Las posibilidades curriculares de la interpolación/extrapolación gráfica en Bachillerato

Curricular possibilities of graphic interpolation/extrapolation in secondary school

Ainhoa Berciano
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, España
ainhoa.berciano@ehu.eus

Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid, España
tomas.ortega@uva.es

Milagros Puerta Rebuel
Universidad de Valladolid, España
mila71@ole.com

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio empírico sobre la Interpolación/Extrapolación (I/E) gráfica con alumnado de Bachillerato de Ciencias Sociales (16-17 años). Hemos diseñado un conjunto de plantillas de funciones y hemos analizado: 1) sus posibilidades curriculares, 2) las dificultades del alumnado en la realización de la I/E gráfica y 3) su preferencia por el método gráfico frente al método algebraico. La metodología seguida, de tipo cualitativo, ha sido la investigación-acción, consistente en 5 ciclos, con un total de 83 estudiantes. Los instrumentos usados para el análisis de los resultados han sido: las producciones del alumnado, dos encuestas (con escala Likert y abierta) y una tabla de control de tiempo. Concluimos que: 1) el conjunto de plantillas de funciones diseñado conforma un sistema de representación y la utilización de las plantillas gráficas proporciona un buen recurso para identificar las familias de funciones; 2) el alumnado muestra pocas dificultades en la resolución de tareas de I/E gráfica, algunas de ellas asociadas a la localización de puntos en el plano y al uso de reglas de tres; y 3) el método gráfico resulta más motivador que el algebraico, prefiriendo su uso en la mayor parte de las tareas de I/E e implicando que el alumnado dedique más tiempo de estudio a las matemáticas con el método gráfico que con el método algebraico.

Palabras clave: interpolación/extrapolación gráfica; interpolación/extrapolación algebraica; funciones; sistema de representación; Bachillerato.

Abstract. In this paper, we present an empirical study on Interpolation/Extrapolation (I/E) with students of the Social Sciences Bachelor of Science (16-17 years). We have designed a set

of function templates and analyzed: 1) their curricular possibilities, 2) the difficulties of the students in the realization of graphic I/E, and 3) their preference for the graphical method over the algebraic one. The adopted methodology, of qualitative type, has been Action research, consisting of 5 cycles, with a total of 83 students. The instruments used for the analysis of the results have been: students' productions, two tests (Likert scale and open questions) and a time control table. These have allowed us to conclude that: 1) the set of function templates designed is a representation system and the use of graphic templates provides a good resource to identify the families of functions; 2) students have few difficulties in solving graphical I/E tasks, some of them associated with the location of points in the plane and the use of rules of three; and 3) the graphical method is more motivating than algebraic, preferring its use in most I/E tasks and implying that students should spend more time studying mathematics with the graphical method than with the algebraic method.
Key words: graphic interpolation/extrapolation; algebraic interpolation/extrapolation; functions; representation systems; secondary school.

(Recebido em dezembro de 2016, aceite para publicação em maio de 2017)

Introducción

Cuando abordamos cuestiones relacionadas con la enseñanza de la matemática en Educación Secundaria nos encontramos con conceptos matemáticos complejos de estudiar, los cuales generan una serie de dificultades de aprendizaje en el alumnado, relacionados con el razonamiento matemático, interrelacionar las ideas matemáticas e incluso la propia definición de los conceptos (Robertson & Wright, 2014). El estudio de las funciones no es ajeno a esta complejidad, el cual entraña una serie de dificultades asociadas a su aprendizaje, destacando las relativas al concepto de función, la flexibilidad entre proceso y concepto y el nexo entre distintos registros simbólicos (Artigue, 1995).

En este sentido, Hitt (1998) comprueba que el alumnado de secundaria es capaz de realizar transformaciones de representaciones en un mismo sistema semiótico, sobre todo el algebraico, pero que no logra una articulación coherente entre distintos tipos de representación, por lo que propone promover el uso de distintos sistemas de representación. Igualmente, Duval (1998) considera que se deben proponer actividades en las que se trabajen al menos dos sistemas de representación distintos con el fin de fomentar el aprendizaje de las funciones.

En el caso particular del currículo español de Educación Secundaria, éste dedica gran parte al estudio de las funciones y sus distintos aspectos, entre ellos la interpolación, que aparece como contenido del bloque dedicado a "Funciones y Gráficas" de 1.º de Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, en el que se puede leer "Determinación de valores de una función expresada por una tabla: interpolación lineal y cuadrática. Problemas de aplicación" (Decreto 70/2002, 2002). Aún así, a pesar de su incorporación en el currículo oficial, son pocos los trabajos destinados al estudio de las dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la interpolación y, por tanto, en el presente trabajo centramos nuestro interés en él. En particular, pretendemos analizar el alcance didáctico del diseño y uso de un conjunto de plantillas de funciones para trabajar la interpolación de modo gráfico, ver el tipo de dificultad que muestra el alumnado de 1.º de Bachillerato (16-17 años) en su uso y determinar la preferencia del alumnado con respecto a la interpolación gráfica o algebraica.

Marco teórico

A lo largo de nuestra vida, en diversas ocasiones, hemos tenido que "representar" de algún modo (verbalmente, dibujando, esquematizando, etc.) lo que nos han contado con el fin de comprender lo que se nos ha traslado, creando en muchas ocasiones una imagen mental de la situación descrita. Esta acción de representar, entendida como "hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene" (RAE, 2016), debe satisfacer unas propiedades para que realmente refleje la realidad y no lleve a confusión o error. En este sentido, Rico (2009) destaca que desde un punto de vista racionalista la representación es considerada como una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto de estudio; ahora bien, también plantea la necesidad de clarificar la definición de representación, analizando los distintos enfoques dados por diversos autores en estos últimos años.

Según Palmer (1977), citado en Kaput (1987), una representación debe venir caracterizada por ciertas especificaciones para que sea un fiel reflejo del mundo representado. En concreto, Palmer enuncia cinco cuestiones que deben tenerse en cuenta a la hora de definir una representación: 1) ¿cuál es el mundo representado?; 2) ¿cómo definir la representación del mundo?; 3) ¿qué aspectos del mundo representado están siendo representados?; 4) ¿qué aspectos de la representación del mundo están haciendo la representación?; 5) ¿cómo se define la correspondencia entre los dos mundos?.

Si nos restringimos al mundo matemático, Lesh, Post y Behr (1987), distinguen cinco tipos de sistemas de representación: escritura, modelos manipulables, dibujos y diagramas, lenguaje verbal y símbolos escritos. Del mismo modo, Janvier (1987) hace hincapié en los procesos de traslación entre los modelos de representación. Para el caso de los modelos de representación de variables (descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula (ecuación)), determina que los procesos de traslación vienen dados por las acciones: leer, interpretar, reconocer parámetros, medir, computar, dibujar, trazar, probar y ajustar.

A este respecto, los alumnos, normalmente, tienen dificultades en pasar de un sistema de representación a otro. Hecho ya contrastado por diversos investigadores, entre ellos Bell (1979), Bessot y Richard (1979), Burkhardt (1977), Duval (1998), Fischbein (1977) y Lesh (1978), quienes, de una u otra forma, coinciden en señalar que cuando un alumno es capaz de trasladar una idea matemática a diferentes sistemas de representación, es porque el alumno entiende esa idea y eso le permitirá hacer un buen uso de sus representaciones a la hora de resolver un problema.

Azcárate (1995) señala que el éxito en matemáticas se puede relacionar con la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos. Así, es lógico pensar que un alumno que tenga una representación mental rica de un concepto matemático tendrá más posibilidades de éxito que un alumno que tenga una representación más pobre de ese concepto; dicho de otra forma, cuantas más representaciones de un concepto tenga en su mente mayor conocimiento tendrá de ese concepto.

Pero, acorde con Duval (1999), el alumnado no está acostumbrado al uso de los distintos sistemas de representación, y por este motivo, es importante que se le enseñe a manejarlos y aprenderlos creando tareas específicas para este fin. Además, es importante no confundir las representaciones semióticas (dadas por signos, símbolos o gráficos), que serían representaciones externas, con las representaciones mentales, o internas, de los conceptos matemáticos.

Si nos ceñimos a las funciones, son varios los autores que han analizado las dificultades asociadas a su enseñanza-aprendizaje, entre ellos, los relacionados con el uso de distintos tipos de representación (Artigue, 1995).

Para el caso de la representación gráfica, Janvier (1978) afirma que el alumnado suele hacer una lectura icónica de la gráfica, que consiste en interpretarla como un dibujo, alterando el significado de las variables y, a menudo, tendiendo a dar un punto como respuesta a cuestiones referidas a intervalos y confundiendo "mayor o menor incremento" con "mayor o menor valor". Azcárate y Deulofeu (1990) muestran que las ideas del alumnado sobre la interpretación del lenguaje gráfico no son siempre correctas y los errores más frecuentes se producen en concepciones muy diversas, de las que destacan la graduación errónea de los ejes y la inversión en el orden de las coordenadas; también se producen errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales y en la concepción discreta de los puntos de una recta.

En este sentido, Fabra y Deulofeu (2000), analizan las respuestas dadas por 250 estudiantes de secundaria (16-18 años) a la tarea de construcción del gráfico de una función dada a través de condiciones expresadas en forma verbal y que representa una situación descontextualizada con el fin de analizar el tipo de razonamiento y estrategia que usan en lo que se refiere al uso y abuso en la utilización de continuidad y de los gráficos que corresponden a funciones elementales.

Debido a estas y otras dificultades, con el fin de mejorar la comprensión de las relaciones funcionales, son muchos los autores que recomiendan el uso de los cuatro sistemas de representación (verbal, algebraica, tabular y gráfica) y proponen que se instruya al alumnado en tareas de traducción (Bagni, 2004; Castro & Castro, 1997; Dubinsky & Narel, 1992; Duval, 1998; Eisenberg, 1991; Ortega del Rincón, 1998; Schwarz & Dreyfus, 1995; Vinner, 1991).

Por otro lado, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) destacan la importancia de realizar tareas de interpretación y construcción de gráficas de funciones, ligando éstas con a las funciones y sus tipos de representación (algebraica, tabla y gráfica). En concreto, con las tareas de interpretación, el alumnado debe estudiar las propiedades locales o globales de una función, mientras que las tareas de construcción se refieren a la construcción local o global de una gráfica a partir de una tabla de datos o de una función algebraica, o a la construcción de una función algebraica a partir de una gráfica. Estas tareas (interpretación/construcción) se pueden clasificar en cuatro tipos: *predicción* (requiere conjeturar a partir de una gráfica dada, dónde deberían estar otros puntos o parte de la gráfica que se desconoce), *clasificación* (requiere entender la definición formal de función o distinguir características propias de familias de funciones), *traslación* (precisa reconocer una misma función dada en una forma de representación u otra) y *escalas* (precisa atención a los ejes y sus escalas y a las unidades de medida usadas).

Dentro de las tareas referidas a la construcción de funciones, nos centraremos en el estudio de la interpolación/extrapolación de funciones. Con respecto a la interpolación debemos mencionar diversos trabajos de investigación que tratan este tema, aunque su naturaleza sea muy variada.

En Karplus (1979), se presentan tareas de predicción que pueden estar dirigidas a la interpolación numérica o a continuar una gráfica propuesta. En cada caso, esta tarea requiere que los alumnos detecten un dibujo de una gráfica, basado en unos puntos dados, y después dibujen puntos que pertenezcan a esa gráfica. Esta construcción depende de la interpretación del alumno. Por otro lado, en el estudio de Dreyfus y Eisenberg (1983), los alumnos deben continuar dibujando unas gráficas que se les proporciona; con el fin de determinar las propiedades o dibujos de las gráficas que atraen más a los alumnos.

Si nos restringimos al problema didáctico de la interpolación, son varios los autores que han analizado distintos aspectos del mismo; así, Gordon y Yang (2017) destacan la importancia de mostrar las ideas y métodos más relevantes de la interpolación y el uso de los polinomios de interpolación a todos los niveles educativos. En particular, estudian la posibilidad didáctica de aproximar las funciones exponenciales y logarítmicas con polinomios de interpolación en lugar de los polinomios de Taylor, calculando el error en las distintas aproximaciones, con el fin de mostrar la importancia de las distintas aproximaciones de interpolación, su diferencia con la función a aproximar y la repercusión de ésta.

Lacasta (1995) trata de analizar por qué los alumnos de diferentes niveles fracasan en la interpretación de las gráficas de funciones en el estudio de la interpolación algebraica. Su estudio está limitado a gráficas cartesianas de funciones explícitas reales de variable real, que son las que se estudian en Educación Secundaria, y la primera cuestión que la plantea es determinar si las gráficas de las funciones juegan un papel importante en el estudio de éstas, (descomposición de funciones en funciones más simples, estudio de propiedades de funciones, estudio de derivadas...), o son solamente un método de comunicación o una presentación.

Cantoral y Montiel (2003), con el fin de mejorar la comprensión de los polinomios de interpolación de Lagrange, diseñan una propuesta didáctica basada en el uso de calculadores gráficas para el cálculo de polinomios de interpolación de menor grado que ayuden a visualizar y entender el polinomio de Lagrange de grado n.

Carmona, Domínguez, Krause y Durán (2011) exploran las posibilidades didácticas de la interpolación de funciones, considerada ésta como un puente que une el concepto de continuidad clásico del análisis y el paso al mundo discreto. En particular, analizan si la implementación de una actividad "generativa" sobre la interpolación de funciones puede conducir a un espacio de soluciones cualitativamente diferente cuando se usa en una clase de cálculo en comparación con su uso en el contexto STEM, concluyendo que se dan ciertas diferencias dependiendo del contexto.

Por último, Berciano, Ortega del Rincón y Puerta Rebuel (2015) estudian los resultados académicos obtenidos por los alumnos a la hora de trabajar la interpolación/extrapolación de funciones en Bachillerato con métodos algebraico y gráfico, mostrando que los resultados obtenidos con el método algebraico dependen en gran medida de los conocimientos en resolución de sistemas de ecuaciones que el alumnado tenga de años anteriores y, en consecuencia, de la familia de funciones a interpolar/extrapolar. Sin embargo, con el método gráfico esto no sucede, ya que el alumnado alcanza mejores resultados sin que tengan conocimientos previos referidos a este tema porque es la primera vez que lo utilizan.

Objetivos de la investigación

El objetivo principal de nuestra investigación es explorar las posibilidades curriculares de la interpolación gráfica. Para tal fin, hemos creado un conjunto de plantillas de familias de funciones (descritas en la siguiente sección) y hemos diseñado e implementado una experimentación de aula para trabajar la interpolación/extrapolación (I/E) gráfica y la I/E algebraica con alumnado de 1.º de Bachillerato (16-17 años).

Más concretamente, queremos: 1) comprobar si el conjunto de plantillas de familias de funciones creado explícitamente para trabajar la I/E gráfica define un sistema de representación; 2) analizar las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la I/E gráfica recibiendo una instrucción adecuada y utilizando material didáctico preciso; 3) valorar la preferencia del alumnado con respecto al método gráfico o algebraico.

Para poder analizar los objetivos marcados, el tipo de problema planteado al alumnado en un contexto de resolución de problemas verbales es el siguiente: "dados los puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),..., (x_n, y_n), calcular el valor de la ordenada de la función que pasa por ellos en un punto $x=a$, distinto de los anteriores o bien determinar el valor de la abscisa del punto para un valor de la ordenada $y=b$".

A este respecto, debemos mencionar que, aunque no es necesario determinar la función de forma explícita para obtener el valor de la ordenada, lo más usual en estos niveles educativos es obtener dicha función y a continuación calcular la imagen de $x=a$. En suma, se halla una función $y=f(x)$, que para $x=x_0$, $x=x_1$,..., $x=x_n$ tome los valores $y=y_0$, $y=y_1$,..., $y=y_n$, respectivamente. En caso de que el punto $x=a$ esté comprendido entre el menor y el mayor de los valores x_0, x_1,..., x_n;, este proceso se llama interpolación; por el contrario, si $x=a$ es más pequeño que el menor valor de los x_0, x_1,..., x_n o más grande que el mayor de ellos, se conoce como extrapolación.

Contexto del estudio

A continuación pasamos a detallar el contexto del estudio, en el que describimos el tipo de tarea planteada al alumnado y la descripción del diseño y uso de las plantillas de funciones.

Tipos de tareas

En la fase de planificación, hemos elaborado todo el material didáctico que más tarde hemos proporcionado al alumnado para la realización de los ejercicios de interpolación-extrapolación, tanto para el método algebraico como para el gráfico. En particular, dicho material didáctico consta de 11 tareas de interpolación/extrapolación algebraica y gráfica en un cuadernillo, en las que se detalla que método debe usarse para la resolución del ejercicio, por ejemplo:

Método algebraico:

Tarea 1.5. Calcula la ecuación de la elipse del tipo $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ que pase por los puntos A(4, 3/5) y B(2, √21/5). Para esta elipse, halla las ordenadas correspondientes a las abscisas x=3 y x=5.

Método gráfico:

Tarea 2.5. Localiza la elipse que pase por los puntos A(4, 3/5) y B(2, √21/5). Para esta elipse, halla las ordenadas correspondientes a las abscisas x=3 y x=5.

Diseño y uso de las plantillas de las familias de funciones

En el primer ciclo de implementación hemos construido las plantillas gráficas de las familias de funciones que vamos a interpolar-extrapolar (lineal, cuadrática, circular, elíptica, hiperbólica, exponencial, logarítmica y trigonométrica). Estas plantillas han sido elaboradas por la profesora-investigadora utilizando los programas informáticos DERIVE y CABRI (elegidos por su potencial de cálculo, representación gráfica y familiaridad de uso por parte de la docente) para, posteriormente, imprimirlas sobre transparencias. Estas transparencias tienen la característica de que se pueden colocar sobre hojas de papel milimetradas, ajustadas a los puntos y, así, el alumnado puede localizar y colocar correctamente las funciones necesarias para realizar las interpolaciones y extrapolaciones.

Para realizar las tareas de aula y poder comparar el método algebraico y gráfico en las mismas condiciones, se ha elegido un entorno de lápiz y papel para ambos casos. Esto ha implicado que para el modo gráfico, cada estudiante disponga de una copia impresa de todas las plantillas, un cuaderno milimetrado y escuadra y cartabón. Se ha seleccionado el papel milimetrado para que el alumnado pueda colocar fácilmente los puntos dados en cada una de las tareas, de modo que no generen dificultades añadidas a las derivadas del uso de las plantillas. Igualmente, en lugar de utilizar software, se ha decidido usar las plantillas impresas por su facilidad de manejo (es importante recordar que el objetivo de este estudio no es analizar el potencial de las nuevas tecnologías ni las destrezas del alumnado con ellas, sino ver qué recorrido curricular puede tener la I/E de modo gráfico facilitando al alumnado una herramienta fácil de usar).

Para el diseño de las plantillas, todas las familias de funciones han sido centradas en el origen del eje de coordenadas, debido a las siguientes propiedades:

- Dada una función $y=f(x)$ y un número real k, distinto de cero, la suma $g(x)=f(x)+k$ es una función trasladada de $f(x)$ por k. La gráfica de la función suma $g(x)=f(x)+k$ se obtiene trasladando verticalmente la gráfica de la función $y=f(x)$ a una distancia k; hacia arriba (si $k>0$) o hacia abajo (si $k<0$).
- Si en la expresión analítica de una función $y=f(x)$ se sustituye la variable independiente x por $x - k$, se efectúa una traslación en la variable independiente y se obtiene la función compuesta $h(x)=f(x-k)$. La gráfica de esta función se obtiene trasladando horizontalmente la gráfica de f una distancia k; hacia la derecha (si $k>0$) y hacia la izquierda (si $k<0$).
- Si en la expresión analítica de la función $y=f(x)$ se sustituye la variable independiente x por kx, con $k>0$, se obtiene la función compuesta $t(x)=f(kx)$, que supone cambiar la escala en la variable independiente. La gráfica de $t(x)=f(kx)$ se obtiene; comprimiendo horizontalmente (si $|k|>1$) y dilatando horizontalmente (si $|k|<1$), en un factor k la gráfica de $y=f(x)$.

Ejemplo de cálculo de ordenadas usando plantilla de familia de funciones lineales

Para localizar la recta que pasa por dos puntos $A(a, b)$, $B(c, d)$, por el método gráfico, se sitúan los puntos en un diagrama cartesiano, a continuación se elige la plantilla de las rectas (figura 1).

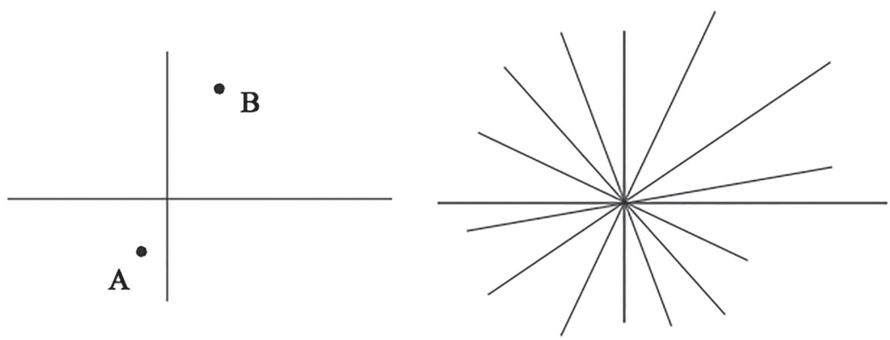


Figura 1. Puntos A(a,b) y B(c,d) en el diagrama cartesiano y familia de rectas (izquierda y derecha respectivamente)

Posteriormente, la plantilla de rectas se ajusta hasta que una de ellas esté sobre los dos puntos. Para encontrar las ordenadas correspondientes a las abscisas *p* y *r* que nos piden, sólo hay que situar la *x* correspondiente en el eje de abscisas, trazar por ese punto una paralela al eje de ordenadas, hasta que corte a la recta, y en ese punto trazar una paralela al eje de abscisas, hasta cortar al eje *y*, ese punto de corte será la ordenada buscada. Ahora sólo queda deshacer la escala para obtener el valor que representan *q* y *s* (figura 2).

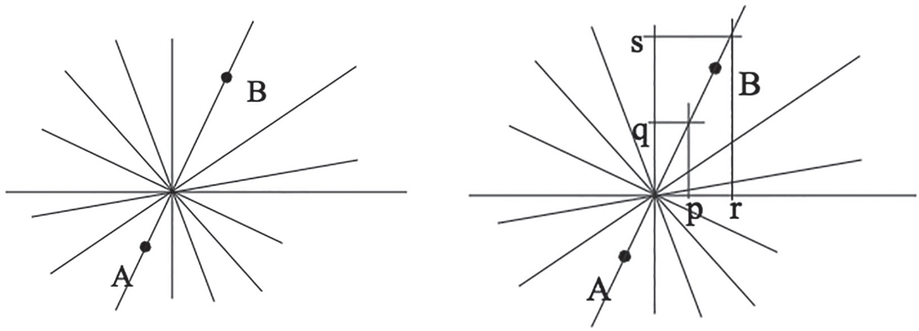


Figura 2. Recta que pasa por los puntos A(a,b) y B(c,d) y localización de las ordenadas q y s (izquierda y derecha respectivamente)

Metodología

Esta investigación, al surgir de la observación en el aula de una situación educativa con posibilidades de mejora, usa una metodología cualitativa de investigación-acción (Kemmis & McTaggart, 1987; McNiff, 2014), aunque también muestra algunos datos cuantitativos.

En este trabajo se han diseñado 5 ciclos en los que se han desarrollado las cuatro fases de la investigación-acción (planificación, acción, observación y reflexión), con un total 4-5 sesiones implementadas en cada ciclo. En total, a lo largo de toda la prueba se ha contado con la colaboración de 83 estudiantes de diversos Institutos de Enseñanza Secundaria de Zamora y Valladolid. El paso de los ciclos ha venido marcado por el incremento de dificultad en los enunciados de las tareas y el control de los tiempos dedicados en la resolución de los mismos (Puerta Rebuel, 2009). En concreto, en el ciclo 1 se implementa por primera vez la propuesta didáctica, en el ciclo 2 se confirman los resultados obtenidos en el ciclo 1 (sin plantear cambio alguno); en el ciclo 3 se introducen ejercicios de cambios de escala y enunciados histórico-narrativos; en el ciclo 4 se introducen coeficientes fraccionarios sencillos en las tareas y, por último, en el ciclo 5 se introducen tanto coeficientes decimales como fraccionarios.

Los instrumentos de medida empleados en el presente trabajo han sido variados, según los objetivos. Para el primer objetivo, *comprobar si el conjunto de plantillas de familias* *de funciones define un sistema de representación*, se han analizado todas las propiedades que un sistema de representación debe satisfacer, determinadas por Palmer (1977), citadas en Kaput (1987). Para el segundo objetivo, *analizar las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la I/E gráfica*, se han analizado las producciones del alumnado, contabilizando el número de estudiantes que realiza correctamente las tareas y las dificultades mostradas en las respuestas al cuestionario de preguntas abiertas (anexo I); y un registro del tiempo invertido en la realización de las tareas, consistente en una tabla con los tiempos totales de cada estudiante en la realización de los ejercicios de modo gráfico y de modo algebraico (anexo II).

Para el tercer objetivo, *valorar la preferencia del alumnado con respecto al método gráfico o algebraico*, se han usado un cuestionario tipo Likert (anexo III) y un cuestionario con varias preguntas abiertas (anexo I) que evalúan las preferencias del alumnado.

Para poder analizar las producciones del alumnado y poder comparar los resultados académicos obtenidos en la realización de los ejercicios con el método algebraico o método gráfico, hemos definido la siguiente escala de valoración, basada en el concepto de *cuadro* definido por Douady (1995). Un *marco* está constituido por los objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre los objetos, de sus formulaciones e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Dos cuadros pueden implicar los mismos objetos y, sin embargo, producir diferentes imágenes mentales. Nosotros utilizaremos los *marcos* algebraico y geométrico para resolver cuestiones de interpolación y extrapolación lineal, cuadrática, circular, elíptica,…, que serían nuestros *cuadros* (ver tabla 1 y tabla 2).

MÉTODO ALGEBRAICO	**MÉTODO GRÁFICO**
Ecuación genérica	Plantilla gráfica
Pares de números	Puntos del plano
Plantear un sistema de ecuaciones	Representar los puntos en el plano cartesiano
Resolver el sistema de ecuaciones	Ajustar la plantilla gráfica en el plano cartesiano
Escribir la función concreta	Localizar la curva que contiene a los puntos
Calculo numérico de los valores a I/E	Lectura numérica de los puntos a I/E

Tabla 1. Unidades elementales en el método algebraico y gráfico

Con este marco, definimos la siguiente escala de puntuaciones:

INTERPOLACIÓN ALGEBRAICA	INTERPOLACIÓN GRÁFICA
No hace nada, 0.	No hace nada, 0.
Plantea el sistema, 1.	Representa los puntos dados, 1.
Intenta resolver, 2.	Dibuja un punto de interpolación/extrapolación, 2.
Calcula los parámetros, 3.	Dibuja los dos puntos de interpolación / extrapolación, 3.
Calcula uno de los valores de interpolación/extrapolación, 4.	Lectura numérica de uno de los puntos de interpolación /extrapolación, 4.
Calcula los dos valores de interpolación/ extrapolación, 5.	Lectura numérica de los dos puntos de interpolación /extrapolación, 5.

Tabla 2. Unidades elementales y escalas de puntuación

Resultados

A continuación mostramos los resultados obtenidos acorde a los objetivos marcados.

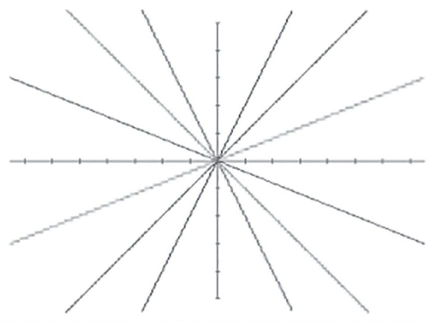
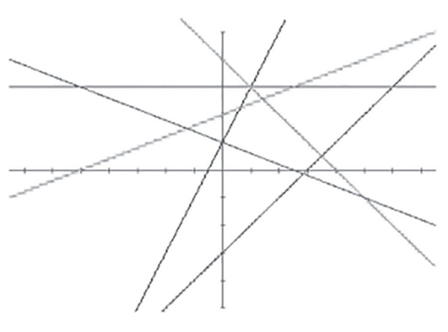
Comprobar si el conjunto de plantillas de familias de funciones definen un sistema de representación

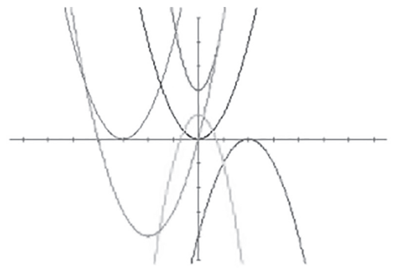
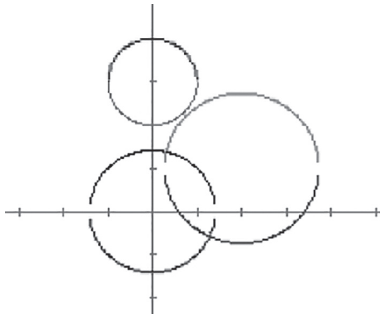
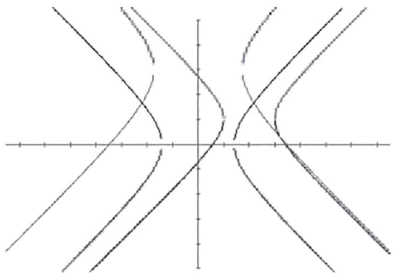
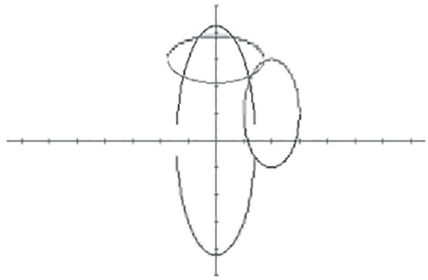
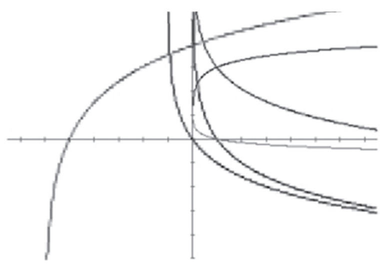
El primer resultado que presentamos es que el sistema de plantillas que hemos construido constituye un **sistema de representación** según las especificaciones descritas en el Marco teórico:

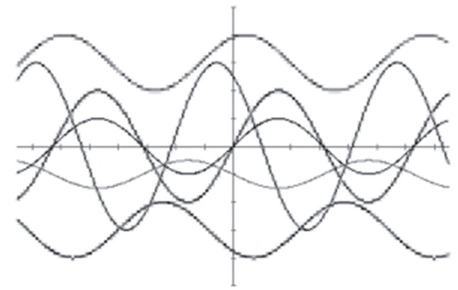
1. El *mundo representado:* serán las funciones lineales, afines, cuadráticas, circulares, elípticas, hiperbólicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (ver figura 3). Como ya hemos mencionado en el apartado anterior, gracias a las propiedades de las funciones (traslación, dilatación, …), el conjunto de plantillas definido representa a todas las familias de funciones sin tener que estar centradas en el origen del eje de coordenadas.
2. La *representación del mundo:* se hace a través de sus gráficas cartesianas, unas, de manera "exacta" (funciones lineales, afines y circulares) y, otras, (el resto) de forma aproximada. Esta representación se cataloga dentro de la clase de representación gráfica de las funciones.
3. *Aspectos del mundo representado:* nuestro conjunto de plantillas nos permite analizar las características globales de la función (acorde con Ortega & Pecharromán, 2010), entre otras: dominio, recorrido, simetrías, periodicidad, continuidad, derivabilidad, comportamiento asintótico, intersecciones, crecimiento y decrecimiento, extremos, convexidad y concavidad y puntos de

inflexión. Todos estos aspectos los podemos ver en las plantillas de dos modos: intuitivo y formal (Azcárate & Deulofeu, 1990). A modo de ejemplo, de modo intuitivo, observando la gráfica podemos saber cuál es el dominio de definición de la función, basta con ver dónde está "dibujada" y determinar el intervalo del eje x, (*a, b*), el cual contiene la coordenada de dicho dibujo; también podemos saber si es (de)creciente en un intervalo (*a, b*) si ésta siempre "sube" (o "baja"), etc. De modo formal, analizando la gráfica de la función podemos saber si la derivada es positiva, negativa o nula (se corresponde con la pendiente de la recta tangente) y, por tanto, determinar los puntos de inflexión de la función; igualmente, analizando la gráfica de la función derivada, si ésta es positiva/negativa en un intervalo (*a, b*), sabemos que la función es creciente/decreciente en ese intervalo.

4. *Aspectos de la representación*: Nosotros nos vamos a centrar en la unicidad, porque la interpolación trata de encontrar una función que pase por los puntos dados, y ésta será única en la familia que se está considerando, y que está generalizada por los parámetros que intervienen en su expresión algebraica. Para definir la función original, se representan puntos $(x, f(x))$. Gracias a la continuidad, si $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ son dos puntos representados, el segmento de curva que los une representa a la función definida en el intervalo $[x_1, x_2]$.
5. La *relación* entre cada función y su gráfica, muestra la concordancia entre ambos mundos.

	
Funciones lineales: $L(x)=mx$, La función queda determinada por el parámetro *m*. Se trata de una familia de rectas que pasan por el origen y viceversa.	**Funciones afines:** $A(x)=mx+n$, rectas no verticales, $A(y)=my+n$, rectas no horizontales. Esta familia está determinada por la pendiente y la ordenada en el origen

	
Funciones cuadráticas: $C(x)=ax^2+bx+c$, parábolas de eje vertical. Esta familia viene determinada por tres puntos	**Funciones circulares**: $C_i(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, $C_i(x)=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}$.
	
Funciones hiperbólicas: $H(x)=y_0+\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_0)^2-a^2}$, $H(x)=y_0-\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_0)^2-a^2}$	**Funciones elípticas**: $E_l(x)=y_0+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}$, $E_l(x)=y_0-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}$
	
Funciones exponenciales: $E(x)=a\cdot b^{x-h}+k$, siendo b un número real positivo distinto de 1, y a, h y k números reales, y a no nulo.	**Funciones logarítmicas**: $L(x)=a\cdot \log_b(x-h)+k$, siendo b un número real positivo distinto de 1, y a, h y k números reales.



Funciones trigonométricas: T(x)=$a \cdot sen(bx)$ siendo a y b números reales.

Figura 3. Familias de funciones diseñadas y creadas

Analizar las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la I/E gráfica

Para poder analizar las dificultades del alumnado en la resolución de la I/E de modo gráfico, primeramente nos hemos centrado en contabilizar el número de estudiantes que son capaces de realizar las tareas correctamente para cada una de las familias de funciones, para posteriormente fijarnos en el tiempo invertido en la resolución de los ejercicios.

Así, tal como muestran los datos de la Tabla 3, se puede apreciar que los resultados son muy parecidos independientemente de la familia de funciones con la que se desea trabajar. Además, si analizamos los datos referentes a las puntuaciones 4 y 5 (relativas a la realización correcta de la interpolación de uno o los dos puntos solicitados) destacamos el alto número de estudiantes que ha resuelto correctamente los ejercicios de I/E exponencial, logarítmica y trigonométrica (39, 39 y 42 estudiantes respectivamente).

Resultados	0	1	2	3	4	5
Lineal	2	6	2	0	4	34
Parabólica	9	4	1	1	6	27
Circular	0	6	0	6	12	24
Hiperbólica	2	10	4	2	4	26
Elíptica	1	8	4	3	7	25
Exponencial	0	4	2	3	7	32
Logarítmica	2	6	0	1	5	34
Trigonométrica	2	4	0	0	15	27

Tabla 3. Número de alumnado según nivel de corrección de las tareas en función de la familia de funciones (sub-muestra de 48 estudiantes)

Cuando analizamos el cuestionario de respuesta abierta completado por el alumnado, con respecto a la pregunta de "escribe libremente qué te ha parecido el método gráfico" (ver anexo I), en un porcentaje alto destacan que son capaces de resolver las tareas sin problemas, de hecho, manifiestan: "Con el método gráfico no necesitas saber fórmulas ni saber despejar incógnitas"; "El método gráfico siempre se puede usar, en cambio, el método algebraico es demasiado complicado"; "El método gráfico es más sencillo y se ve más fácilmente, lo comprendes mejor y más rápido".

Mientras que cuando les preguntamos por el método algebraico y les pedimos que contesten libremente a la pregunta de "escribe libremente qué te ha parecido el método algebraico" (ver anexo I), destacan la dificultad en la resolución del sistema de ecuaciones, entre otras, mencionan: "Resolver estos dos casos de I/E mediante el método algebraico es muy difícil porque las fórmulas son muy complicadas".

Este hecho se debe a que con el método gráfico deben saber hacer reglas de tres y no necesitan ningún conocimiento previo de resolución de sistemas de ecuaciones, mientras que con el método algebraico sí deben resolver sistemas de ecuaciones que, en algunos casos, puede ser muy complicados para ellos (dada la falta de costumbre en resolver sistemas con funciones exponenciales, logaritmos, trigonométricas,…), de hecho, un estudiante menciona: "Con el método algebraico no sé resolver el sistema y con el método grafico no te hace falta saber mucho, sólo reglas de tres".

Aún así, algunos estudiantes muestran ciertas dificultades asociadas a errores de localización de puntos en el plano, uso de las reglas de tres y la toma correcta de medidas, entre las que destacamos: "El método gráfico no es difícil, lo que pasa es que a mí no me gusta dibujar (por ejemplo el 2.6) y con este método no sabes exactamente los números, en cambio el método algebraico en los dos últimos casos es algo más lioso, pero es más exacto"; "Prefiero el método algebraico porque me gusta más resolver sistemas de ecuaciones que las gráficas. El método grafico me parece un lío con tanta regla de tres".

En cuanto al tiempo de estudio invertido, si nos fijamos en la Figura 4, la cual muestra el tiempo total dedicado por cada estudiante a la resolución de los ejercicios de modo gráfico, de modo algebraico y la diferencia de tiempo entre ambos, concluimos que en la mayor parte de los casos analizados, los estudiantes han invertido un mayor tiempo en la realización de los ejercicios cuando se les planteaban tareas de I/E que debían ser resueltas con el método gráfico; no así en el caso algebraico, en cuyo caso muchos de los ejercicios los dejaban sin resolver por la dificultad de su resolución. En concreto, el 63.8% de los estudiantes han dedicado más tiempo a la resolución de los ejercicios usando el método gráfico, frente al 32.7% de los estudiantes que han dedicado más tiempo a la resolución por el método algebraico.

El tiempo medio de dedicación al estudio de las funciones con el método gráfico es de 73 minutos, frente a los 66 minutos dedicados con el método algebraico. Una justificación a la diferencia de tiempo dedicado la encontramos en las respuestas abiertas del alumnado, en las que se muestra que la resolución con el método algebraico es difícil y en varias ocasiones se desestima la tarea por ser demasiado compleja con este método (por ejemplo, para los ejercicios de I/E circular, hiperbólica, elíptica, exponencial, logarítmica y trigonométrica la mayoría de los alumnos dicen sentirse incapaces de resolver estos ejercicios mediante el método algebraico).

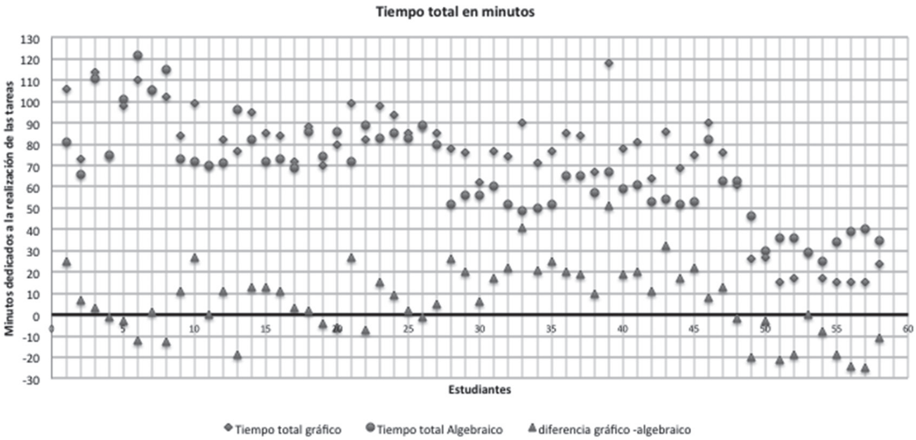


Figura 4. Tiempo invertido en la resolución de los ejercicios de modo gráfico o algebraico y su diferencia (sub-muestra de 58 estudiantes)

Valorar el grado de preferencia del alumnado

Cuando preguntamos a los alumnos sobre su preferencia con respecto a la I/E algebraica o gráfica (anexo I), encontramos que en el caso de las I/E lineal y cuadrática en un 55-60% de los casos prefieren el método algebraico dado que les parece fácil resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, dado que esta tarea la han realizado en cursos anteriores y están habituados a ella. Así, un alumno muestra que: "Me parece más fácil con el método algebraico porque es lo que he utilizado siempre, sólo es aplicar la fórmula y sustituir".

Sin embargo para los casos de la I/E, circular, hiperbólica, elíptica, exponencial, logarítmica y trigonométrica, las preferencias por el método gráfico están entre un 70% y un 80%, ya que, según ellos, son incapaces de resolver estos problemas mediante el método algebraico: "Utilizar el método gráfico es mucho más sencillo que resolver ecuaciones exponenciales"; "El método algebraico es más difícil, largo y hay que hacer muchas operaciones en las que te puedes liar".

Si analizamos el test de tipo Likert sobre preferencias (anexo III), el cual usa una escala de valoración donde 0 es nada y 5 es mucho, tal como muestra la Figura 5, el alumnado da al método gráfico una puntuación muy superior que la concedida al método algebraico, especialmente en las preguntas referidas al gusto, la facilidad, interés y preferencia de utilización de métodos (P1, P2, P4, P5 respectivamente); preguntas completamente relacionadas unas con otras, dado que al parecerles más fácil el método gráfico y además ser algo novedoso en el aula, les ha resultado más interesante, mostrando una clara preferencia por este método.

Igualmente, con respecto al nivel de razonamiento (entendido como el tipo de argumentación que han tenido que hacer en la resolución de las actividades para llegar a la solución), el alumnado considera que es similar mediante los dos métodos (P6), aunque a la hora de responder a la pregunta P3, "¿cuánto han aprendido?", consideran que han aprendido más con el método gráfico que con el algebraico, porque en general han sido capaces de resolver muchas más tareas con el método gráfico que con el algebraico.

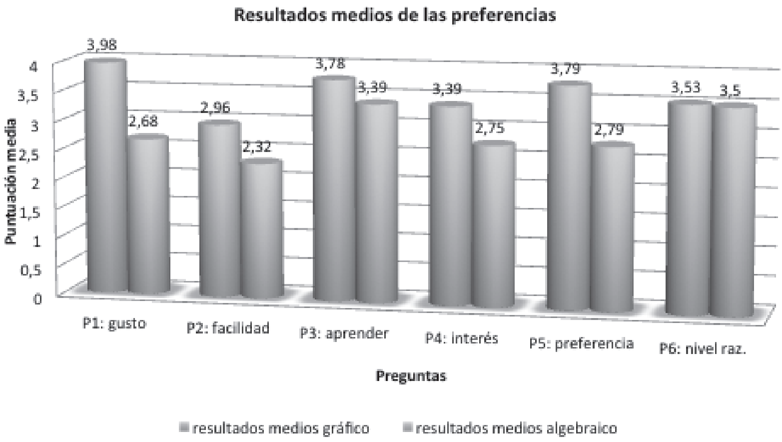


Figura 5. Media de valoración del método gráfico y del método algebraico respectivamente (sub-muestra de 64 estudiantes)

Como ya hemos mencionado, la valoración que los alumnos dan al método gráfico es muy superior que la concedida al método algebraico y prefieren en general utilizar el método gráfico. En concreto, en los ejercicios de I/E elíptica, circular, hiperbólica, elíptica, exponencial, logarítmica y trigonométrica la mayoría de los alumnos prefieren utilizar el método gráfico, ya que, según dicen, son incapaces de resolver estos ejercicios utilizando el método algebraico. Además, la mayoría de los alumnos piensa que el método gráfico es más fácil y entretenido.

Finalmente, si analizamos algunas de las respuestas dadas por los alumnos al cuestionario de preguntas abiertas (anexo I), vemos que cuando los alumnos tienen que elegir para cada tipo de I/E el método a utilizar y pueden escribir libremente lo que les ha parecido cada método, nos encontramos con que la mayoría de los alumnos prefieren el método gráfico, ya que les parece más entretenido, rápido y fácil, aunque también muestran alguna dificultad. Como ejemplos: "el método gráfico es más ameno, más fácil y más general"; "el método gráfico no requiere conocimientos previos, sólo hay que saber hacer reglas de tres" y "ves lo que estas haciendo"; "Al principio cuesta un poco, porque es la primera vez que utilizaba este método". Como inconveniente comentan que es muy difícil tomar bien las medidas y que es menos exacto que el método algebraico.

Conclusiones

Como hemos mostrado en capítulos anteriores del presente trabajo, uno de nuestros objetivos era comprobar si el diseño de una colección de plantillas de familias de funciones es un sistema de representación válido para trabajar la Interpolación/Extrapolación de funciones de modo gráfico. En este sentido, concluimos que nuestra colección de plantillas de familias de funciones satisface las propiedades de un sistema de representación (acorde con Kaput, 1987), por lo que es una buena herramienta para trabajar aspectos de la interpolación de modo gráfico.

Con respecto al segundo objetivo, analizar las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de la I/E gráfica, hemos probado que, en un porcentaje muy pequeño el alumnado muestra ciertas dificultades con el manejo de las plantillas y de su correcto uso asociadas a errores de localización de puntos en el plano (acorde con Azcárate & Deulofeu, 1990) y a la regla de tres; pero, en general, los resultados obtenidos son muy positivos, y en un porcentaje alto, los alumnos son capaces de resolver correctamente las tareas de interpolación independientemente de la familia de funciones seleccionada.

De hecho, la mayoría de los alumnos prefieren utilizar la interpolación gráfica para la mayor parte de los ejercicios de I/E, ya que según dicen, tienen más dificultades para resolver estos ejercicios mediante el método algebraico. Este hecho, implica que inviertan un mayor tiempo al estudio de la matemática con el método gráfico frente al método algebraico.

Con respecto al tercer objetivo, valorar la preferencia del alumnado, en general, al alumnado le motiva más el método gráfico que el algebraico y éste describe múltiples razones que avalan su preferencia: su facilidad de uso, que es más ameno e incluso mencionan que para utilizar este método sólo hay que saber hacer reglas de tres, y no se deben resolver sistemas de ecuaciones complicados, percepción que es muy positiva (aunque no sea absolutamente real, ya que para poder realizar I/E por el método gráfico, tienen que saber manejar las plantillas gráficas y, sobre todo, el sistema cartesiano).

En particular, en los ejercicios de I/E gráfica, los alumnos utilizan las plantillas y, con ellas, aprenden a identificar las gráficas de cada familia de funciones y sus características generales; por lo que consideramos que la utilización de plantillas gráficas es un buen recurso para que los alumnos identifiquen las gráficas de cada familia de funciones y, de este modo, vean lo que están haciendo y comprendan mejor el proceso de I/E.

Además, el uso de plantillas facilita la utilización conjunta de las representaciones algebraica y gráfica, asociando a cada gráfica la expresión algebraica correspondiente y recíprocamente, tarea de traducción fundamental en la enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las funciones (Duval, 1999; Hitt, 1998) y, en particular, de la interpolación. Estos resultados no coinciden con los de la tesis de Lacasta (1995), donde se afirma que la presentación gráfica no juega un papel significativamente distinto de otros modos de presentación. Sin embargo, nuestra investigación corrobora que las representaciones gráficas juegan un papel fundamental en los aprendizajes de la interpolación/extrapolación (acorde con Berciano, Ortega del Rincón & Puerta Rebuel, 2015) y, por ende, de las propiedades de las funciones, hecho también investigado por Ortega y Pecharromán (2010), aunque su investigación trata del aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas y, en nuestro caso, nos hemos restringido a la Interpolación y Extrapolación de funciones.

En resumen, teniendo en cuenta las respuestas obtenidas a los tres objetivos anteriormente descritos, éstas nos llevan a valorar muy positivamente las posibilidades curriculares de la interpolación/extrapolación gráfica (objetivo principal de este estudio); y plantear el uso de las plantillas gráficas de funciones como un material básico en la enseñanza-aprendizaje de la interpolación/extrapolación gráfica.

Finalmente, debemos destacar las limitaciones del estudio, el cual ha sido realizado con una muestra pequeña de alumnado (83 estudiantes) y, por tanto, creemos necesario seguir indagando en las posibilidades curriculares de la I/E gráfica con una muestra mayor procedente de distintas especialidades de Bachillerato, al igual que con su adaptación al uso de tecnologías.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *4*, 13-20.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Síntesis.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(1), 5-23.

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 361-387.

Berciano, A., Ortega del Rincón, T., & Puerta Rebuel, M. (2015). Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 43-58.

Bessot, A., & Richard, F. (1979). *Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procedures en vue d'étudier le rôle du schéma* (Thése collective de 3e cycle). Université de Bordeaux I.

Burkhardt, H. (1977). *Seven sevens are fifty? Mathematics for the real world*. University of Nottingham: Shell Centre for Mathematics & Education Publication.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Una presentación visual al polinomio de interpolación de Lagrange. *Números, 55*, 3-22.

Carmona, G., Domínguez, A., Krause, G., & Durán, P. (2011). Emergent public spaces: Generative activities on function interpolation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 11*(4), 362-381.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. In L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Orsori.

DECRETO 70/2002. (2002). *Currículo de Bachillerato de la Comunidad de Castilla y León*. Recuperado el 6 de diciembre de 2016 de http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo/curriculo-bachillerato/decreto-70-2002-23-mayo.ficheros/136354-Decreto%5B1%5D.pdf

Douady, R. (1995). La Ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-96). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in collage students: Linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*, 119-132.

Dubinsky, E., & Narel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Washintong, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Cinvestav.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento humano: Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Eisenberg, T. (1991): Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Fabra, M., & Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 207-230.

Fischbein, E. (1977). *Image and Concept in Learning Mathematics*. Dordrecht, Holanda: Reidel Publishing Company.

Gordon, P., & Yang, Y. (2017). Approximating exponential and logarithmic functions using polynomial interpolation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 455-473.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación Matemática, 10*(2), 23-45.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (Tesis doctoral). University of Nottingham.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in Mathematics learning and problem solving* (pp. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Karplus, R. (1979). Continuous functions: Students' viewpoints. *European Journal of Science Education*, *1*(4), 397-413. Disponible en línea: <http://dx.doi.org/10.1080/0140528790010404>.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1987). *The Action Research Planner*. Victoria, Australia: Deakin University Press.

Lacasta, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles* (Tesis Doctoral). Université Bordeaux I.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Research in Education*, *16*(1), 1-64.

Lesh, R. (1978). *Some trends in research and the acquisition and the use of space and geometry concepts*. In E. Cohors-Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the 2nd PME International Conference* (pp. 193-213). University of Osnabrück, Germany.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translation among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McNiff, J. (2014). *Writing and doing Action Research*. London, Reino Unido: SAGE Publications Ltd.

Ortega del Rincón, T. (1998). Algunos apuntes sobre el uso de las gráficas cartesianas. In *Actas II Simposio SEIEM* (pp. 141-150). Pamplona, España: SEIEM.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 215-226.

Palmer, S. E. (1977). Hierarchical structure in perceptual representation. *Cognitive Psychology, 9*, 441-474.

Puerta Rebuel, M. (2009). *Interpolación y extrapolación gráfica y algebraica. Estudio de contraste* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid.

Real Academia Española (RAE). (2016). *Diccionario de la Lengua Española*. Recuperado el 6 de diciembre de 2016 de http://www.rae.es

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Robertson, J., & Wright, F. (2014). *Learning support for students with mathematical difficulties*. De Montfort: University Math Learning Centre.

Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. Educational Studies in Mathematics, 29, 259-291.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Anexo I- Cuestionario general

1. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación lineal? ¿Por qué?
2. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación cuadrática? ¿Por qué?
3. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación circular? ¿Por qué?
4. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación hiperbólica? ¿Por qué?
5. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación elíptica? ¿Por qué?
6. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación exponencial? ¿Por qué?
7. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación logarítmica? ¿Por qué?
8. ¿Qué método prefieres utilizar para la interpolación trigonométrica? ¿Por qué?
9. Escribe libremente lo que te ha parecido cada método

Método gráfico: Método algebraico:

Anexo II- Registro de tiempo investido en la realización de los ejercicios: método algebraico y método gráfico

ESTUDIANTE	Tiempo total: método algebraico	Tiempo total : método gráfico

Anexo III- Cuestionario Likert método algebraico/gráfico

Valora de 0 a 5 las siguientes cuestiones (0 nada, 5 mucho/as)

P1. Valora cuánto te ha gustado el método algebraico/ gráfico.
P2. Valora las facilidades que has tenido para utilizar el método algebraico/ gráfico.
P3. Valora cuánto te parece que has aprendido mediante el método algebraico/ gráfico.
P4. Valora el interés que te ha suscitado la interpolación algebraica/ gráfica.
P5. Valora tus preferencias para utilizar el método algebraico/ gráfico.
P6. Valora el nivel de razonamiento conseguido mediante el método algebraico/ gráfico.