Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora

A teaching experiment in the 4th grade conducted in the dual role of teacher and researcher

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

Este artigo decorre de um estudo sobre o desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, no âmbito da realização de uma experiência de ensino, ancorada numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico, e que foi conduzida pela primeira autora do artigo, no âmbito do seu trabalho de doutoramento em Didática da Matemática (Mestre, 2014). A experiência de ensino foi desenvolvida com uma turma da escola da primeira autora deste artigo, assumindo esta a lecionação da maioria das aulas, embora não fosse a sua professora titular.

A metodologia de investigação utilizada insere-se numa perspetiva de design-research assumindo o design de experiência de ensino em sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006), a qual é particularmente indicada quando se pretende analisar processos de aprendizagem que necessitam de um longo período de tempo para se desenvolver (Gravemeijer & van Eerde, 2009), tal como é o caso da capacidade de generalização e, mais globalmente, do pensamento algébrico visados neste estudo. Habitualmente neste tipo de design os professores colaboram numa equipa de investigadores, assumindo a responsabilidade pelo ensino (Stemberger & Cencic, 2014; Stephan, 2015), contribuindo com a sua experiência profissional para a concretização do design instrucional da equipa. Menos comuns são os estudos em que professores também assumem o papel de investigadores, estando envolvidos em todas as etapas do processo (Joseph, 2004; Stephan, 2015), constituindo, por isso, um domínio ainda pouco explorado, nomeadamente quanto à contribuição que tal opção pode trazer para a investigação, assim como para o desenvolvimento profissional do professor.

Este artigo consiste numa reflexão sobre uma experiência de ensino centrada no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano, procurando, em particular, discutir o duplo papel de professora-investigadora[1] assumido na sua condução. O artigo começa por apresentar a metodologia de investigação usada no estudo que esteve na origem do presente artigo e descreve o duplo papel de professora-investigadora. Em seguida, é apresentada a conjetura que orientou a experiência de ensino, nas suas duas dimensões (de conteúdo e a pedagógica) e a experiência de ensino realizada. Uma análise retrospetiva apresenta as principais conclusões da experiência de ensino, em ambas as dimensões da conjetura, e discute a sua condução no duplo papel de professora-investigadora. Nas considerações finais sintetiza-se os principais aspetos que emergem do estudo realizado relacionados com este duplo papel.

Design-research como metodologia de investigação

A metodologia de *design-research* tem sido considerada, por alguns autores, como "um paradigma emergente para o estudo da aprendizagem em contexto através do estudo sistemático das estratégias e ferramentas de ensino" (Design-Based Research Collective, 2003, p. 5). Acrescentam Molina, Castro e Castro (2007) que isso acontece com o estudo sistemático de formas particulares de aprendizagem, estratégias e ferramentas educativas, respeitando a natureza sistémica da aprendizagem, educação e avaliação. Dada a forte orientação pragmática deste tipo de metodologia, é importante enfatizar que a sua intenção é desenvolver, testar e redefinir teorias e não apenas verificar empiricamente o que funciona (Cobb, Gresalfi & Hodge, 2009).

Esta metodologia tem o potencial de fazer a ponte entre a teoria e a prática e é adequada para tratar os problemas educativos que se revestem de uma natureza complexa e exigem um tratamento holístico (Bakker & Van Eerder, 2015). De facto, como referem Stemberger e Cencic (2014), existe uma necessidade de que os resultados da investigação sejam transferíveis para a prática, ou seja, que a investigação ajude a resolver problemas da prática.

Bell (2004) refere que esta ligação entre investigação e prática se enquadra perfeitamente no propósito da educação dada a sua natureza intervencionista. Neste sentido, reconhece que é difícil imaginar a evolução da prática e da teoria sem que as investigações empíricas se realizem nos contextos naturais e a redefinição do conhecimento teórico se centre no ensino e na aprendizagem. Assim, o foco da design-based research está intencionalmente relacionado com a investigação empírica e com a teorização sobre o que acontece nesses contextos autênticos.

Identificada como um tipo especial de *design research* (Molina et al., 2007), surge a metodologia de experiência de ensino que é considerada por Steffe e Thompson (2000) como uma ferramenta exploratória direcionada para compreender o progresso dos alunos durante um determinado período de tempo.

A experiência de ensino como design

O design de "experiências de ensino em sala de aula" (Gravemeijer & Cobb, 2006) agrega o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como a investigação sobre a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, e deste modo, procura ser, simultaneamente, educativo e científico (Kelly, 2003).

Uma experiência de ensino integra uma sequência de episódios de ensino que incluem, entre outros elementos, um professor-investigador e um ou mais alunos, e um método de recolha de dados que incide sobre esses episódios (Steffe & Thompson, 2000) que visa a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem, e no qual o investigador está envolvido como educador (Kelly, 2003).

Para Confrey e Lachance (2000), uma experiência de ensino é guiada por uma conjetura, ou seja, uma inferência baseada em evidências inconclusivas ou incompletas, que é uma forma de reconceptualizar os modos de abordagem, tanto do conteúdo como da pedagogia, de um conjunto de tópicos matemáticos. Contudo, ao contrário de uma hipótese formal no quadro de uma abordagem de design experimental, uma conjetura não é uma asserção à espera de ser provada ou refutada. Estas autoras distinguem as investigações guiadas por hipóteses das investigações guiadas por conjeturas. Assim, enquanto nas primeiras, os investigadores pretendem avaliar se a intervenção resultou ou não ou se a teoria foi ou não confirmada, nas segundas, procuram revisitar e reelaborar a conjetura enquanto a investigação está em progresso. Desta forma, enquanto uma hipótese permanece estática ao longo da experiência, uma conjetura evolui à medida que a investigação se desenvolve.

Confrey e Lachance (2000) referem que as conjeturas têm duas dimensões significativas: a dimensão do conteúdo matemático que responde à questão: "que conteúdo deve ser ensinado?"; e a dimensão pedagógica que responde à questão: "como deve ser ensinado esse conteúdo?". Segundo as autoras, esta segunda dimensão conduz o investigador a ponderar sobre a forma como a sala de aula deve ser organizada para o ensino e que tipos de tarefas, atividades e recursos devem ser providenciados para o conteúdo considerado. Steffe e Thompson, (2000) sugerem que, numa experiência de ensino, o investigador pode começar por um modelo preliminar, construído a partir das suas assunções conceptuais ou de experiências anteriores, mas a interação com os alunos é uma fonte de dados que poderá, inclusivamente, conduzir à reformulação ou até abandono das conjeturas iniciais. Desta forma, os investigadores precisam de reconhecer continuamente o significado subjacente da linguagem e das ações dos alunos, sendo neste sentido que estes autores referem que "os alunos guiam os investigadores" (p. 277).

O duplo papel de professora-investigadora

Uma característica distintiva de uma abordagem metodológica de experiência de ensino é a rutura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina et al., 2007). De facto, o investigador atua como professor para interpretar a linguagem e ações dos alunos durante a comunicação interativa e para poder tomar decisões durante os episódios de ensino que ajudem a promover a aprendizagem (Steffe, 1991).

Confrey e Lachance (2000) referem que quem assumir o papel de professor na condução de uma experiência de ensino deverá estar plenamente integrado na investigação, familiarizado com a conjetura e ser parte integrante da equipa nas diferentes fases de análise dos dados. Estas autoras reconhecem que esta envolvência total poderá ser de difícil concretização por parte de um professor titular de turma, pois acarreta um substancial compromisso de tempo e energia. Devido a estes constrangimentos, as autoras sugerem que um membro da equipa de investigação atue como professor durante a intervenção.

Diversos autores da *design-research* (e.g.; Confrey & Lachance, 2000; Steffe & Thompson, 2000; Stemberger & Cencic, 2014) referem-se ao papel do investigador quando este assume o ensino como professor-investigador. De acordo com Steffe e Thompson (2000) a postura que o professor-investigador deve assumir na condução da experiência de ensino é bastante exigente e, mesmo investigadores muito experientes podem não se sentir preparados para a imprevisibilidade das reações dos alunos no decurso dos episódios de ensino (Beer, Gravemeijer, & van Eijck, 2015). Ao interagir com os alunos, o professor-investigador procura criar um ambiente de harmonia, motivando os alunos a explicarem os seus raciocínios e ouvindo-os atentamente. De facto, Confrey e Lachance (2000) referem mesmo que o papel de ouvinte é uma das maiores responsabilidades neste tipo de metodologia. Inicialmente mais intuitivas, as interações com os alunos vão-se tornando mais analíticas, permitindo um maior confronto com as conjeturas formuladas inicialmente. Assim, e tendo como foco o raciocínio dos alunos, segundo Steffe e Thompson (2000) as ações mais analíticas do professor-investigador frequentemente seguem os insights das operações mentais que os alunos expressam através da linguagem e das ações.

A dificuldade do duplo papel de professor-investigador exige que este se coloque, em simultâneo, dentro da interação e fora dela (Steffe & Thompson, 2000). De acordo com Confrey e Lachance (2000), a adoção do papel de professor-investigador acarreta um conjunto de atitudes relacionadas com o facto de ter de dominar o conteúdo específico, mas também de ser um ouvinte, um facilitador, um dinamizador das discussões e um avaliador.

Joseph (2004) conduziu um projeto de *design-research* onde uma só pessoa assumiu simultaneamente a responsabilidade pelo design, investigação e prática. De acordo com a autora, os desafios como professora conduziram a desenvolvimentos chave no design e na investigação e, ao mesmo tempo, a investigação e o design providenciaram uma poderosa fonte intelectual para tomar decisões como professora. A partir de um projeto de *design-based research* conduzido maioritariamente por professores, Stephan (2015) argumenta que esse contexto foi uma experiência significativa de desenvolvimento profissional para os professores e também enriqueceu a investigação por envolver de uma forma única o conhecimento do oficio e do conteúdo profissional e que não ocorre tipicamente em estudos conduzidos maioritariamente por investigadores. A autora refere que o processo de *design research* é reforçado de forma significativa quando envolve os participantes na análise diária e no processo de implementação e conduz a uma maior riqueza e generalização do design de ensino. Os professores participantes no estudo identificaram como mais-valias na condução de uma metodologia de *design research* a colaboração entre professores e investigadores, a importância da antecipação da aula e a reflexão diária.

Tendo em conta todos os aspetos acima referidos, revelando a exigência de que se reveste uma experiência de ensino, no estudo que aqui se apresenta, inicialmente, não se previu que a primeira autora assumisse a lecionação das aulas. Assim, nas primeiras tarefas da primeira sequência da experiência de ensino, as aulas foram previamente preparadas com a professora titular de turma e esta assegurou a sua lecionação, coadjuvada em aula pela professora-investigadora. No entanto, ao longo da implementação dessa sequência de tarefas, a exigência requerida, tanto ao nível do conteúdo matemático como ao nível da ação pedagógica, foi-se acentuando, tendo-se compreendido que não seria possível exigir à professora titular de turma a disponibilidade necessária para preparar com grande detalhe estas aulas. Ademais, a própria professora foi manifestando vontade de que fosse a professora-investigadora a assumir a lecionação das aulas. Desta forma, operou-se gradualmente uma mudança de papéis: a partir da segunda sequência de tarefas a professora-investigadora assumiu a condução das aulas e a professora titular de turma o papel de coadjuvante. Esta mudança de papéis foi aceite muito naturalmente pelos alunos, dada a presença continuada da professora-investigadora nas aulas e na escola.

A conjetura que orientou a experiência de ensino

Para a elaboração inicial da conjetura que orientou a experiência de ensino foi importante um estudo exploratório realizado com uma turma de 3.º ano de escolaridade, de que a primeira autora era professora titular. Foi aplicado a essa turma uma ficha de diagnóstico com o objetivo de perceber como os alunos mobilizavam a capacidade de generalização na resolução de questões que envolviam relações numéricas, propriedades das operações e a exploração de sequências pictóricas e numéricas. Os resultados deste estudo exploratório permitiram perceber que mesmo sem ter ocorrido um ensino intencional com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico, os alunos conseguiram mobilizar a capacidade de generalização, nomeadamente, no reconhecimento de relações numéricas e propriedades das operações e no trabalho com sequências, com particular incidência nas questões de generalização próxima (Mestre & Oliveira, 2011). Tendo como referência estes resultados, foi definida uma conjetura de acordo com a perspetiva definida por Confrey e Lachance (2000), com duas dimensões, uma referente ao conteúdo matemático e outra a aspetos pedagógicos, ou seja, ao modo como esse conteúdo é ensinado. Apresentam-se, em seguida, os pressupostos que orientaram a formulação da conjetura.

Dimensão de conteúdo da conjetura

A definição da dimensão de conteúdo da conjetura assenta na aceção de pensamento algébrico apresentada por Blanton e Kaput (2005), enquanto "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). Desta forma, assume-se a generalização como elemento central deste processo e a sua representação em diferentes tipos, gradualmente mais simbólicos. As tarefas que promovem aspetos relacionados com o desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional são encaradas como contextos para a promoção da generalização e, desta forma, do pensamento algébrico.

Deste modo, na dimensão de conteúdo da conjetura importa atender aos seguintes aspetos: i) a pertinência do desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo, ii) a expressão e representação da generalização, e, iii) contextos de promoção do pensamento algébrico.

i) A pertinência do desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo

A aritmética é um tema predominante no currículo matemático do 1.º ciclo e, de acordo com Cai e Knuth (2005), uma reformulação do modo como é ensinada permite a introdução de ideias algébricas. Nesta perspetiva e tendo como objetivo um currículo matemático mais unificado e interligado (Kaput et al., 2008), o pensamento algébrico pode ser encarado como fio condutor curricular (NCTM, 2000) permitindo a articulação curricular com outros temas e tópicos. Trata-se, pois, de evidenciar o caráter algébrico do currículo matemático da escola elementar, como referem Carraher et al. (2008).

Sendo a primeira autora deste artigo professora do 1.º Ciclo, o seu interesse pelo pensamento algébrico surgiu através da leitura de vários autores que consideravam a pertinência do tema como agregador do currículo matemático e de estudos empíricos que revelavam como alunos destes anos de escolaridade eram capazes de pensar algebricamente. Uma vez que a aritmética é um tema preponderante no currículo dos primeiros anos, o interesse particular enquanto professora do 1.º ciclo prende-se com a forma como o seu ensino pode ser potencializado para promover um maior desenvolvimento de formas de raciocínio mais poderosas.

ii) A expressão e representação da generalização

Considerada como processo central do raciocínio matemático, a generalização envolve a extensão do raciocínio para além do caso ou casos considerados inicialmente e pode ser expressa de diversas formas, desde a linguagem natural a formas gradualmente mais simbólicas (Blanton, 2008).

De particular relevância para este estudo é a conceção que Ellis (2007) apresenta relativamente à generalização como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas no seio da comunidade da turma. Esta perspetiva interacionista privilegia tanto as interações professor-aluno como as interações aluno-aluno, tendo em consideração a forma como o professor e os alunos desenvolvem modos partilhados de interagir para promover generalizações. Neste sentido, o papel do professor é também crucial para a promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações, aspeto considerado na dimensão pedagógica da conjetura.

A exploração de diferentes níveis de compreensão da generalização tem particular relevância nesta experiência de ensino. Distinguindo entre generalização aritmética e generalização algébrica, Radford (2008) chama a atenção para a importância de atender à forma como a comunalidade entre casos é apreendida. Desta forma, considera-se a importância dos conceitos de indeterminação e analiticidade (Radford, 2011), pois a forma como são usados no processo de generalização determina o nível de generalidade que ocorre.

Relativamente à introdução da simbolização neste nível de escolaridade, esta experiência de ensino orienta-se pela perspetiva de Russell, Schiffer e Bastable (2011) ao defenderem que a introdução da notação algébrica não só providencia uma expressão concisa das ideias dos alunos como oferece novas formas de percecionar as relações matemáticas. Tendo em conta a perspetiva de Kaput (2008), de que o pensamento algébrico "é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações" (p. 9), a generalização e a simbolização são processos intimamente relacionados. A simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora e concisa das relações matemáticas, surgindo como uma forma eficaz de expressão da generalização.

iii) Contextos de promoção do pensamento algébrico

Nesta experiência de ensino consideram-se as situações que fomentam o pensamento relacional e o pensamento funcional como contextos de promoção da generalização. Isto significa que tarefas matemáticas que promovam a exploração de aspetos relativos ao pensamento relacional e ao pensamento funcional podem ser consideradas como contextos para o desenvolvimento da generalização, no sentido em que Blanton (2008) considera a aritmética generalizada e o pensamento funcional como *portas de entrada* para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No que respeita ao pensamento relacional, este contempla a capacidade de usar relacionalmente a aritmética de forma a fazer uso da estrutura subjacente às relações numéricas e às propriedades das operações e encarar a igualdade como uma relação de equivalência. Trata-se da capacidade de olhar para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes (Carpenter et al., 2003). Desta forma, os contextos que procuram desenvolver aspetos relativos ao pensamento relacional exploram a igualdade como uma relação, as relações numéricas e as propriedades das operações.

O pensamento funcional baseia-se num conjunto de capacidades para além daquelas que estão associadas ao pensamento relacional. Requer que os alunos considerem a mudança e o crescimento, o que envolve, por exemplo, estar atento à forma como as quantidades variam em relação umas às outras (Blanton, 2008). De acordo com o NCTM (2000), a noção de variação deverá ser trabalhada desde muito cedo na escolaridade, sendo essencial para a construção da noção de função. Neste sentido, importa explorar situações que envolvam o reconhecimento da relação entre variáveis que permitam identificar, generalizar e representar relações funcionais.

Dimensão pedagógica da conjetura

A dimensão pedagógica da conjetura relaciona-se com a dimensão de conteúdo na medida em que diz respeito à forma como este é ensinado. No respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a dimensão pedagógica da conjetura é particularmente importante, pois como referem Blanton e Kaput (2005), os professores devem desenvolver *olhos e ouvidos algébricos* para integrarem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Nesta experiência de ensino, a dimensão pedagógica da conjetura enquadra-se numa perspetiva dialógica do conhecimento matemático (Wells, 2000) e prende-se com a construção de um ambiente de sala de aula condicente com uma prática de ensino de natureza exploratória. Neste sentido, assenta em princípios de ensino e aprendizagem que favorecem o desenvolvimento de um ambiente de sala de aula onde as discussões coletivas assumem um papel predominante e o trabalho dos alunos se desenvolve a pares, pequenos grupos e coletivamente.

As tarefas matemáticas foram organizadas em sequências que permitem o desenvolvimento de aspetos centrais do pensamento algébrico e, simultaneamente, inserem-se nos temas e tópicos matemáticos definidos na planificação anual, respeitando a lógica de articulação curricular enunciada.

Em seguida, subdivide-se a dimensão pedagógica da conjetura nos seguintes tópicos: i) a perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático, e ii) a aula exploratória.

i) A perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático

Na perspetiva de Wells (2000) as salas de aula devem assumir-se como comunidades de investigação, onde a turma trabalha colaborativamente em torno de um mesmo objetivo, construindo de forma dialógica o conhecimento e onde também o professor deve assumir-se como investigador integrante dessa comunidade. Nesta conceptualização de sala de aula, o conhecimento é construído dialogicamente e o currículo é orientado pela perspetiva investigativa (Wells, 2000).

Cobb, Wood e Yackel (1991) compreendem a vida de uma sala de aula como uma comunidade de inquirição, onde há a criação de um "conhecimento tomado como partilhado" (p. 24) na comunidade. Assim, os aspetos do conhecimento são partilhados dentro de um quadro interpretativo coletivo que constitui a base de comunicação entre os participantes da comunidade. Estes autores descrevem a negociação que constitui a prática matemática efetiva e apropriada na sala de aula através do envolvimento da comunidade de aprendizagem em conversações sobre como praticar matemática colaborativamente. Essas normas evidenciam um acordo mútuo sobre o que significa praticar matemática na comunidade, o que envolve uma compreensão sobre as formas que são consideradas válidas matematicamente.

ii) A aula exploratória

A prática de ensino exploratório é uma atividade complexa e considerada como um constante desafio para o professor que a procura implementar (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). A principal característica do ensino-aprendizagem exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a gestão que das mesmas se faz na aula, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares e coletivamente, são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento. No ensino exploratório "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13). De acordo com Oliveira et al. (2013), neste tipo de ensino, a aprendizagem é um processo simultaneamente individual e coletivo que resulta da interação dos alunos com o conhecimento matemático e com os outros (colegas e professor), no contexto de desenvolvimento de uma certa atividade matemática e regida por processos de negociação de significados.

No entanto, este tipo de prática "exige do professor muito mais do que a identificação e seleção de tarefas para a sala de aula" (Canavarro, Oliveira e Menezes, 2012, p. 256), dado que é a exploração das tarefas na aula que permite promover as oportunidades de aprendizagem dos alunos. Canavarro (2011) salienta ainda que este tipo de ensino não pode ser apenas experimentado esporadicamente, necessitando de tempo e continuidade para que o professor possa melhorar a sua prática e os alunos correspondam e desenvolvam a aprendizagem dos conteúdos matemáticos no contexto da comunidade que integram.

A experiência de ensino realizada

A experiência de ensino decorreu ao ano longo de um ano letivo a partir da realização de 42 tarefas, organizadas em cinco sequências, de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma (respeitando o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007)) numa perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. As tarefas surgiram na turma com uma média de duas por semana e com a duração de cerca de duas horas cada uma. Tal como já foi referido, na primeira sequência de tarefas a professora titular de turma assumiu a lecionação das aulas e a professora-investigadora atuou como coadjuvante, mas a partir da segunda sequência de tarefas, houve necessidade de inverter esses papéis.

O primeiro momento da experiência de ensino em sala de aula consistiu na aplicação de uma ficha de diagnóstico que tinha sido utilizada no estudo exploratório referido (Mestre & Oliveira, 2011). Os resultados revelaram que, comparativamente com os alunos do 3.º ano do estudo exploratório, os alunos da turma do 4.º ano evidenciavam menos capacidades de apreensão das relações numéricas e propriedades das operações, recorrendo sistematicamente a procedimentos de cálculo na resolução das questões e manifestando uma conceção do sinal de igual enquanto indicação para a realização de um cálculo, o que dificultou uma abordagem mais relacional das situações apresentadas (Molina & Ambrose, 2006) e, consequentemente, a apreensão da generalidade. Na exploração das sequências, estes alunos revelaram inicialmente dificuldade na identificação da comunalidade e da diferença, mesmo em questões de generalização próxima (Mestre, 2014).

Como é característico deste tipo de metodologia de investigação, a construção das tarefas foi sendo feita no decurso da aplicação da experiência de ensino. Assim, procurou-se ter sempre em consideração o desempenho e dificuldades que os alunos iam manifestando na exploração de uma tarefa para a construção da(s) seguinte(s). Este facto foi particularmente relevante nesta experiência de ensino, tendo algumas tarefas sido criadas a partir das resoluções dos alunos nas tarefas anteriores. Por exemplo, na segunda tarefa da Sequência I, na descoberta de regularidades nos múltiplos de três, um par de alunos referiu que "nos produtos de 4x3 e 14x3, o algarismo das unidades não mudou". Essa descoberta foi usada na tarefa seguinte solicitando aos alunos que procurassem outras situações onde isso acontecesse e que explicassem porquê (Figura 1).

Sequência I

Tarefa 2

"Regularidades nas tabuadas"[9]

1. Observa com atenção a tabuada do 3[10] (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e regista-as.
3. Continua a tabuada do 3, calculando 11x3, 12x3, 13x3…
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Porquê?

0x3=0	
1x3=3	
2x3=6	
3x3=9	
4x3=12	
5x3=15	
6x3=18	
7x3=21	
8x3=24	
9x3=27	
10x3=30	
11x3=	
12x3=	
13x3=	
14x3=	
15x3=	
16x3=	
17x3=	
18x3=	
19x3=	
20x3=	
21x3=	

Tarefa 3

"Descobrindo regularidades I"

O grupo do João Vago, do Marco e do Daniel descobriu a seguinte regularidade na tabuada do 3:

"Nos produtos de 4x3 e 14x3, o algarismo das unidades não mudou."

0x3=0	1. Procura outras situações onde isso aconteça e regista-as.
1x3=3	
2x3=6	
3x3=9	
4x3=12	
5x3=15	
6x3=18	
7x3=21	
8x3=24	
9x3=27	
10x3=30	
11x3=33	
12x3=36	
13x3=39	
14x3=42	2. Consegues explicar porque é que isso acontece? Verifica se essa explicação é válida para todas as situações que encontraste.
15x3=45	
16x3=48	
17x3=51	
18x3=54	
19x3=57	
20x3=60	
21x3=63	
22x3=66	
23x3=69	
24x3=72	
25x3=75	
26x3=78	
27x3=81	

Figura 1. Tarefas 2 e 3 da Sequência I

As sequências de tarefas

Tendo em conta os resultados do teste de diagnóstico, a definição das sequências de tarefas incidiu primeiramente na exploração dos aspetos relativos ao pensamento relacional e, só posteriormente, na inclusão da exploração do pensamento funcional. Desta forma, as tarefas foram organizadas em cinco sequências identificando as diferentes etapas do processo que permitiram construir uma trajetória de aprendizagem compatível com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (Figura 2).

A descoberta de regularidades numéricas ⇨ Exploração de relações numéricas ⇨ Exploração da variação de quantidades ⇨ Exploração de regularidades numéricas ⇨ Exploração de relações funcionais

Pensamento Relacional ⇨ Pensamentos relacional e funcional

Figura 2. Etapas da experiência de ensino

A descoberta de regularidades numéricas – Sequência I

Incidindo nos principais aspetos de promoção do pensamento relacional, a primeira sequência de tarefas explorou regularidades numéricas usando como contexto os múltiplos e divisores de um número natural. Nesta sequência foram intensamente exploradas as relações numéricas, a relação de igualdade, as propriedades das operações e a relação entre operações, nomeadamente entre a multiplicação e a adição e entre a multiplicação e a divisão (como operações inversas). Procurou-se ainda construir as primeiras generalizações a partir das regularidades encontradas, expressando-as em linguagem natural. Foi ainda trabalhado o conceito de comunalidade através da exploração de situações onde as regularidades se verificavam e o confronto com outras onde isso não acontecia. A figura 1 apresenta como exemplos duas tarefas dessa sequência.

Exploração de relações numéricas – Sequência II

Procurando responder às dificuldades dos alunos identificadas na primeira sequência de tarefas, considerou-se pertinente continuar a exploração do pensamento relacional com um trabalho em torno das relações numéricas assim como da exploração da relação de igualdade e relação entre as operações inversas. Foi também requerido aos alunos a expressão da generalização e começou a ser feita a iniciação à representação simbólica, através da utilização de símbolos próprios. A figura 3 apresenta dois exemplos de tarefas desta sequência.

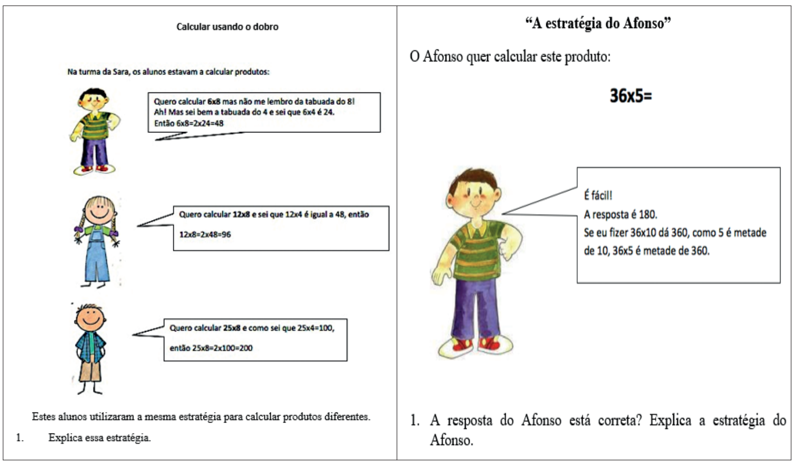


Figura 3. Tarefas 13 e 15 da sequência II

Exploração da variação de quantidades – Sequência III

Continuando a abordagem da perspetiva relacional da aritmética, a terceira sequência de tarefas explorou a variação de quantidades, enquadrando-se no tema Medidas e deram início a um percurso em direção à promoção do pensamento funcional. Transversalmente, as tarefas tinham também como objetivos a expressão e representação da generalização. Os tipos de representação explorados nesta sequência de tarefas foram de natureza variada, desde a utilização de tabelas, diagramas até à representação simbólica idiossincrática. A figura 4 apresenta dois exemplos de tarefas desta sequência.

Os cromos da Ana e do Bruno

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. O domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromo para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa **A**. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa **B**.
Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

18 + A

número de cromos colados na caderneta — número de cromos guardados na caixa **A**

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

20 + B

número de cromos colados na caderneta — número de cromos guardados na caixa **B**

Como os meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

18 + A = 20 + B

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa **A** e quantos cromos terá o Bruno na caixa **B**?
b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas **A** e **B**, de modo a que o número total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

18 + A = 20 + B

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas **A** e **B**?

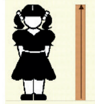
"Comparando alturas"

A Maria, o Tomás e a Júlia estiveram a medir as suas alturas na aula.

Altura da Maria	Altura do Tomás	Altura da Júlia
125 cm		
130 cm		

O Tomás é 4 cm mais alto do que a Maria. A Maria é 6 cm mais baixa qua a Júlia.

1. O que podes dizer sobre a altura das três crianças?
2. Se a altura da Maria for representada por ✱, como podemos representar a altura do Tomás? E a altura da Júlia?



Maria   Altura da Maria

Figura 4. Tarefas 21 e 23 da sequência III

Exploração de regularidades numéricas – Sequência IV

A quarta sequência de tarefas explorou regularidades numéricas com situações mais complexas do que nas sequências anteriores. Estas tarefas exploraram regularidades numéricas em diferentes contextos como tabelas numéricas, jogos de dominó e calendários. Com contextos marcadamente numéricos, as referências que os alunos podiam usar para resolver as tarefas eram apenas numéricas ou de ordem estrutural, por exemplo, tendo em conta a disposição dos números numa tabela, de acordo com a sua estrutura.

Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas enquadravam-se na promoção do pensamento relacional, tendo sido trabalhada a expressão e representação da generalização. Os tipos de representação utilizados foram diversos, incluindo a linguagem natural, tabelas, diagramas e a linguagem idiossincrática e simbólica. A figura 5 apresenta dois exemplos de tarefas desta sequência.

"Explorando dominós e calendários"

1. Os números e o calendário...

1.1. Observa o calendário do mês de Maio e as datas que estão destacadas:

domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado
1	**2**	**3**	4	5	6	7
8	**9**	**10**	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1.2. Obedece às seguintes indicações:

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

1.3. Escolhe outras datas que formem a mesma configuração de um quadro 2x2 e obedece às indicações.

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

2. Os números na tabela...

Observa a seguinte tabela e os números que estão destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	**65**	**66**	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1. O Pedro diz que se adicionar os números em linha obtém o mesmo valor que na adição dos números em coluna. Verifica se o Pedro tem razão.

2.2. Consegues encontrar outros números com a mesma disposição na tabela onde isso aconteça? Mostra as tuas descobertas.

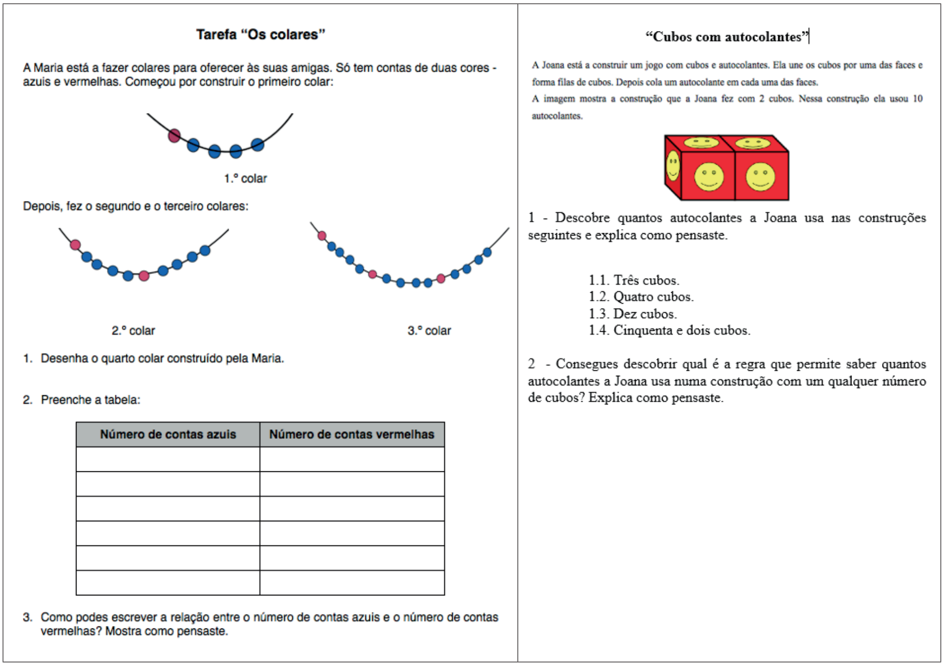
2.3. Será que a mesma relação se verifica quando o número que está no centro é 823? Explica porquê.

Figura 5. Tarefas 31 e 32 da sequência IV

Exploração de relações funcionais – Sequência V

A quinta e última sequência de tarefas explorou relações funcionais, tendo como contextos problemas e tarefas de exploração envolvendo sequências pictóricas crescentes. Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas enquadram-se no desenvolvimento do pensamento funcional. Assim, a exploração das tarefas envolveu o trabalho em torno das relações numéricas, da relação entre as operações inversas, e também da identificação de variáveis e da relação entre elas. Nesta sequência de tarefas, as relações exploradas eram marcadamente funcionais. De forma transversal, em todas as tarefas, explorou-se a expressão e representação da generalização.

Nas tarefas que apresentavam sequências pictóricas crescentes foram exploradas a identificação das variáveis dependente e independente e a sua relação com os termos da sequência e a sua ordem, respetivamente. Em algumas tarefas trabalharam-se relações de proporcionalidade direta e, em outras, as sequências envolviam expressões do tipo , com e números naturais. A exploração iniciou-se pela solicitação da continuação das sequências, normalmente através do desenho de termos seguintes. Explicitamente era pedido aos alunos que revelassem qual a relação entre as variáveis independente e dependente e, em algumas tarefas, era solicitada a relação inversa. A expressão da generalização envolvia diferentes representações, tais como a linguagem natural, tabelar, diagramas e a escrita da regra geral em linguagem simbólica. A figura 6 apresenta dois exemplos de tarefas desta sequência.



Tarefa "Os colares"

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:

2.º colar

3.º colar

1. Desenha o quarto colar construído pela Maria.
2. Preenche a tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

"Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.

1 - Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

1.1. Três cubos.
1.2. Quatro cubos.
1.3. Dez cubos.
1.4. Cinquenta e dois cubos.

2 - Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 6. Tarefas 38 e 41 da sequência V

Em suma, as tarefas exploradas na experiência de ensino pretendiam promover o desenvolvimento da generalização em contextos que envolviam, inicialmente, o pensamento relacional e, posteriormente, o pensamento funcional. A expressão da generalização desenvolveu-se de acordo com um percurso gradual de utilização da linguagem natural e progressiva apropriação da linguagem simbólica.

A análise da experiência de ensino

Nas experiências de ensino orientadas por uma conjetura existem dois tipos de análise dos dados que ocorrem em momentos distintos do processo de investigação. O primeiro tipo é contínuo, realizando-se durante a implementação da experiência de ensino, e a análise daí resultante é uma análise preliminar (Confrey & Lachance, 2000). Este consiste na análise dos dados depois de cada intervenção em sala de aula e lida com a tomada de decisões sobre os passos seguintes da experiência de ensino (Molina et al., 2007). Tendo em conta que o tempo de recolha dos dados é sobrecarregado de atividade, por serem constantes os ajustamentos efetuados no decurso da implementação, é difícil conduzir uma análise sistemática dos dados em simultâneo, nessa fase. Desta forma, o segundo tipo de análise ocorre após a intervenção terminar. É uma análise mais profunda que ocorre numa fase em que se constrói uma história coerente sobre o desenvolvimento das ideias dos alunos e a sua ligação à conjetura (Confrey & Lachance, 2000; Molina et al., 2007). Esta análise retrospetiva envolve uma cuidadosa revisão dos dados e uma reflexão sobre a experiência de ensino realizada de forma a construir um modelo explicativo sobre o que induziu as mudanças observadas nas ecologias de aprendizagem (Gravemeijer & van Eerde, 2009).

Neste estudo, a análise preliminar ocorreu durante a implementação da experiência de ensino. Após cada aula, era feita uma breve análise do desempenho dos alunos na exploração da tarefa matemática, de forma a projetar as tarefas seguintes e adaptar a conjetura à realidade que saía das vivências de sala de aula. Essa análise preliminar teve formas mais sistematizadas que permitiram, em alguns momentos da experiência de ensino, refletir de modo mais profundo sobre o processo que estava sendo vivenciado. Esses momentos resultaram, na maior parte das vezes, na escrita de artigos e/ou comunicações orais em encontros de Educação Matemática, o que permitiu que a discussão com outros investigadores enriquecesse o processo de análise continuada. Embora numa fase final da implementação da experiência de ensino, destaca-se também a participação no Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática que, devido ao facto de uma das aulas da experiência de ensino ter sido usada como caso multimédia, permitiu um maior confronto e discussão com outros intervenientes, nomeadamente investigadores exteriores ao processo. Esta discussão foi particularmente rica no que concerne à dimensão pedagógica da conjetura que orientou a experiência de ensino. A participação neste projeto também proporcionou que a segunda autora assistisse a duas aulas da experiência, o que também permitiu aprofundar a análise das tarefas exploradas nessas aulas e a reflexão sobre a conjetura que orientou o estudo.

A análise retrospetiva das aulas implementadas aconteceu após a implementação da experiência de ensino. Após a fase de visionamento e transcrição dos vídeos, foram analisadas as diferentes aulas procurando-se identificar episódios de ensino que permitissem "contar a história". Esse momento foi particularmente problemático pela dificuldade sentida em selecionar os episódios de ensino que fossem ilustrar os elementos mais significativos do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da turma. Essa dificuldade prendeu-se com a construção da narrativa que permitisse ao leitor compreender todo o processo, mas sem que a mesma se tornasse repetitiva e demasiado extensa. As opções tomadas foram no sentido de focalizar os aspetos mais significativos, respeitando a ordem cronológica pelo qual ocorreram. Assim, começou-se por selecionar aulas onde as tarefas exploradas permitissem identificar as diferentes etapas do processo de forma a traçar uma trajetória de aprendizagem compatível com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Análise retrospetiva

Na análise retrospetiva apresentamos uma primeira reflexão sobre a conjetura formulada na experiência de ensino, na dupla dimensão de conteúdo e pedagógica, centrando-se na evolução da capacidade de generalização dos alunos. Em seguida apresentamos uma análise retrospetiva da condução da experiência de ensino no duplo papel de professora-investigadora.

Dimensão de conteúdo

Na dimensão de conteúdo importa refletir sobre a evolução da capacidade de generalização nos contextos considerados na conjetura: pensamento relacional e pensamento funcional.

Evolução da capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento relacional

Identificadas, no início da experiência de ensino, as dificuldades dos alunos no reconhecimento de relações numéricas e das propriedades das operações, a mobilização da capacidade de generalização foi evoluindo à medida que os alunos progrediam também no reconhecimento destes aspetos relacionais da aritmética. Assim, os alunos começaram por explorar as relações numéricas em casos particulares e, a partir deles, conseguiram estendê-las para outros casos até enunciar a sua generalização. Desta forma, os primeiros níveis de pensamento relacional centraram-se exatamente na exploração desses exemplos particulares, reconhecendo a comunalidade apenas nos casos apresentados e sem estender a relação para quantidades indeterminadas. Progressivamente, os alunos conseguiram estender esses casos particulares para outros semelhantes e quando os alunos conseguiam apreender relacionalmente as situações para além dos casos particulares, evidenciavam um nível de generalização algébrico. Esse nível poderia ainda evidenciar uma dependência com a descrição do contexto da situação ou não necessitar da descrição desse contexto, evidenciando um nível de generalização mais global.

Para a evolução da capacidade de generalização, no que respeita aos contextos de promoção do pensamento relacional, as tarefas aplicadas na experiência de ensino e a sua exploração em aula foram aspetos considerados determinantes. Assim, quando as tarefas apresentavam a possibilidade da variação de quantidades ou contextos de modelação que permitiam atribuir significado às relações numéricas presentes, os alunos conseguiam mobilizar níveis de generalização mais sofisticados, evoluindo assim nesta capacidade.

Evolução da capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento funcional

Tendo a experiência de ensino incidido, numa primeira fase, na exploração intencional dos aspetos relativos à promoção do pensamento relacional, nas tarefas com contexto de promoção do pensamento funcional os alunos evidenciaram, maioritariamente, níveis de generalização algébricos, embora inicialmente fossem ainda muito dependentes do contexto das tarefas. Desta forma, os alunos, de forma geral, reconheceram as variáveis envolvidas nas sequências e a relação de dependência entre elas, apreendendo um nível funcional das relações. A evolução da generalização nos contextos de promoção do pensamento funcional aconteceu no sentido de reconhecerem e usarem o contexto da situação para a generalização e, progressivamente, abandonarem esse contexto para a definição de regras mais globais.

Dimensão pedagógica

Contextos de promoção do pensamento relacional

Nas tarefas analisadas das sequências relativas à promoção do pensamento relacional, as discussões coletivas tiveram como eixo orientador comum a exploração de casos particulares e sua progressiva abordagem a outros casos, até à identificação e generalização das relações numéricas. Habitualmente, as discussões coletivas conduziram os alunos a níveis de pensamento relacional e de generalização superiores aos apresentados nos momentos de trabalho autónomo. A figura 7 esquematiza, de forma sumária, essa linha orientadora da orquestração das discussões coletivas realizadas em aula.

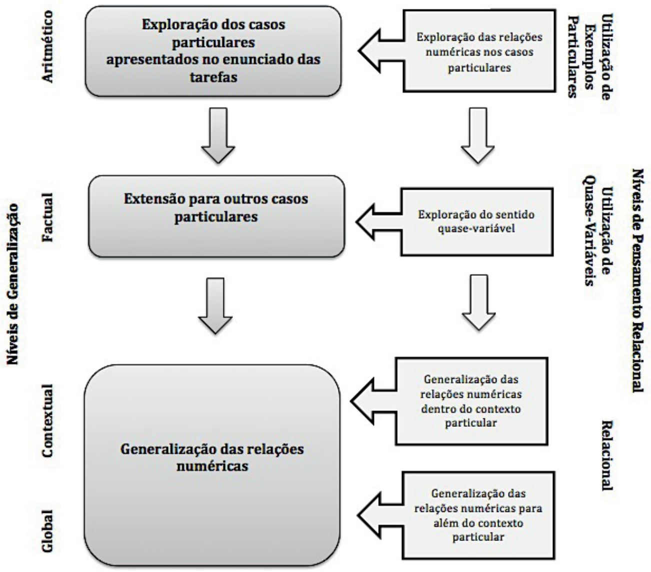


Figura 7. Linha orientadora da orquestração das discussões coletivas, nos contextos de promoção do pensamento relacional

Assim, no que concerne ao pensamento relacional, as relações numéricas foram exploradas, de início, a partir dos casos particulares e, posteriormente, através da sua extensão para outros casos particulares. A generalização dessas relações numéricas surgiu, num nível inicial, dentro do contexto da situação descrita e, posteriormente, para além desse contexto, evidenciando a sua generalidade.

Contextos de promoção do pensamento funcional

Considerando agora os momentos de discussão coletiva de exploração das tarefas com contextos de pensamento funcional, apresenta-se a figura 8.

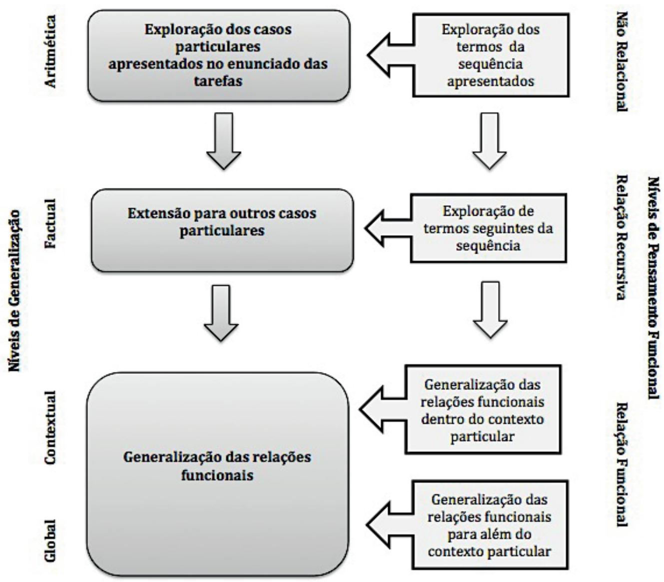


Figura 8. Linha orientadora das discussões coletivas, nos contextos de promoção do pensamento funcional

Os diferentes níveis de pensamento funcional foram trabalhados partindo da exploração dos termos apresentados nas sequências pictóricas crescentes, em seguida suscitou-se a extensão para outros termos da sequência até à revelação de um nível de reconhecimento da relação funcional onde se tornava explícita a relação de dependência entre as variáveis. A estes níveis de pensamento funcional fizeram-se corresponder níveis de generalização particulares onde, por exemplo, o reconhecimento da relação funcional poderia estar, de início, dependente do contexto particular da situação e, posteriormente, ser descrita para além desse contexto.

A condução da experiência de ensino no duplo papel da professora-investigadora

Na condução da experiência de ensino no duplo papel de professora-investigadora importa refletir sobre a construção de tarefas e orientação da exploração dessas tarefas nas aulas da experiência de ensino.

Do ponto de vista da investigação, as tarefas tinham simultaneamente propósitos específicos de desenvolvimento e análise da capacidade de generalização dos alunos e resultavam também do forte investimento de aprofundamento teórico do tema. Ainda, no âmbito da investigação, havia a necessidade de cuidar que as tarefas (e sua exploração) possibilitassem uma forma de recolha de dados compatível com a realização da investigação. Na condução das aulas, a exploração de tarefas que foi pensada com este duplo propósito permitiu à professora-investigadora ter presente, em simultâneo, as questões de ensino e as questões da investigação. Este facto permitiu, naturalmente, uma abordagem na exploração das tarefas diferente se estes papéis fossem assumidos por diferentes pessoas, pois ao professor que aplica tarefas criadas pelo investigador poderá não ser fácil perceber as questões de investigação subjacentes e, ao investigador poderá ser difícil gerir e interpretar as questões do ensino. A experiência de ensino neste nível de escolaridade, nesta escola, da professora-investigadora permitiu adequar as propostas de tarefas aos alunos em questão e antecipar as possíveis respostas e dificuldades que pudessem surgir.

Neste sentido, e no que concerne à dimensão de conteúdo, a exploração dos aspetos de pensamento algébrico exigia um conhecimento particular do professor, uma vez que se pretendia tratar algebricamente e de forma articulada os conteúdos matemáticos próprios do currículo de Matemática do 4.º ano de escolaridade. Desta forma, tornava-se necessário perceber os conteúdos com potencialidades algébricas que poderiam ser explorados nesse sentido. Por exemplo, não bastava apenas trabalhar as questões relacionadas com as propriedades das operações, como por exemplo da multiplicação, mas era necessário trabalhá-las de forma a promover a sua generalização. Acrescem a essas dificuldades a complexidade de exploração de um tema ainda não muito habitual no 1.º ciclo. Nesse sentido, o investimento feito enquanto investigadora através do aprofundamento teórico do tema permitiu que a condução das aulas fosse intencionalmente feita para promover níveis mais sofisticados de desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional e da promoção da generalização.

Relativamente à dimensão pedagógica que orientou a experiência de ensino, a natureza das aulas realizadas reveste-se de uma exigência particular, como já foi brevemente referido. Neste sentido, a experiência da professora-investigadora que, enquanto professora desenvolve, habitualmente, essa prática nas suas aulas, beneficiou o sucesso da experiência de ensino. Desta forma, a prática de ensino-aprendizagem exploratória foi assumida ao longo do estudo e incorporada, de forma gradual, como cultura de sala de aula, pela professora-investigadora e pelos alunos. Assim, se no início da experiência de ensino, a ação da professora-investigadora era mais diretiva, no sentido de implementar este modelo de aula, à medida que o modelo era apropriado pela turma, os alunos foram-se tornando mais interventivos. Esta mudança foi particularmente evidente na fase de discussão coletiva. De facto, numa fase inicial da experiência de ensino, os alunos que apresentavam as suas resoluções estavam muito dependentes da aprovação da professora-investigadora e os restantes alunos tinham uma participação reduzida. Contudo, no decurso da experiência de ensino, esses papéis foram-se modificando, salientando-se uma maior participação por parte dos alunos que, genuinamente, queriam partilhar as suas resoluções e fazer-se compreender, e dos que assistiam e, ativamente, manifestavam as dúvidas e questionamentos para entenderem as resoluções apresentadas.

De forma retrospetiva, considerando o duplo papel como professora-investigadora, esta teve, por um lado, de assumir as questões do ensino, na gestão e condução da aula, escuta ativa dos alunos e interpretação das suas representações e, por outro, desenvolver uma contínua busca pelos dados e sua interpretação, para além do confronto próximo com os fundamentos teóricos que suportaram o estudo.

Naturalmente, tendo em conta as expectativas iniciais alimentadas pelos resultados do estudo exploratório e o lidar com as dificuldades manifestadas pelos alunos da turma, a vivência deste duplo papel de professora-investigadora foi motivo de alguma ansiedade, especialmente no início da experiência de ensino. Nessas ocasiões, revestiram-se de particular importância os momentos de trabalho em equipa, entre as duas autoras deste artigo, onde o confronto entre os resultados esperados e os reais eram discutidos e problematizados em face do contexto e dos resultados de outras investigações, adequando-se a intervenção sempre que considerado necessário, procurando manter a coerência dos propósitos principais do estudo. Também a relação com a professora titular de turma, através de um constante diálogo sobre o processo que ia sendo desenvolvido e as tarefas pensadas para aplicar nos momentos seguintes, permitiu adequar as tarefas aos alunos em questão, uma vez que esta detinha uma visão mais abrangente dos conhecimentos e dificuldades destes.

Deste modo, as dificuldades do duplo papel de professora-investigadora foram, de algum modo, atenuadas devido ao facto de toda a experiência de ensino ter sido planeada, concretizada e avaliada com o suporte da equipa constituída com a segunda autora deste artigo. A experiência ao nível da investigação e conhecimento específico do conteúdo da segunda autora permitiram também que o papel de investigadora da primeira autora fosse progressivamente assumido, por esta, com maior segurança.

A confiança da professora-investigadora no sucesso da experiência de ensino foi também sendo reforçada pelo feedback que foi tendo da professora titular da turma onde se realizou este estudo. Uma vez que esta última acompanhou todo o processo, foi possível perceber que a experiência de ensino estava a ser sustentada por aprendizagens significativas dos alunos.

Considerações finais

Nas considerações finais importa refletir sobre a particularidade do duplo papel de professora-investigadora na condução desta experiência de ensino. No que concerne à conjetura que orientou a experiência de ensino, o duplo papel de professora-investigadora esteve presente em ambas as dimensões. Em particular neste estudo, a abrangência do tema, tendo em conta a promoção do pensamento algébrico em uma perspetiva de articulação curricular, exigiu da professora-investigadora um conhecimento não só específico dos conteúdos algébricos a promover nos alunos como também da potencialidade deste tema ser enquadrado no aprofundamento de outros temas do currículo matemático. A necessidade de o professor integrar os conteúdos algébricos na aula, na perspetiva de desenvolverem *olhos e ouvidos algébricos* (Blanton & Kaput, 2005) é, de facto, muito exigente. Por outro lado, a promoção de uma cultura de sala de aula de natureza exploratória é um desafio na sua implementação e manutenção. Estas exigências vão no sentido das já identificadas por Steffe e Thompson (2000) e implicam, de facto, o ser um ouvinte, um facilitador, um dinamizador e um avaliador (Confrey & Lachance, 2000). Desta forma, ambas as dimensões da conjetura, de conteúdo e pedagógica, exigiram à professora-investigadora uma disponibilidade total e constante aprendizagem nem sempre possível de ser concretizado por parte de um professor titular de turma pois, como referem Confrey e Lachance (2000), acarreta um substancial compromisso de tempo e energia.

No entanto, e no sentido do que referem Joseph (2004) e Stephan (2015), o envolvimento total em todos os processos da investigação permite uma maior riqueza da própria investigação, para além de contribuir substancialmente para o desenvolvimento profissional do professor-investigador. O duplo papel de professora-investigadora contribuiu para uma maior riqueza do estudo realizado no sentido de que os seus conhecimentos como professora deste nível de ensino permitiram adequar a condução das aulas da experiência de ensino aos alunos e, neste sentido, a sua experiência profissional contribuiu também para a investigação. Por outro lado, a ampliação das capacidades de investigação da professora-investigadora beneficia a sua própria prática de ensino, nomeadamente através de uma postura inquiridora permanente, contribuindo deste modo para o seu desenvolvimento profissional.

Para que esta contribuição para a investigação e o desenvolvimento profissional fosse, de facto, efetiva, neste estudo foram particularmente importantes os aspetos também identificados pelos professores no estudo de Stephan (2015): a colaboração entre professores e investigadores, a importância da antecipação da aula, e a reflexão diária.

A colaboração, enquadrada no trabalho de equipa entre a professora-investigadora e a segunda autora, ao longo de todas as fases da experiência de ensino, exigindo reuniões constantes, por exemplo para preparação conjunta das tarefas e aulas e posterior reflexão sobre as mesmas, é um aspeto particularmente importante. Também o constante diálogo com a professora titular de turma permitiu refletir sobre a adequação das tarefas à turma e sobre a evolução das aprendizagens dos alunos. A estes ganhos há a acrescentar importantes aprendizagens no domínio da seleção, adaptação e construção de tarefas e também de desenvolvimento curricular (Oliveira & Mestre, 2014).

A prática de antecipação das aulas também foi particularmente importante para ambas as dimensões da conjetura. Tendo em conta, como já referido, a exigência da temática em termos de conteúdo matemático, a antecipação das formas possíveis de promover a emergência da capacidade de generalização nos diferentes conteúdos foi, de facto, muito importante para tornar efetivo e intencional o desenvolvimento dessa capacidade em crescente complexidade, ao longo da experiência de ensino. Adicionalmente, na dimensão pedagógica, a antecipação dos diferentes momentos de aula que caracterizam uma aula de natureza exploratória permitiu preparar intencionalmente a condução da aula. Desta forma, a antecipação das aulas tornou-se uma mais valia para que a professora-investigadora tivesse constantemente presente a trajetória pretendida, quer em termos do ensino e das aprendizagens dos alunos quer em termos da investigação que estava a ser conduzida, e, consequentemente, essa mesma trajetória, hipotética por natureza, fosse moldada quando confrontada com as evidências da prática que eram apreendidas *in loco*. Este aspeto interligou-se de forma constante com a reflexão que esta experiência de ensino promoveu. A planificação das tarefas, o posterior confronto com os resultados emergentes da prática e a planificação das tarefas seguintes permitiram construir um processo continuado de reflexão, que foi também evoluindo ao longo da experiência de ensino. Assim, se no início da experiência de ensino essa reflexão era ainda bastante provisória e revestia-se de uma maior necessidade de confronto com uma procura de *materialização*, por exemplo, através do revisionamento dos vídeos das aulas, no final da experiência de ensino as evidências eram quase autossuficientes e confirmavam a validade do caminho traçado.

O cruzamento do duplo papel de professora-investigadora não permite separar, de forma objetiva, um do outro, sendo difícil perceber quando acaba um e começa o outro. Constituindo as aprendizagens dos alunos o foco do estudo realizado (Mestre, 2014) e não o papel da professora-investigadora, esta reflexão realizada *a posteriori* levantou questões de difícil resposta. Assumindo que o estudo realizado contribuiu para o desenvolvimento profissional da professora-investigadora, neste momento, as questões de ensino são, de alguma forma, encaradas com uma atitude investigativa na perspetiva do questionamento constante sobre as formas e métodos de ensino e a sua relação com as evidências das aprendizagens e dificuldades manifestadas pelos alunos.

Notas

[1] Ao longo do artigo a denominação "professora-investigadora" refere-se à primeira autora.

Referências

Bakker, A. & Van Eerder, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches in qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Dordrecht: Springer.

Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in education. *Educational Psychologist, 39*(4), 243-253.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom. Transforming Thinking, Transforming Practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Cai, J. & Knuth, e. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM, 37*(1), 1-4.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Eds.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-265). Portalegre: SPIEM.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*, 3-22.

Cobb, P, Wood, T., & Yackel, E. (1991). Analogies from the philosophy and sociology of science for understanding classroom life. *Science Education 75*(1), 23-44.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). A design research perspective on the identities that students are developing in mathematics classrooms. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 223-243). New York: Routledge.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Beer, H., Gravemeijer, K., & van Eijck, M. (2015). Discrete and continuous reasoning about change in primary school classrooms, *ZDM, 47*, 981–996. DOI 10.1007/s11858-0 15-0684-5

Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & van Eerde (2009). Design research as means for building a knowledge base for teachers and teaching in Mathematics. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510-524.

Joseph, D. (2004). The practice of design-based research: uncovering the interplay between design, research, and the real-world context. *Educational Psychologist*, 39 (4), 235-242.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3.º ano de escolaridade do ensino básico. In C. Guimarães & P. Reis (Orgs.), *Professores e Infâncias: Estudos e experiências* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Molina, M., Castro, E. & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 435-440.

Molina, M. & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching children mathematics*, 111-117.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Retirado em 18 de Novembro de 2005 de http://www.nctm.org/standards/.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Oliveira, H. & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver & S. Li (Eds). *Transforming Mathematics Instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 173-197). Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-04993-9_11

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*, 83-96.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). New York: Springer.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the con-text of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 44-69). New York: Springer.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 177-194). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stemberger, T. & Cencic, M. (2014). Design-based research in an educational research context. *Journal of contemporary educational studies, 1*, 62-75.

Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers. *ZDM, 47*, 905-917.

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C. D. Lee, & P. Smagorinsky (Eds.), *Vygotskian perspectives on literacy research* (pp. 51–85). New York: Cambridge University Press. Retirado de https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Resumo. Este artigo apresenta uma reflexão sobre uma experiência de ensino centrada no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano, procurando, em particular, discutir o duplo papel de professora-investigadora assumido na sua condução. A experiência de ensino foi orientada por uma conjetura com uma dupla dimensão, de conteúdo e pedagógica, e, em ambas as dimensões, o duplo papel de professora-investigadora revestiu-se de características e desafios particulares. Esta teve de, por um lado, assumir as questões do ensino, na gestão e condução da aula, escuta ativa dos alunos e interpretação das suas representações e, por outro, desenvolver uma contínua busca dos dados e sua interpretação, para além do confronto próximo com os fundamentos teóricos que suportaram o estudo. Esta duplicidade de funções contribuiu para uma maior riqueza do estudo no sentido de que a sua experiência profissional como professora deste nível de ensino permitiu adequar a condução das aulas aos alunos. Por seu turno, o apurar das suas capacidades de investigação beneficiou a sua própria prática de ensino, nomeadamente ao suscitar uma postura inquiridora permanente. Também se concretizaram importantes aprendizagens, por toda a equipa, no domínio da seleção, adaptação e construção de tarefas e também de desenvolvimento curricular.

Palavras-chave: experiência de ensino; pensamento algébrico; generalização; professora-investigadora.

Abstract. This article presents a reflection on a teaching experiment aiming at the development of 4th grade students' algebraic thinking, with a particular focus on the dual role of the teacher-researcher. The teaching experiment was guided by a conjecture with two dimensions (content and pedagogical). In both dimensions, the dual role of teacher-researcher entailed particular characteristics and challenges. On one hand, the teacher-researcher had to take on the teaching issues, by managing and conducting the class, actively listening to the students and interpreting their representations and, on the other hand, she had to develop a continuous search of data and their interpretation, as well as a close confrontation with the theoretical foundations that supported the study.

This duplication of functions has contributed to the richness of the study, in the sense that her professional experience as a teacher of this school level allowed her to adapt the way she conducted the lessons to those students. In turn, the improvement of her research abilities benefited her teaching practice, namely by nurturing a permanent inquisitive stance. There were also important learning achievements by the all team concerning the selection, adaptation and construction of the mathematical tasks and also of curriculum development.

Keywords: teaching experiment; algebraic thinking; generalization; teacher-researcher.

CÉLIA MESTRE
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

HÉLIA OLIVEIRA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

(recebido em agosto de 2016, aceite para publicação em outubro de 2016)