A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função

12th grade students' understanding of limit and continuity of a function

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
Universidade da Costa Rica, Costa Rica
fgutierrez92@gmail.com

Ana Henriques
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
achenriques@ie.ulisboa.pt

Resumo. Os conceitos de limite e continuidade de uma função, fundamentais ao estudo do Cálculo no ensino superior, têm-se revelado de difícil compreensão pelos alunos, exigindo uma investigação aprofundada sobre a aprendizagem prévia destes conceitos. Neste artigo apresentamos os resultados de um estudo que visa analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função na resolução de tarefas que envolvem tais conceitos. Os dados, recolhidos a partir das produções escritas dos alunos na resolução de tarefas propostas em sala de aula e de uma entrevista realizada a alguns alunos, foram analisados qualitativa e interpretativamente usando um referencial teórico que contempla três dimensões: os significados, as representações e visualização matemática e as dificuldades de aprendizagem. Os resultados revelam que os alunos evidenciam uma compreensão instrumental dos conceitos de limite e continuidade de uma função. Inicialmente, esta compreensão tem uma natureza intuitiva, desenvolvida a partir de experiências mais próximas das suas conceções do que da formalização matemática. Depois do estudo dos conceitos, os alunos desenvolvem uma compreensão instrumental de caráter mais formal, caraterizada pela aplicação de regras e estratégias pré-estabelecidas pelas convenções matemáticas de sala de aula.

Palavras-chave: limite de uma função; continuidade de uma função; conceito-imagem; representações; visualização; ensino secundário.

Abstract. The concepts of limit and continuity of a function, which are fundamental for the study of Calculus in higher education, have been difficult to understand by the students. This calls for more research regarding the learning of these concepts in previous school years. This paper presents the results of a study aiming to analyze 12th grade students' understanding of the limit and continuity concepts when solving tasks involving those concepts. The data were collected from the students' written work in solving a set of tasks proposed in the classroom and an interview conducted with some students and were analyzed qualitatively and interpretatively using a theoretical framework involving three dimensions: meanings, representations and mathematical visualization, and learning difficulties. The results reveal that the participants in this study evidenced an instrumental understanding of the concepts of limit and continuity of a function. This understanding was initially of an intuitive nature, developed from experiences that are more close to their conceptions than from mathematical formalization. After the study of the concepts, the students' understanding has a more formal nature, characterized by the application of rules and strategies pre-established by the mathematical conventions of the classroom.

Keywords: function limit; continuity of a function; concept image; representations; visualization; secondary school level.

(Recebido em janeiro de 2017, aceite para publicação em maio de 2017)

Introdução

Os conceitos de limite e continuidade de uma função fazem parte de uma rede complexa de processos cognitivos associados ao Pensamento Matemático Avançado e têm sido foco de extensa investigação em educação matemática, atendendo à sua reconhecida importância na aprendizagem do Cálculo Infinitesimal (CI) (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, & Rico, 2015; Jaffar & Dindyal, 2011; Juter, 2006). Os contributos de estudos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função têm-se centrado nos vários significados que os alunos lhes atribuem (Domingos, 2003; Messias & Brandemberg, 2015) e nas dificuldades que evidenciam na sua aprendizagem (Amatangelo, 2013; Moru, 2009), discutindo igualmente abordagens didáticas para o ensino destes conceitos que os autores consideram poder estar na origem dessas dificuldades ou, pelo contrário, podem ajudar os alunos a ultrapassá-las (Fernández-Plaza et al., 2015; Prezenioslo, 2004). A investigação focada explicitamente na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função, que tem sido menos explorada, também indicia que estes conceitos estão entre os mais desafiadores para os alunos e que a sua maioria revela muitas dificuldades em aspetos envolvidos na sua compreensão, como as representações e a visualização (Fernández-Plaza & Simpson, 2016; Karatas, Guven, & Cekmez, 2011; Natsheh & Karsenty, 2014).

Deste modo, a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, com compreensão, é um extenso campo de investigação que faz emergir diversos modos de abordar o seu estudo, os quais merecem ser objeto de maior reflexão e aprofundamento. Por exemplo, a investigação aponta para a pertinência de estudar a compreensão dos alunos dos conceitos de limite e continuidade atendendo aos significados que estes lhes atribuem (Messias & Brandemberg, 2015), às representações dos conceitos e sua visualização envolvidas na resolução de tarefas (Karatas et al., 2011; Natsheh & Karsenty, 2014) e às dificuldades que evidenciam nestes processos (Amatangelo, 2013;

Tall, 1992). No entanto, não é comum a articulação destas três dimensões para analisar a compreensão dos alunos destes conceitos.

Para além disso, grande parte dos estudos sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função têm sido realizados no ensino universitário (por exemplo, Domingos, 2003; Jaffar & Dindyal, 2011; Juter, 2006; Karatas et al., 2011; Messias & Brandemberg, 2015) e apontam problemas que se vêm acumulando desde os níveis de ensino anteriores, revelando que as disciplinas de Matemática no ensino superior não têm conseguido corrigir as incompreensões sobre estes conceitos, podendo inclusivamente levar os alunos a desenvolver novas conceções incorretas (Prezenioslo, 2004). Por isso, é fundamental investigar como estes conceitos se desenvolvem de acordo com o nível de escolaridade dos alunos, ajudando-os a ultrapassar as suas dificuldades e a adquirir uma correta compreensão destes entes matemáticos (Domingos, 2003; Karatas et al., 2011). O caso do ensino secundário é particularmente interessante por ser nesta etapa de transição entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado que os alunos enfrentam grandes dificuldades, atendendo a que os procedimentos já não se levam a cabo através da aritmética ou álgebra simples (Tall, 1992). No entanto, este nível de ensino não tem recebido muita atenção na investigação.

Este estudo pretende contribuir para a problemática apresentada, tendo como objetivo analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função na resolução de tarefas que envolvem tais conceitos. Procuramos, em particular, responder a três questões: (1) Quais os significados que os alunos atribuem aos conceitos de limite e continuidade? (2) Como os alunos utilizam as diferentes representações e a visualização destes conceitos para obter significados e resolver tarefas que os envolvem?, e (3) Quais os principais erros e dificuldades que os alunos manifestam na compreensão destes conceitos e na resolução de tarefas que envolvem tais conceitos?

Apresentamos, de seguida, o referencial teórico que suporta o estudo, abordando a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função bem como as representações e a visualização matemática envolvidas na compreensão destes conceitos. Depois descrevemos o contexto e os participantes do estudo, bem como os métodos adotados, incluindo as tarefas usadas na recolha de dados. Finalmente, apresentamos os resultados empíricos referentes ao trabalho de três alunos na resolução das tarefas e as principais conclusões do estudo, onde fazemos algumas considerações sobre o ensino destes conceitos.

Fundamentação teórica

Compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

Skemp (1976) refere dois modos de compreender os conceitos matemáticos: *compreensão instrumental* e *compreensão relacional*. Na primeira, prioriza-se a memorização de factos, regras e normas pré-estabelecidas, promovida por um ensino focado no produto final, que orienta cada passo do aluno até chegar ao resultado. A compreensão relacional envolve a construção de esquemas conceituais em que o aluno está consciente do como e do porquê dos métodos, possibilitando a sua adaptação para a resolução de novos problemas e a construção de relações necessárias para atribuir significados. Assumindo que desenvolver a compreensão de um conceito envolve a criação de estruturas de conhecimento ricas e integradas que dão origem a uma aprendizagem com compreensão, como defendem as orientações curriculares (NCTM, 2007; ME, 2002), o ensino deve preocupar-se em promover a compreensão relacional dos conceitos.

Na literatura identificam-se duas perspetivas de abordar os conceitos de limite e continuidade de uma função: através da *definição informal ou conceção dinâmica*, que se desenvolve de maneira intuitiva, ou recorrendo à *definição formal ou conceção métrica,* que resulta de um processo dedutivo (Tall, 1992). Em qualquer uma destas abordagens, a compreensão dos conceitos requer a atribuição de significados por parte dos alunos e decorre, frequentemente, do tratamento das representações dos objetos.

Para Gray e Tall (1991, 1994), a representação simbólica que é atribuída a um determinado conceito tem dois significados. Por um lado o simbolismo leva a pensar num processo (algorítmico, operacional, analítico, entre outros) e, por outro, representa o objeto matemático em si mesmo (definição). Por exemplo, "a notação $\lim_{x \to a} f(x)$ pode representar o processo de *tender para um limite* e o *valor do limite*" (Gray & Tall, 1994, p. 119, itálico no original). Deste modo, os autores definem *procept* como "a combinação de processo e conceito, em que processo e produto estão representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo de um *procept* pode evocar um processo ou um conceito" (Gray & Tall, 1991, p. 73, itálico no original). Os autores defendem, por isso, que os indivíduos compreendem o conceito quando interpretam a representação simbólica de forma flexível considerando a sua ambiguidade, ou seja, os indivíduos têm uma compreensão mais completa e profunda quando combinam o pensamento processual e o pensamento conceitual sobre o objeto matemático. Além disso, referem-se a esta combinação como *pensamento proceptual*, definindo-o como "a capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível como processo ou conceito, alternando livremente entre diferentes simbolismos para o mesmo objeto" (Gray & Tall, 1994, p.121).

No caso do conceito de função, Sajka (2003) e Sfard (1991) também consideram que o mesmo apresenta uma natureza dupla, no sentido em que a sua compreensão implica reconhecer a função de duas formas que constituem uma unidade coerente: (i) *estruturalmente*, como objeto; e (ii) *operativamente*, como um processo. O conceito de continuidade de uma função implica, deste modo, a sua compreensão como objeto (que apela à definição de função contínua) e como processo (envolvendo a determinação da continuidade de uma função através do cálculo de limites).

Uma teoria que procura explicar como a compreensão de um conceito evolui a partir das ações do indivíduo sobre objetos e processos é referida por Tall (2004) como a teoria dos *três mundos*, na qual o autor considera a existência de três tipos de desenvolvimento cognitivo que fazem alusão a três mundos matemáticos diferentes. O primeiro, denominado pelo autor de *mundo personificado* (*embodied world*, no original), é constituído pela forma de pensar dos indivíduos acerca das coisas que percebem. Neste mundo a verdade estabelece-se mediante a experimentação, isto é, se a experiência produz o resultado esperado então é certo. À medida que vão evoluindo as ações neste mundo, os símbolos tornam-se mais presentes dando lugar ao *mundo proceptual* (*proceptual world).* Surge como o mundo dos símbolos que se utilizam no CI e, portanto, a manipulação aritmética ou algébrica são os processos que permitem verificar a verdade dos factos. Por último, o *mundo formal* (*formal world*) é baseado em propriedades expressas por meio de definições formais que se utilizam como axiomas para especificar as estruturas matemáticas. Neste mundo constrói-se uma teoria coerente e deduzida logicamente onde a verdade se verifica com provas formais. No seu trabalho, Juter (2007) entrelaça aspetos respeitantes ao desenvolvimento do conceito de limite com esta teoria dos três mundos. Segundo esta autora, o conceito de limite pode manipular-se inicialmente através de um enfoque exploratório intuitivo, usando tabelas de valores de uma função e o seu gráfico (*mundo personalizado*), depois ter lugar o uso de entidades expressas simbolicamente (*mundo proceptual*) e, por último, considerar-se a definição formal do conceito (*mundo formal*).

Para analisarem a compreensão dos alunos sobre a noção de limite e continuidade de uma função, Tall e Vinner (1981) recorrem ao *conceito-imagem*, termo que designa a estrutura cognitiva total que se associa com o conceito em questão, incluindo imagens mentais, propriedades e processos com ele relacionados e que é construído através de experiências diversas e ao *conceito-definição,* que designa o conjunto de palavras ou símbolos usado para especificar e comunicar as ideias do conceito. Esta definição pode ser aprendida de memória ou por reconstrução pessoal de uma definição formal, podendo gerar um conceito-definição diferente da definição formal matematicamente aceite. Estas ideias teóricas têm sido base de referência em várias investigações sobre o conceito de limite e continuidade (Domingos, 2003; Juter, 2006; Messias & Brandemberg, 2015; Prezenioslo, 2004). Por exemplo, Domingos (2003), a partir dos dados empíricos recolhidos com alunos universitários, caracterizou em três níveis de complexidade os seus conceitos-imagem iniciais de limites, derivadas e integrais. Definiu-os como: (i) *Conceito-imagem incipiente,* nível em que agrupa os conceitos-imagem que são muito incompletos, referindo-se a objetos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido e que na maior parte das vezes referem apenas algumas características mais notórias do objeto matemático; (ii) *Conceito-imagem instrumental,* que inclui o uso de alguns objetos matemáticos mais complexos que estão na base do conceito em estudo e em que é possível estabelecer processos que conduzem à construção dos novos conceitos; e (iii) *Conceito-imagem relacional*, que se refere aos conceitos-imagem que são abordados de forma estrutural, isto é, como objetos matemáticos com uma existência própria para além dos processos que estiveram na sua origem, sendo os alunos capazes de recorrer a esses processos sempre que seja necessário. Neste nível é possível encarar os conceitos como objetos matemáticos e como processos.

Em qualquer abordagem que se adote para ensinar estes conceitos, quer seja informal ou formal, os alunos podem manifestar dificuldades associadas à compreensão destes conceitos. Um dos erros mais frequentemente identificados na aprendizagem destes conceitos resulta de uma conceção intuitiva relacionada com as experiências prévias dos alunos no estudo de funções. No caso do limite, o erro consiste em atribuir ao limite de uma função num ponto o valor da imagem desse ponto através da função, isto é, considera que a existência de limite depende da função estar ou não definida no ponto em questão. No caso da continuidade, o erro é posto em manifesto quando o aluno afirma que uma função é contínua se todos os objetos têm uma imagem através da função (Juter, 2007; Messias & Brandemberg, 2015; Tall, 1992).

Para compreender estes conceitos é também crucial que o aluno compreenda a noção de infinito. Sendo este um conceito abstrato, os alunos precisam de desenvolver um adequado processo de abstração para lhe dar significado dentro do contexto do CI, quer no estudo do limite de uma função no infinito ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)$), quer no estudo de limites infinitos ($\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$). No entanto, diversas investigações revelam que, frequentemente, os alunos têm conceções muito limitadas do conceito de infinito (Fernández-Plaza & Simpson, 2016; Moru, 2009).

Os alunos fazem, frequentemente, uso coloquial e pouco rigoroso de termos específicos envolvidos na compreensão dos conceitos de limite e continuidade, evidenciando dificuldades associadas à compreensão da linguagem utilizada pelo professor e à comunicação das suas ideias intuitivas e das definições formais (Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al., 2015; Moru, 2009). Por exemplo, termos como *limite*, *contínu*a, *existe*, *aproximar-se, alcançar* e frases como *tende a, tão pequeno quanto se queira e para todos* têm um forte significado no contexto quotidiano do aluno. Deste modo, Moru (2009) considera a *linguagem coloquial* ou *natural* como um obstáculo epistemológico para a compreensão destes conceitos.

Outras dificuldades igualmente identificadas na literatura estão associadas ao desempenho dos alunos na resolução de tarefas, quer na utilização de procedimentos algébricos (Domingos, 2003) quer na interpretação do gráfico de funções (Cornu, 1991).

As representações matemáticas envolvidas na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

De acordo com os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), os alunos devem aprender matemática com compreensão. A capacidade de representar e usar as representações dos entes matemáticos de modo flexível contribui para essa compreensão pois, ao concluírem o 12.º ano, os alunos deverão ser capazes de produzir explicações, formular questões e escrever argumentos logicamente corretos e coerentes através do uso de diversas representações, nomeadamente as gráficas e algébricas.

Para Goldin (1998), uma representação é qualquer configuração ou relação de carateres, imagens ou objetos concretos que representam algo. Segundo o autor, um sistema de representação é constituído por duas estruturas: uma estrutura intrínseca, onde as regras operam dentro do próprio sistema e uma estrutura extrínseca, na qual se estabelecem relações com outros sistemas de representação. Por isso, é importante que o indivíduo reconheça e faça uso da estrutura extrínseca para aprofundar a compreensão do objeto representado, o que também é defendido por Tripathi (2008) quando afirma que "diferentes representações matemáticas de um conceito destacam diferentes aspetos da sua estrutura, que se complementam no sentido da compreensão desse mesmo conceito" (p. 438).

Duval (2006) destaca a existência de dois tipos de transformações que se podem operar nas representações envolvidas na resolução de uma tarefa: (i) os *tratamentos,* que consistem em transformações da representação de um objeto dentro de um mesmo sistema de representação, de que é exemplo a resolução de uma equação (tratamento dentro do sistema simbólico-algébrico); e (ii) as *conversões* (explícitas ou implícitas), que são transformações operadas entre sistemas de representação distintos, de que é exemplo a tradução de uma descrição ou de uma relação em linguagem natural (sistema de representação verbal) para notação algébrica (sistema simbólico-algébrico). O autor conclui ainda que "a compreensão matemática requer uma coordenação interna entre os diversos registos de representação semióticos possíveis de escolher e usar" (p. 158).

Contudo, este uso de diferentes representações deve ser produto de uma manipulação flexível das mesmas. Em Tall (1992) indica-se que os alunos que alcançam maior sucesso no CI são aqueles que de maneira flexível e versátil utilizam diferentes representações dos conceitos – simbólicas, numéricas e visuais – e reconhecem a representação que é útil numa situação particular. A este propósito, Moru (2009) entrevistou alunos universitários que frequentavam um curso de Matemática sobre a sua compreensão do conceito de limite, tendo obtido descrições distintas deste conceito: como um processo (dinâmico) de aproximação ou de movimento em direção a algo; como resultado de uma operação de cálculo de um limite (operacional); estabelecendo relação com os pontos de uma vizinhança; e como um ponto final. Deste modo o autor conclui que "a conceção de limite muda com as formas de representação" (p. 450) e, portanto, "a compreensão do conceito de limite numa das representações, não implica necessariamente a sua compreensão noutra representação" (Pons, Valls, & Llinares, 2011, p. 394).

Os três tipos de representações mais comumente envolvidas na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função são: (i) as *representações verbais*, usadas para exprimir as ideias, geralmente em discussões coletivas dentro da sala de aula ou através do uso da linguagem natural nas justificações escritas; (ii) as *representações simbólicas*, que incluem, além dos símbolos específicos como as setas (→), as expressões numéricas ou algébricas; e (iii) as *representações gráficas* (Fernández-Plaza et al., 2015, Karatas et al., 2011).

Visualização matemática na compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

A visualização é um conceito que tem merecido grande atenção em estudos sobre a compreensão matemática, embora com distintos significados consoante o contexto e a perspetiva teórica adotada por quem o define. Por exemplo, para Arcavi (2003), a visualização pode conceber-se como capacidade, processo e produto:

> A visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informação, raciocinar sobre e desenvolver ideias desconhecidas prévias e compreensões avançadas. (p. 217)

Para este autor, a visualização é usada na compreensão matemática dos conceitos de três modos: acompanha o desenvolvimento simbólico, estabelece conexões entre conceitos e significados, e permite esclarecer a estratégia de resolução de uma tarefa. Esta posição de Arcavi é discutida em Rivera (2011) que argumenta que esta visualização é produto de um *pensamento visual*, definido como "o uso de todos os tipos de símbolos a partir de imagens e sinais construídos pessoalmente, expressões alfanuméricas e diagramas, que transmitem significados e são usados para raciocinar" (p. 54). Deste modo, para este autor, a visualização é uma ferramenta cognitiva que permite ao indivíduo explorar, construir, estabelecer relações conceituais, demonstrar e justificar, tendo definido três níveis de visualização matemática. O *nível imaginativo* surge das experiências pessoais e da perceção sensorial de forma subjetiva e intuitiva. O *nível formativo* é aquele em que se estabelecem os objetos, conceitos ou processos a partir de imagens estruturadas pela comunidade matemática. O *nível transformacional* pode incluir o nível imaginativo ou formativo mas carateriza-se pelo facto do indivíduo dar sentido à atividade visual.

No CI, em particular, a visualização tem um papel crucial. No trabalho de Natsheh e Karsenty (2014) definem-se três componentes da visualização que interagem durante a resolução de tarefas: (i) *objetos visuais*, que são imagens, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto sobre o qual se está a exercer a visualização; (ii) *ações visuais*, que se referem aos processos e atividades que os alunos podem realizar sobre um objeto ou conjunto de objetos visuais, como por exemplo, fazer comparações, leituras de informação, decompor o objeto visual em partes ou construir um novo objeto visual; e (iii) *efeitos visuais*, que aludem aos objetivos ou propósitos que levam o aluno a realizar as ações visuais, como por exemplo a reformulação de informação, a justificação de ideias ou a demostração de factos.

Em síntese, neste estudo considera-se que a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função é produto de um processo no qual interagem os *significados* que os alunos atribuem aos entes matemáticos, quer seja de forma intuitiva (*conceito-imagem*) ou de forma mais formal (*conceito-definição*); as diferentes *representações* que os alunos usam para o tratamento dos conceitos; e as *ações visuais* dos alunos (implícitas ou explícitas) durante a resolução de tarefas. Desta forma, será possível promover uma compreensão que vai para além da memorização de factos, regras ou normas, ou seja, uma compreensão relacional que permita ao aluno ter um entendimento da natureza do conceito, das diferentes formas de representá-lo e de visualizá-lo durante a resolução de tarefas, assim como a sua relação com outros entes matemáticos.

O estudo

Contexto e participantes

Este estudo é parte de uma investigação mais alargada, desenvolvida pelo primeiro autor no âmbito da sua dissertação de mestrado (Gutiérrez-Fallas, 2016) e foi realizado no ano letivo 2015/2016 com os alunos de uma turma do 12.º ano (21 rapazes e 7 raparigas com idades compreendidas entre os 17 e os 19 anos) de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, que participaram voluntariamente no estudo, durante a lecionação da unidade de ensino (UE) referente à Teoria de limites do tema II – *"Introdução ao Cálculo Diferencial II"* do Programa de Matemática A (ME, 2002). Os conceitos foram abordados, em concordância com os objetivos curriculares, privilegiando a definição informal ou conceção dinâmica dos conceitos. A dinâmica das aulas caraterizou-se por momentos de apresentação e explicação de definições ou estratégias de resolução de tarefas por parte da professora titular da turma, seguidos de trabalho autónomo dos alunos na resolução de tarefas de consolidação, frequentemente exercícios e de discussão coletiva das resoluções. Estes momentos de discussão foram também aproveitados para formalizar as propriedades ou definições dos conceitos.

Tarefas e métodos

O investigador desempenhou o papel de observador participante (Denscombe, 2003), tendo observado sete aulas da unidade de ensino e interagindo com os alunos durante a resolução, em sala de aula, de um conjunto de tarefas propostas por si, mas acordadas previamente com a professora titular da turma de modo a considerarem os objetivos programáticos e estarem enquadradas no trabalho a realizar na UE. A primeira tarefa, de diagnóstico (TD), procurava analisar os significados atribuídos pelos alunos aos conceitos de limite e continuidade, através de representações gráficas, tendo em conta que as suas experiências letivas em anos anteriores se caraterizavam pelo trabalho com o gráfico de uma função para determinar limites e concluir a continuidade da função. As seis tarefas seguintes, aplicadas nas três últimas aulas da UE, que decorreram duas semanas após a aplicação da TD, pretendiam levar os alunos a usar estratégias que incluíssem diversas representações e a aplicar os conceitos trabalhados na UE na resolução de problemas, permitindo ao investigador recolher informações sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade que eles evidenciavam no decorrer desta UE.

Neste artigo focamo-nos em três alunos da turma, cujos nomes são fictícios, que foram escolhidos por evidenciarem a diversidade de desempenhos académicos na resolução das tarefas propostas e modos de envolvimento no trabalho realizado em sala de aula que foram identificados na turma. *Samuel*, caraterizado pela constante participação na sala de aula através de intervenções acertadas, mostrava domínio dos conhecimentos matemáticos, justificando assim o seu bom desempenho académico; *Tiago*, pouco participativo, evidenciava dificuldades conceituais e um desempenho académico mais fraco; *Sara* tinha uma participação frequente nas aulas mas com intervenções nem sempre corretas, evidenciando um desempenho académico médio.

Os dados foram recolhidos a partir das produções escritas dos alunos na resolução das tarefas, da gravação áudio das aulas observadas e as respetivas notas de campo do investigador e de uma entrevista semiestruturada (Denscombe, 2003), individual e áudio-gravada, realizada pelo investigador a estes três alunos, no final da aplicação das tarefas, para obter informação mais detalhada sobre as suas resoluções.

A análise dos dados foi feita de forma descritiva e interpretativa, usando um quadro conceptual (Figura 1) de três dimensões que, de acordo com a literatura, permitem aceder à compreensão dos alunos dos conceitos de limite e continuidade: (i) significados; (ii) representações e visualização; e (iii) dificuldades de aprendizagem. Os *significados* referem-se às conceções que os alunos têm sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função e a sua análise considera os conceito-imagem e conceito-definição (Tall & Vinner, 1981). Na análise das *representações* e *visualização* usamos as componentes visuais que interatuam na resolução de tarefas, definidas por Natsheh e Karsenty (2014): os objetos visuais (representações), as ações visuais e os efeitos visuais. A dimensão das *dificuldades de aprendizagem* integra a análise dos erros e das dificuldades que os alunos manifestam durante a resolução das tarefas, as quais muitas vezes constituem a base para a formulação de significados que evidenciam as conceções erróneas que os alunos possam ter dos conceitos.

Compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função		
Significados	**Representações e visualização**	**Dificuldades de aprendizagem**
Conceito-imagem *Conceito-definição*	*Objetos visuais* *Ações visuais* *Efeitos visuais*	*Dificuldades* *Erros*

Figura 1. Quadro de análise da compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função

A análise da compreensão que os alunos revelam dos conceitos de limite e continuidade de uma função é apresentada nas duas secções seguintes, estruturada nas dimensões descritas e suportada em excertos do trabalho realizado pelos alunos.

Análise da compreensão dos alunos do conceito de limite de uma função

Significados atribuídos ao conceito de limite

Inicialmente, quando solicitados na TD a explicar "em que outros contextos, fora da sala de Matemática, tens ouvido falar do termo "limite"? Qual o seu significado nesses contextos?", Samuel e Sara revelam como significado de limite *algo que não se pode ultrapassar*, o que mostra que as experiências quotidianas dos alunos em que aparece o termo limite formam parte do seu conceito-imagem:

> Significa o fim do "tolerável" ou seja um ponto imaginário o qual *não se deve passar* [itálico nosso], mas caso se passe usualmente tem consequências indesejadas. Ex. Limite do corpo humano: exceder o seu limite significa lesões no corpo. (Samuel, TD)
>
> Quando se está quase a cometer um crime, está-se no limite do que é legal e do que não é (por exemplo). Significa que *não se deve passar* [itálico nosso] à ação do "crime", pois aí passa a ser uma ação ilegal. (Sara, TD)

Com base nesta ideia de que o limite é algo que a função não consegue ultrapassar, após o estudo das assíntotas do gráfico de uma função racional, os alunos estabeleceram conexões entre o conceito de limite de uma função quando a variável tende para infinito com o significado de *assíntota horizontal*. Por exemplo, na Tarefa 3, Samuel interpretou corretamente a condição "A reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f" como o valor correspondente ao $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (Figura 2). A associação entre estes conceitos também foi observada na Tarefa 6, onde Sara identificou a assíntota horizontal do gráfico da função e a partir disso determinou a equação da reta formulando e calculando o limite fazendo tender x para mais infinito (Figura 3).

Tarefa 3

Considera a seguinte informação das funções f e g.

a) O domínio de f e g é $[0, +\infty[$

b) A reta $y = 2$ é assintota horizontal do gráfico de f.

c) f não tem zeros.

d) $g(x) = \frac{e^{-x}-2}{f(x)}$

Determina a assíntota horizontal do gráfico de g.

$g(x) = \frac{e^{-x}-2}{f(x)} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}-2}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}-2}{2} = \frac{e^{-\infty}-2}{2} =$

AH. de $f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$= \frac{1}{e^{\infty} \times 2} - 1 = \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$

AH $_{g} \to y = 1$

Figura 2. Resolução de Samuel, T3

a) **Determina a equação da reta L.** → assíntota Horizontal

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$

$\therefore$ reta L: $y = 1$

Figura 3. Resolução de Sara, T6

Em relação à conceção do limite de uma função num ponto, os dados revelam ainda que os alunos atribuem ao conceito de limite o significado de *imagem do ponto através da função*. Na primeira questão da entrevista – "Explica o que entendes por limite de uma função num ponto" – os três alunos responderam:

> Samuel: A que *valores de* [itálico nosso] a função se aproxima quando se aproxima desse ponto.
>
> Sara: Limite de uma função num ponto é o *valor que a função* [itálico nosso] tinha de ter à direita, à esquerda e no ponto. Tinham que ser iguais para o ponto ter um limite.
>
> Tiago: É um *valor máximo da função* [itálico nosso] ao qual se está a aproximar.

No caso de Samuel e Sara, pode perceber-se que a sua definição está mais próxima da conceção dinâmica de limite. Sara exprime na sua resposta a noção de que a aproximação lateral deve ser igual para garantir a existência do limite e Samuel inclui o duplo processo de aproximação coordenado que está envolvido na determinação do limite. Tiago, por seu lado, mostra ter uma conceção incipiente do conceito e, inclusive na entrevista, evidenciou que a sua conceção de limite corresponde ao *valor da imagem* do objeto ao qual se está a aproximar o *x*:

> I: Quais das seguintes funções têm limite no ponto ? Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.
>
> Tiago: [Fica a pensar em silêncio].
>
> I: Na função *f* ?
>
> Tiago: Há limite.
>
> I: E qual é o valor do limite de *f* quando *x* tende para *a* ?
>
> Tiago: *b* .
>
> I: A seguir, na função *g* ?
>
> Tiago: Há limite.
>
> I: E qual é o valor do limite?

Tiago: c .

I: Nesta outra, na função r ?

Tiago: [Fica a pensar]. Acho que sim.

I: Sim há limite? E qual é o valor?

Tiago: O c .

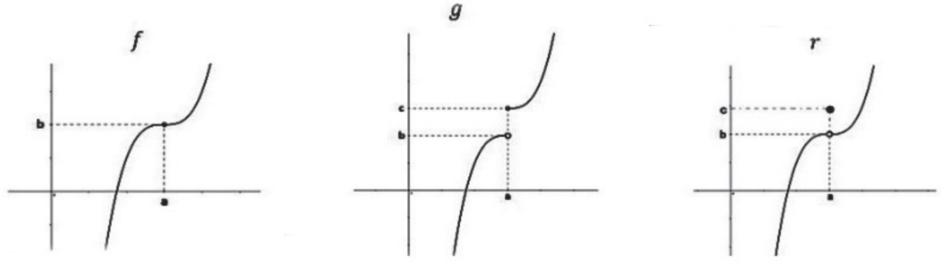

Figura 4. Gráficos de apoio usados na entrevista

Representação e visualização do conceito de limite

Nas tarefas em que o objeto visual era o gráfico de uma função, a principal ação visual dos alunos consistiu na *conversão da representação gráfica em representação simbólica e/ou verbal com base na leitura e interpretação da informação do gráfico da função*. Esta ação foi motivada fundamentalmente pelo efeito de determinar o limite de uma função e justificar as suas respostas. Por exemplo, na TD, os alunos precisaram de interpretar os dados representados graficamente (Figura 5) e converter essa informação em resultados simbólicos (cálculo do valor do limite) ou em representações verbais (para indicar que o limite não existe), quando solicitados a determinar a existência e o valor do limite (Figura 6).

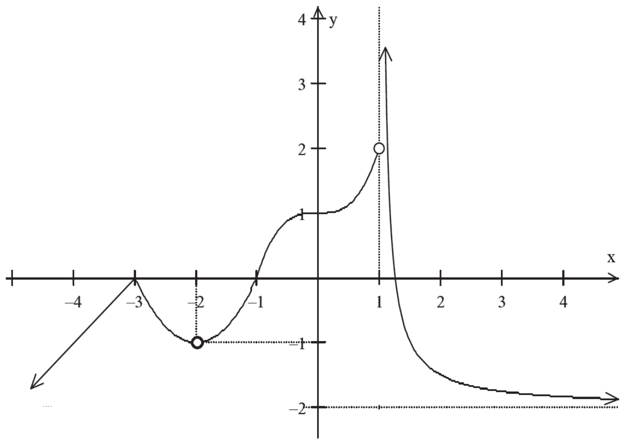

Figura 5. Gráfico da função da TD

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$-\infty$	$\lim_{x\to1^-} f(x)$	2
$\lim_{x\to-3} f(x)$	0	$\lim_{x\to1^+} f(x)$	$+\infty$
$\lim_{x\to-2} f(x)$	-1	$\lim_{x\to1} f(x)$	Não determinado
$\lim_{x\to0} f(x)$	1	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	-2

Figura 6. Resolução de Samuel, TD

Outra ação visual identificada nas resoluções dos alunos consistiu na *criação do gráfico de uma função*. Esta teve lugar na Tarefa 4, em que era solicitado aos alunos o desenho do gráfico de uma função satisfazendo as condições estabelecidas relacionadas com o comportamento da função no que respeita à noção de limite (Figura 7).

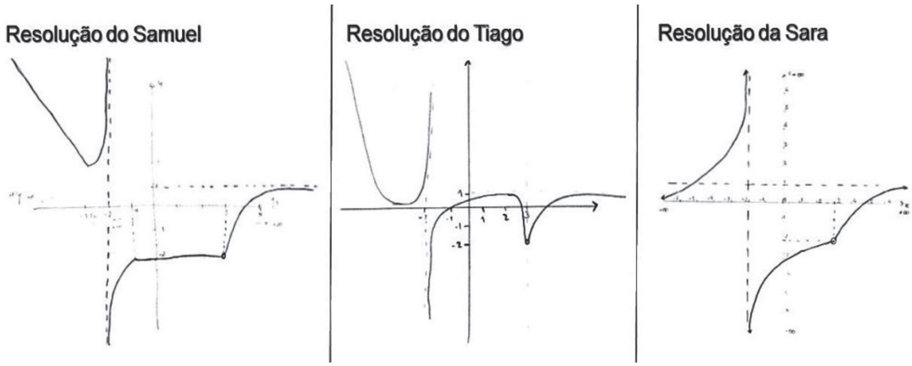

Figura 7. Resolução de Samuel, Tiago e Sara, T4

Finalmente, um outro resultado relevante é o facto de nestas duas ações visuais se poderem observar articulações dos três sistemas de representação (gráfico, simbólico, verbal), o que permite aos alunos referirem-se ao conceito de limite de uma função mediante distintos objetos visuais.

Dificuldades de aprendizagem associadas à compreensão do conceito de limite

Na resolução das tarefas, os alunos evidenciam ter *dificuldade em determinar a existência do limite de uma função quando x tende para um ponto*. Um dos erros identificado é o facto de os alunos afirmarem que o limite de uma função num ponto existe só se a função está definida nesse ponto, podendo-se interpretar que esta dificuldade está associada ao significado que os alunos atribuem ao limite como a imagem do ponto através da função. A entrevista realizada ao Tiago mostra que esta dificuldade não foi ultrapassada até ao final da unidade de ensino. Por exemplo, quando questionado sobre as condições que são necessárias para garantir a existência do limite de uma função num ponto, o aluno respondeu: "*O ponto tem que pertencer ao domínio*".

Por outro lado, a conceção de limite como processo de aproximação lateral levou os alunos a ter dificuldade em *reconhecer a unicidade do limite de uma função num ponto*. Em vários casos que solicitavam o valor do limite num ponto cujos limites laterais eram diferentes, os alunos tenderam a indicar o comportamento da função à esquerda e à direita através do cálculo dos dois limites laterais, sem concluírem sobre o limite da função no ponto em questão. A resolução da Sara na TD é exemplo disso (Figura 8):

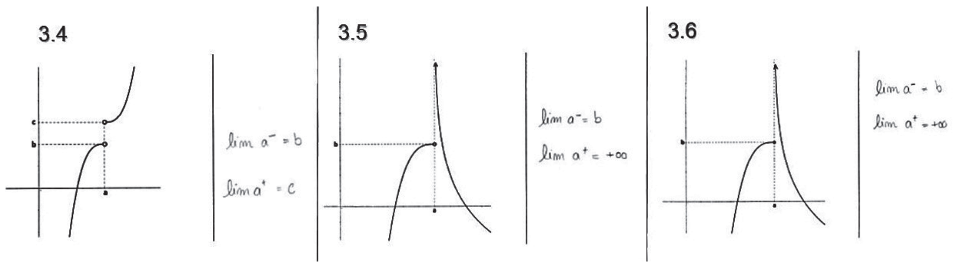

Figura 8. Resolução de Sara, TD

Outros erros nas resoluções destes alunos evidenciaram dificuldades *associadas à utilização de procedimentos algébricos no cálculo de limites*, por exemplo, na simplificação de expressões algébricas ou no levantamento algébrico da indeterminação no cálculo de um limite.

Em síntese, podemos perceber que as conceções iniciais de Tiago não se modificaram no decorrer das aulas, mantendo o seu conceito-imagem inicial: o limite de uma função num ponto corresponde à imagem do ponto através da função. Esta conceção errónea leva o aluno a ter dificuldade em reconhecer e aplicar as condições que garantem a existência do limite. No caso de Sara e Samuel, os alunos evoluíram positivamente no que respeita aos significados que atribuíram ao conceito de limite. Inicialmente estão conscientes do duplo processo coordenado de aproximação que está por detrás da determinação de limites mas muito influenciados pelas suas experiências prévias na determinação de limites a partir do gráfico da função. Sara, inicialmente, mostrou ter dificuldade em reconhecer a unicidade do valor do limite pois nos casos em que os limites laterais eram diferentes, a aluna considerou que o limite podia ter os dois valores. Já na entrevista, esta dificuldade parece ter sido ultrapassada ao dar uma definição de limite mais próxima da definição dinâmica. Quanto a Samuel, evidenciou ter a noção de que o limite de uma função num ponto existe sempre e quando os limites laterais são iguais. Assim, a sua compreensão do limite evoluiu no sentido de conceber o limite não só como processo (no cálculo do limite) mas também como objeto (as condições de existência e unicidade), atribuindo uma identidade própria ao conceito e aplicando-a na resolução de tarefas.

Análise da compreensão dos alunos do conceito de continuidade de uma função

Significados atribuídos ao conceito de continuidade

Na questão da TD "O que significa uma função ser contínua?", os alunos revelam ter uma conceção incompleta do conceito de continuidade. Por exemplo, Tiago e Samuel respondem da mesma forma indicando que uma "*função é contínua se para cada objeto corresponde uma imagem*". Este resultado mostra que o conceito-definição que estes alunos têm está associado às suas experiências prévias no estudo de funções, por exemplo a função afim, quadrática ou exponencial, nas quais o aluno identifica caraterísticas particulares e comuns que o levam a criar a sua própria definição de função contínua. No caso de Tiago, esta conceção de continuidade está muito fixa na sua estrutura cognitiva, e mantém-se até ao final da unidade de ensino. Na entrevista, quando questionado "Que condições são necessárias para garantir a continuidade de uma função num ponto?", o aluno respondeu: "*Tem que haver uma imagem correspondente a cada ponto*".

Ainda na TD, quando questionados sobre "em que outros contextos, fora da sala de aula de Matemática, tens ouvido falar do termo "continuidade" ou "contínuo(a)"? Qual o seu significado nesses contextos?", os alunos relacionaram continuidade a algo que não pára ou sem interrupção. É exemplo disso a resposta da Sara: "*Significa algo que não tem quebras, algo que se prolonga*".

É importante salientar que, na altura da aplicação da TD, os alunos ainda não tinham contactado com a definição matemática formal do conceito de função contínua mas que no decorrer das aulas este conceito foi formalizado. Por isso, na entrevista, Sara e Samuel revelam que o conceito-definição de continuidade que inicialmente tinham se modificou, aproximando-se mais da conceção dinâmica de continuidade e reconhecendo as condições para que uma função seja contínua:

> I: Que condições são necessárias para garantir a continuidade de uma função num ponto?
>
> Sara: Para ser contínua em a, a função, o limite à esquerda de a tinha que ser igual à imagem e o limite à direita de a tinha que ser igual à imagem, se fosse assim todos iguais então a função é contínua nesse ponto.
>
> I: Explica o que entendes por função contínua.
>
> Samuel: É uma função que em todos os pontos do domínio o limite do ponto, seja limite à esquerda ou à direita, é igual à imagem.

Representação e visualização do conceito de continuidade

Na resolução da TD, identificou-se a ação visual da *criação de uma representação gráfica* quando solicitados a desenharem uma função contínua e uma outra que não o fosse. Nestas questões os alunos responderam corretamente (Figuras 9 e 10, respetivamente), mostrando que reconhecem as caraterísticas do gráfico de uma função contínua, resultado que está coerente com a conceção inicial evidenciada pelos alunos de que uma função contínua é uma função que *não tem interrupções*.

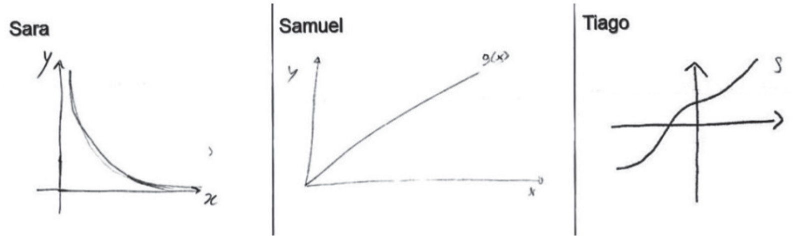

Figura 9. Resolução de Sara, Samuel e Tiago, TD

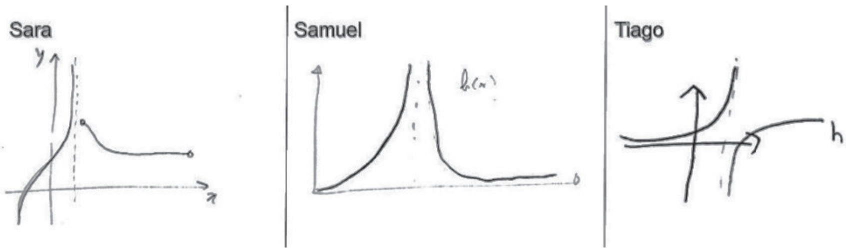

Figura 10. Resolução de Sara, Samuel e Tiago, TD

No enunciado da Tarefa 1 apresentam-se dois objetos visuais diferentes: o gráfico de uma função e a expressão algébrica que define uma função. No que respeita aos gráficos apresentados, os alunos foram capazes de identificar se a função era ou não contínua, sendo que neste caso a ação visual consistiu no processo de *conversão da representação gráfica em representação verbal*, *interpretando a informação do gráfico da função* com o propósito de determinar a sua continuidade e justificar as respostas. Nas justificações apresentadas, Sara e Samuel referiram o facto de, para cada objeto, o valor da sua imagem através da função ser igual ao valor dos limites laterais da função nesse objeto, ou seja, utilizaram a definição de função contínua num ponto para justificar a sua resposta. Tiago recorreu a justificações mais intuitivas motivadas pela observação do gráfico, nomeadamente que a cada objeto corresponde uma imagem (Figura 11).

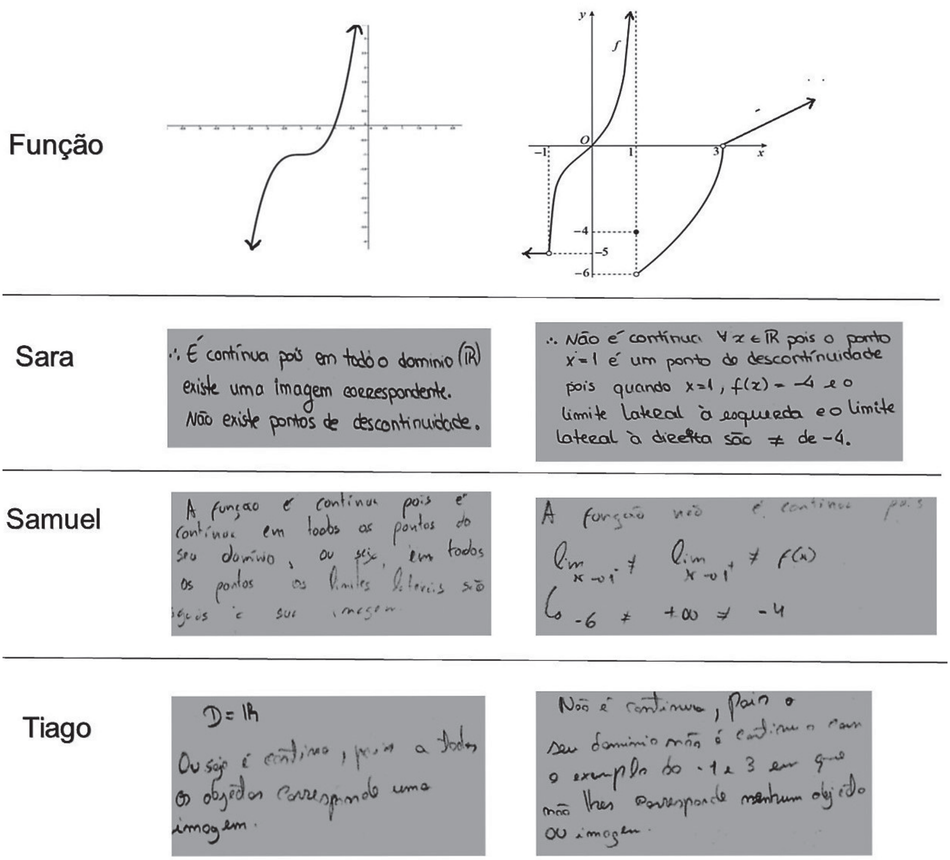

Figura 11. Resolução de Sara, Samuel e Tiago, T1

Ainda nesta questão, quando o objeto visual consistia numa *representação simbólica da expressão* que define a função em questão, Samuel usou a definição para estudar a continuidade das funções, calculando o valor dos limites laterais e o valor da imagem nos casos em que era preciso fazê-lo (Figura 12). Neste caso a ação visual do aluno consistiu na *análise e tratamento simbólico das condições que garantem a continuidade de uma função*, motivada pelo efeito visual de demonstrar a continuidade da função, embora na função $g(x)$ apresente algumas incorreções simbólicas, por exemplo, esquecendo-se de colocar o argumento no respetivo limite.

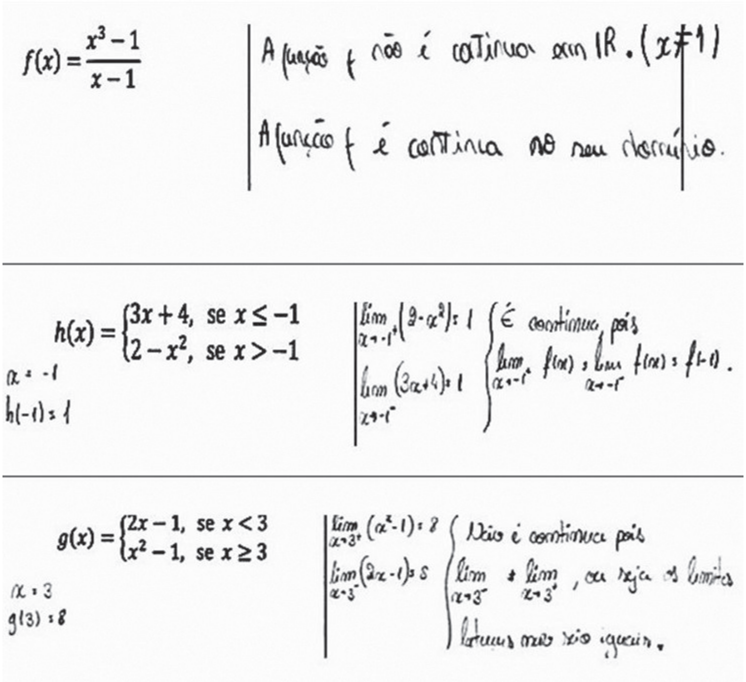

Figura 12. Resolução de Samuel, T1

Dificuldades associadas à compreensão do conceito de continuidade de uma função

A análise das resoluções das tarefas permitiu identificar que, implicitamente e ligada com a compreensão do conceito de função contínua, os alunos têm dificuldade em *reconhecer quando se deve aplicar a definição de continuidade de uma função num ponto* para estudar a sua continuidade através do cálculo dos limites laterais nesse ponto e da verificação da igualdade entre eles e a imagem do ponto em questão. Por exemplo, na Tarefa 1, esta dificuldade é posta em evidência mediante as justificações incorretas ou incompletas dos alunos. Para Sara, uma função definida por ramos é contínua desde que as funções que definem cada ramo sejam contínuas (Figura 13).

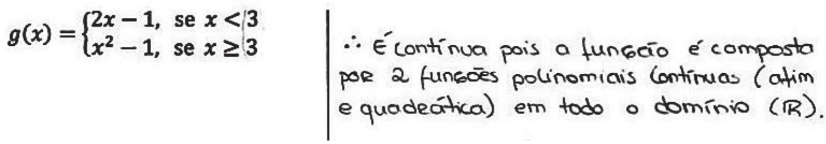

Figura 13. Resolução de Sara, T1

Salienta-se, contudo, que no caso de Sara esta dificuldade foi ultrapassada, atendendo a que na entrevista a aluna evidencia ter noção do estudo analítico que deve fazer para determinar a continuidade de uma função.

Em síntese, é importante salientar que as conceções intuitivas que os alunos têm sobre o conceito de continuidade, que formam parte do seu conceito-imagem, permitem-lhes responder corretamente a questões que solicitam a determinação da continuidade de uma função através da visualização do seu gráfico mas, como deixam de ter sentido na ausência de um gráfico da função, conduzem-nos a dificuldades quando a função é definida algebricamente e têm que reconhecer se devem aplicar a definição de continuidade de uma função. No entanto, estas conceções intuitivas são modificadas até o aluno ter uma definição correspondente à conceção dinâmica do conceito de continuidade e ser capaz de aplicar essa definição na resolução das tarefas. Samuel e Sara são exemplo deste processo evolutivo na compreensão deste conceito. Tiago, no entanto, manteve uma conceção incompleta até ao final do estudo, não conseguindo incorporar na sua estrutura cognitiva o novo conhecimento apresentado sobre o conceito de continuidade de uma função nem articulá-lo com o seu conhecimento prévio.

Discussão e conclusões

Neste estudo pretendemos analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12.º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. As conclusões organizam-se a partir das questões do estudo, procurando responder-lhes com base na análise feita e discutindo-os à luz dos resultados identificados em outros estudos.

Significados que os alunos atribuem aos conceitos de limite e continuidade de uma função

Os significados que os alunos atribuem aos conceitos de limite e continuidade de uma função podem classificarem-se em: (i) *significados intuitivos*, que se referem às conceções que os alunos têm sobre os conceitos a partir das suas experiências pessoais, iniciais e intuitivas, referidas por Cornu (1991) como conceções espontâneas; e (ii) *significados formais*, que estão mais próximos da conceção dinâmica dos conceitos, do ponto de vista matemático e curricular, e que frequentemente são atribuídos pelos alunos após os conceitos serem abordados em sala de aula.

No que respeita aos *significados intuitivos* do conceito de limite, os alunos atribuem o significado de valor, ou seja, o limite num ponto é o valor que corresponde à imagem desse ponto através da função. Neste estudo, e à semelhança do que foi identificado nos estudos de Juter (2007) e Prezenioslo (2004), os significados intuitivos que os alunos evidenciam ter sobre o conceito de limite conduzem-nos a questionar a existência do limite consoante a função está ou não definida no ponto e, consequentemente, a determinar o seu valor a partir da imagem do objeto correspondente.

Conclui-se também que o *conceito-imagem* que os alunos evidenciam ter sobre o limite de uma função é produto das suas experiências prévias, por exemplo, no cálculo de imagens e na determinação das assíntotas do gráfico de uma função racional, tal como já identificado por Tall e Vinner (1981). Considerando a classificação de Domingos (2003) que define três níveis para o *conceito-imagem*, podemos considerar que os significados intuitivos do conceito de limite dos alunos deste estudo situam-se no primeiro nível – *conceito-imagem incipiente* – pois são conceções bastante incompletas, que fazem referência a caraterísticas notórias do objeto em casos particulares, por exemplo, quando o limite coincide com o valor da imagem do objeto ou com o valor da assíntota do gráfico da função.

Finalmente, tendo em conta que estes significados mostram que os alunos baseiam os seus resultados na sua experiência com casos particulares de limites, consideramos que os significados que atribuíram aos conceitos de limite e continuidade se situam no *mundo personificado*, segundo a classificação de Tall (2004).

Os *significados formais* que os alunos atribuem ao conceito de limite sobrepõem-se aos significados intuitivos mas refletem uma compreensão das condições que garantem a existência e a unicidade do conceito de limite, sendo estas duas propriedades fundamentais na compreensão deste conceito. Estes significados alteram-se durante o decorrer das aulas, no caso de Samuel e de Sara, chegando os alunos a conceber o limite como um valor obtido mediante um processo dinâmico de aproximação, reconhecendo que os limites laterais devem ser iguais para garantir a existência do limite e determinar o seu valor. Deste modo, identifica-se uma evolução no *conceito-imagem* para o nível seguinte, *conceito-imagem instrumental* (Domingos, 2003), pois os alunos já consideram propriedades intrínsecas do objeto que permitem construir novos conceitos. No caso de Samuel, que evidencia ter uma abordagem mais estrutural do objeto fazendo distinção sobre o que é o limite como conceito e o que é o limite como processo, podemos considerar que o conceito-imagem transcende este nível e classifica-se como *conceito-imagem relacional.* Na verdade, para Samuel, o conceito de limite não é a imagem do objeto nem a assíntota do gráfico da função, pelo contrário, o limite tem a sua própria identidade, enquanto processo, sendo o valor que resulta das aproximações laterais serem iguais.

Como consequência destes indícios de que os alunos consideram, implicitamente, o limite como conceito e como processo, conclui-se que os significados se situam no *mundo proceptual* (Tall, 2004), caraterizado pelo facto de o conceito ser concebido através de experiências com os processos, para além de que a comprovação da existência e do valor do limite se faz através da articulação do cálculo numérico, da manipulação algébrica e da análise gráfica.

No caso do conceito de continuidade de uma função, os *significados intuitivos* que os alunos lhe atribuem estão relacionados principalmente com a conceção de que uma função é contínua se a cada objeto corresponder uma imagem através da função. Esta conceção forma parte do *conceito-imagem* que os alunos têm sobre o conceito de continuidade de uma função e também resulta das suas experiências na interpretação do gráfico de funções contínuas e do uso coloquial do termo continuidade, no sentido de ser algo que *não pára,* tal como é referido no estudo de Tall e Vinner (1981). Uma vez que os alunos apenas referem algumas das caraterísticas mais notórias de uma função contínua mas que não traduzem de modo completo o conceito de continuidade, podemos concluir que estes significados formam parte de um *conceito-imagem incipiente* (Domingos, 2003) e que se encontram no *mundo personificado* (Tall, 2004).

Quanto aos *significados formais*, os alunos mostraram uma evolução significativa das suas conceções iniciais após a formalização do conceito que foi evidenciado quando usaram argumentos matematicamente aceites para justificar as suas respostas. Por exemplo, atribuindo o significado de continuidade a uma função que, para cada ponto do seu domínio, o valor do limite é igual ao valor da sua imagem através da função. Estes significados encontram-se, assim, no *mundo proceptual* (Tall, 2004). Esta conceção de continuidade de uma função passa a formar parte do *conceito-imagem* dos alunos, na medida em que integra o seu *conceito-definição*, sendo usada frequentemente para definirem o conceito e determinarem a continuidade de uma função. Além disso, os resultados revelam que, no caso particular de Samuel, os significados evoluem até ao nível de *conceito-imagem relacional*, na medida em que o aluno aborda o conceito de maneira estrutural, justificando a partir da definição e verificando os seus resultados não só através da observação do gráfico da função, mas também comprovando o cumprimento das condições mediante o cálculo algébrico.

Representações e visualização dos conceitos para obter significados e resolver tarefas

Quanto à obtenção de significados através do uso das representações, podemos concluir que estes objetos matemáticos – o limite e a continuidade de uma função – são considerados *procept* no sentido referido por Gray e Tall (1991), uma vez que a sua representação simbólica apela à aplicação de um processo operacional envolvido na determinação de um limite ou da continuidade de uma função, mas também o simbolismo faz referência ao próprio conceito. Alguns alunos, por exemplo Sara e Samuel, evidenciam desenvolver *pensamento proceptual* ao longo das suas experiências de sala de aula e da realização das tarefas quando utilizam a representação simbólica dos limites laterais de uma função num ponto para definir função contínua (nível conceitual) e ao mesmo tempo realizam os cálculos para determinar o valor dos limites envolvidos (nível processual).

Durante a resolução de tarefas, os alunos estabelecem essencialmente relações entre diferentes representações, fazendo uso da estrutura extrínseca de cada representação (Goldin, 1998) e dando lugar a constantes conversões (Duval, 2006). Por exemplo, a conversão da representação gráfica em representação simbólica, quando os alunos traduzem a informação do gráfico da função em símbolos para determinar limites e, ao mesmo tempo, a conversão para as representações verbais usando linguagem natural para justificar e comunicar as suas ideias e respostas.

De acordo com a definição de Arcavi (2003), identificou-se a visualização como *capacidade* que emerge principalmente nos momentos de leitura e interpretação do gráfico de uma função, quer seja para determinar limites quer para determinar a continuidade de uma função. Como *processo*, a visualização acontece durante as conversões entre sistemas de representação e, como *produto,* a visualização evidencia-se na criação de imagens, principalmente, na construção de gráficos de funções.

Os resultados permitem concluir, igualmente, que o nível de visualização que os alunos mostram ter sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função é o *nível formativo,* segundo a classificação de Rivera (2011), caraterizado pelo facto de serem capazes de visualizar os conceitos de acordo com as convenções matematicamente formais que são solicitadas na sala de aula.

Em resumo, os resultados evidenciam que as representações e a visualização dos conceitos de limite e continuidade são utilizadas pelos alunos na atribuição de significados e na resolução de tarefas através do desenvolvimento de dois tipos de pensamento: o *pensamento proceptual* e o *pensamento visual.*

Erros e dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos

No que respeita ao conceito de limite de uma função, tal como foi identificado noutros estudos (Juter, 2007; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992), os alunos mostram ter uma conceção errónea ao atribuir o significado de imagem ao conceito de limite de uma função num ponto e, consequentemente, evidenciam dificuldades em determinar a existência de um limite e em reconhecer a unicidade do valor do limite. No geral, estas dificuldades manifestam-se quando o aluno está a interpretar a informação do gráfico de uma função e a traduz numericamente para dar o valor ao limite em questão, pelo que também é possível que, por detrás destas dificuldades, esteja um obstáculo epistemológico referido por Cornu (1991): vincular a geometria a números.

Os resultados também evidenciam uma outra dificuldade associada à questão do valor do limite ser ou não alcançado pela função, considerada por Cornu (1991) como um dos obstáculos epistemológicos do conceito de limite de uma função. Para os alunos cujo significado de limite é a imagem do ponto através da função, o limite é alcançado pela função. No entanto, para os alunos que consideram o limite como o valor da assíntota horizontal ao gráfico de uma função, o limite é um valor que a função nunca atinge. Esta dificuldade, frequentemente, é produto da própria natureza do conceito ou do uso quotidiano de termos específicos como *limite, ultrapassar, alcança, tende* e *aproximar-se* (Fernández-Plaza et al., 2015; Jaffar & Dindyal, 2011).

Quanto ao conceito de continuidade, os resultados deste estudo mostram que, à semelhança do observado no estudo de Karatas et al. (2011), os alunos justificam a continuidade de uma função num ponto observando se a função está ou não está definida nesse ponto. Esta conceção errónea, que muitas vezes permanece na estrutura cognitiva do aluno, como no caso de Tiago, leva-o a ter dificuldade em reconhecer quando se deve aplicar a definição para verificar a continuidade de uma função num ponto.

Portanto, de acordo com a definição de Skemp (1976), os alunos participantes neste estudo evidenciam uma *compreensão instrumental* dos conceitos de limite e continuidade de uma função, embora se possa identificar duas formas diferentes de desenvolver esta compreensão. Primeiramente, os alunos desenvolvem uma compreensão instrumental de caráter mais intuitivo pois resolvem tarefas a partir de experiências particulares mais próximas das suas próprias conceções do que da formalidade matemática, sem ter domínio do conceito em si mesmo. Por exemplo, os alunos são capazes de reconhecer o gráfico de funções contínuas (tarefa de diagnóstico) sem saber a definição formal de função contínua. No entanto, depois do estudo das caraterísticas, propriedades, processos e definições dos conceitos, os alunos evidenciam uma compreensão instrumental de caráter mais formal, caraterizado pela aplicação de regras e estratégias pré-estabelecidas pelas convenções matemáticas da sala de aula, a visualização dos conceitos através de diferentes representações, o uso e articulação de diferentes sistemas de representação, e a formulação de significados mais próximos da conceção dinâmica dos conceitos. Apesar disso, os alunos ainda mantêm conceções iniciais no seu conceito-imagem, mas agora mostram o domínio de elementos formalmente aceites para resolver tarefas e justificar as suas respostas.

Os resultados deste estudo sugerem, assim, que as estratégias de ensino destes conceitos devem ter em conta a sua natureza complexa, apresentando os conceitos de limite e continuidade, desde o início, com uma identidade própria, isto é, que, através de um processo de exploração inicial, o aluno seja orientado a definir os conceitos de limite e continuidade a partir da conceção dinâmica. Para isso, será necessário que os alunos se envolvam em tarefas que requeiram o uso de distintas representações e forneçam oportunidades de agir visualmente, de modo a promover a compreensão destes conceitos através da articulação dos significados, das representações e dos processos de visualização.

Agradecimento

Este trabalho foi realizado no âmbito de uma bolsa atribuída ao primeiro autor (OAICE-CAB-11-201-2014), financiada pela Universidade da Costa Rica.

Referências

Amatangelo, M. (2013). *Student understanding of limit and continuity at a point: a look into four potentially problematic conceptions* (PhD thesis). Brigham Young University, United States of America.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Denscombe, M. (2003). *The good research guide: For small-scale social research projects*. Buckingham: Open University Press.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A matemática no início do superior.* Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 9*(1), 143-168.

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 211-229.

Fernández-Plaza, J. A., & Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 315–332.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 72-79). Assis, Itália: PME.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115- 141.

Gutiérrez-Fallas, L. F. (2016). *A compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: um estudo com alunos do 12.º ano* (Tese de Mestrado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal.

Jaffar, S. M., & Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference* (pp. 390-397). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Juter, K. (2006). *Limits of functions university students' concept development* (PhD thesis). Luleå University of Technology, Sweden.

Juter, K. (2007). Students' concept development of limits. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema, 24*(38), 245-264.

Messias, M., & Brandemberg, J. (2015). Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. *Bolema, 29*(53), 1224-1241.

ME (2002). *Programa de Matemática A para 12.º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 431-454.

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM Mathematics Education, 46*(1),109-122.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2011). Coordination of aproximations in secondary school students' understanding of limit concept. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 3, pp. 392-400). Ankara, Turquia: PME.

Prezenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55,* 103-132.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. New York, NY: Springer.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In M. Artigue, & G. Ervynck (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students' difficulties in calculus, 7th International Congress on Mathematical Education (ICME-7)* (pp. 13-28). Québec, Canada: ICME.

Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29–33.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438-445.