de 2015)