

Práctica y reflexión de profesores de matemáticas chilenos bajo la perspectiva del estudio de clases

Practice and reflection of Chilean mathematics teachers from the perspective of lessons study

Elisabeth Ramos-Rodríguez

Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), Valparaíso, Chile

elisabeth.ramos@pucv.cl

Pablo Flores Martínez

Universidad de Granada (UGR), Granada, España

pflores@ugr.es

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumen. Dentro de un trabajo doctoral centrado en la reflexión del docente de matemáticas, consideramos la realización de un curso formativo cuya metodología se ciñó al estudio de clases japonés. Este trabajo pretende examinar elementos teóricos del estudio de clases y de la reflexión para ver su complementariedad, y apreciar como el estudio de clases es una buena herramienta para generar la reflexión de profesores en un curso formativo. Nos basamos en una metodología cualitativa para estudiar a dos profesoras de secundaria, considerando como dimensión las tareas matemáticas escolares dentro de dos ciclos de estudio de clases. Mostramos la relación que observamos en la literatura sobre los constructos para luego analizar en el curso formativo como se entrelazan, mostrando algunos resultados de la reflexión de los docentes dentro de los ciclos de estudio de clases realizados dentro del curso formativo implementado en Chile. La experiencia formativa nos muestra que el estudio de clases favorece en los docentes una mayor involucración en sus procesos de reflexión apoyando su desarrollo profesional. Observamos elementos de complementariedad entre la reflexión y el estudio de clases, donde este aporta con la práctica y el trabajo colaborativo de manera de incentivar el trabajo reflexivo de los profesores.

Palabras claves: Reflexión; estudio de clases; desarrollo profesional; cursos de formación de profesores.

Abstract. Within a doctoral work focused on the reflection of the mathematics teacher, we consider the realization of a teacher education course whose methodology was adhered to the Japanese lesson study. This work aims to examine theoretical elements of the lesson study and reflection to see their complementarity and to appreciate how the lesson study is a good tool to generate the reflection of teachers in a training course. We use a qualitative methodology to study two high school teachers, considering as dimensions the mathematical tasks of school within two cycles of lesson study. We show the relationship that we observe in the literature on the constructs and then analyze in the teacher education course how they are interlaced, showing some results of the reflection of the teachers within the cycles of lesson study realized within the course implemented in Chile. The teacher education experience shows that the lesson study favors in the teachers a greater involvement in their reflection processes, supporting their professional development. We observe elements of complementarity between the reflection and the lesson study, where this contributes with the practice and the collaborative work in order to encourage the reflective work of teachers.

Keywords: Reflection; lesson study; professional development; teacher education courses.

(Recebido em dezembro de 2016, aceite para publicação em maio de 2017)

Introducción

El principal mecanismo de evaluación de profesores en servicio en Chile es la Evaluación Docente, que busca promover el desarrollo profesional y asegurar el cumplimiento de estándares para un desempeño de calidad y así mejorar los aprendizajes (MINEDUC, 2014). Para apoyar a los docentes que obtienen en ella un resultado deficitario se cuenta con actividades de perfeccionamiento obligatorias llamadas Planes de Superación Profesional. Taut (2015) indica que el portafolio es el instrumento de la Evaluación Docente que más se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes, siendo la interacción pedagógica, el manejo del aula y la reflexión sobre la propia práctica, los aspectos que tienen relaciones más significativas en matemática. Sin embargo, sus resultados en el año 2014 nos muestran que la dimensión con más bajo rendimiento en los docentes es la “reflexión a partir de los resultados de la evaluación”, lo que nos provoca una llamada de atención sobre el desarrollo de la actitud reflexiva de los docentes evaluados. Stein y Smith (1998) destacan que aunque todos los profesores piensen informalmente sobre su experiencia en clases, cultivar hábitos de reflexión ponderada y sistemática puede ser clave, tanto para mejorar su enseñanza como para su desarrollo profesional. Esta afirmación es ratificada por Schoenfeld y Kilpatrick para quienes es la clave definitiva del desarrollo profesional del profesor (2008, p. 348). La lógica que tiene el profesor, lo que piensa y cómo actúa debe ser un punto importante a considerar en los cursos de formación y debemos buscar en su lógica cómo apoyarlo.

Se hace necesario encontrar mecanismos que permitan trabajar con profesores con propósito de mejorar sus prácticas. Los cambios en las prácticas de los docentes, derivado de los cursos de desarrollo profesional en los que participan, depende de las oportunidades que se le presentan para construir (o reconstruir) el conocimiento de los contenidos y la pedagogía en un entorno que apoya y fomenta la toma de riesgos y el acto de reflexionar (Sowder, 2007). Estos cursos deben ofrecer oportunidades de “desarrollo profesional a los profesores y motivarlos a desarrollar los conocimientos, habilidades y disposiciones que necesitan para enseñar bien las matemáticas” (Sowder, 2007, pp. 160-161).

A pesar de contar con diversos dispositivos formativos ambiciosos en lo que respecta a la reflexión, es incierto qué es lo que realmente se ha desarrollado en la formación inicial y continua, hay poca evidencia en la literatura que indique que las ideas de Schön sobre la práctica reflexiva se hayan concretados (Cortés, Taut, Santelices & Lagos, 2011). Es primordial insistir en su presencia dado que es un elemento fundamental para que se produzca desarrollo profesional (Miranda, 2008).

Cortés et al. (2011) indagan en la literatura internacional acerca de los perfeccionamientos docentes eficaces, determinando que el desarrollo profesional efectivo incluye cinco características principales: reconocer que es un proceso de aprendizaje de adultos, atender realidad de docentes, cuidar aprender contenidos y estrategias, favorecer aprendizaje entre pares y expertos y buscar momento más adecuado. En la línea de la cuarta característica, Barber y Mourshed (2007), plantean que el desarrollo profesional efectivo incluye profesores que aprenden unos de otros, por ejemplo, comparten la planificación de una clase, observan la clase de otro, reflexionan en conjunto y proveen de retroalimentación como parte de un trabajo entre pares, donde Japón con el estudio de clases (EC) (*lesson study*) tiene mucha fortaleza en esta materia. Pero, Cortés et al. (2011) indican que en Chile los Planes de Superación Profesional se alejan de esta característica, señalando que la actual formación ocurre en un ámbito tradicionalmente expositivo, alejado de la práctica y donde se realiza escaso seguimiento, destacando que esta formación no está típicamente ocurriendo en la escuela y sosteniéndose como una comunidad de aprendizaje.

Esto nos empuja a nuestro problema de investigación, cómo el EC favorece procesos reflexivos en la formación de profesores de manera de aportar con elementos para cursos de perfeccionamiento eficaces. Para hacer frente a este problema nos proponemos dos objetivos de investigación, 1) examinar elementos teóricos del estudio de clases y de la reflexión para ver su complementariedad, 2) apreciar cómo el estudio de clases es una buena herramienta para generar la reflexión de profesores en un curso formativo.

Marco de referencia

El sustento teórico se basa en las nociones de reflexión y de estudio de clases. Como el EC analiza la práctica docente se introduce el análisis didáctico como contenido formativo y dentro de él se consideran las tareas matemáticas escolares para observar la

reflexión., Para tal fin especificamos también teóricamente los constructos análisis didáctico y tarea matemática escolar.

Reflexión

Ser un profesor reflexivo, es una característica que en la actualidad se reconoce en todo aquel que se desenvuelve en el área educativa con profesionalismo. La noción de profesor reflexivo que cobra realce en la actualidad une la concepción humanista presentada por Dewey (1910) con la epistemología en la práctica, que aporta Schön (Ramos-Rodríguez, 2014). Coincidimos con Schön (1983) quien afirma que la reflexión está íntimamente ligada a la acción y distingue entre la práctica reflexiva, que supone comprender y perfeccionar la práctica, la enseñanza o la acción (Dewey, 1910) y la racionalidad técnica que reduce la solución de problemas a la selección de medios técnicos más idóneos para determinados propósitos. El autor conecta la reflexión con la acción, introduciendo la noción de reflexión durante la acción y reflexión sobre la acción. Esto tiene repercusión en el área educativa, en relación a la acción docente. La reflexión durante la acción (*reflection-in-action*, Schön, 1983) es la que realiza el profesor cuando aparece en su práctica momentos de incertidumbre que debe enfrentar (momento sorpresa denominado por Schön, 1983). Cuando el profesor examina alguna acción, surge la reflexión sobre la acción (*reflection-on-action*), que es un proceso de reflexión profundo y duradero que lleva al profesional a replantearse las soluciones y buscar otras alternativas, generando el conocimiento profesional que conjuga la práctica con la teoría (Ramos-Rodríguez, 2014).

Hay autores que han elaborado modelos que nos ayudan a abordar la reflexión de manera sistemática. En educación matemática, destacamos el modelo cíclico de reflexión ALaCT de Korthagen (2011), proceso compuesto de cinco fases (figura 1): acción

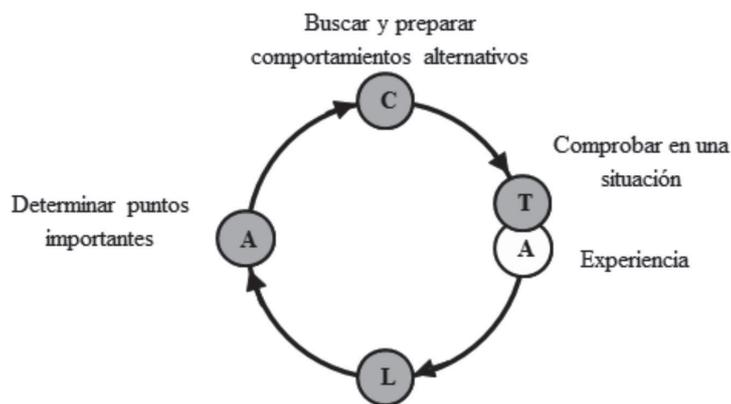


Figura 1. Modelo ALaCT de Korthagen (2011, p.39) (traducción propia)

o experiencia, mirar hacia atrás en la acción, identificación de los puntos importantes en donde es relevante la intervención de un agente externo (un académico experto, un par o mediante lectura de documentos), crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción, y por último, comprobar en una nueva situación, empezando un ciclo nuevo de reflexión, pero desde apreciaciones anteriores. Korthagen utiliza la sigla ALaCT haciendo alusión a los nombres en inglés de las fases.

Estudio de Clases japonés

La metodología de EC es un medio de capacitar a los profesores para que desarrollen sus propias prácticas pedagógicas, basado en la investigación sobre su propia práctica (Isoda, Arcavi & Mena, 2012; Ponte, 2014). Es un modelo favorecedor del desarrollo profesional que se origina en Japón en 1912, como una práctica educativa con la función de permitir a los profesores estudiar sus formas de enseñanza (Elipane, 2011). Se vale de un trabajo colaborativo realizado por los profesores con objeto de mejorar su conocimiento de contenidos y metodologías de enseñanza, así como profundizar sobre los aprendizajes de los alumnos (Isoda, Arcavi & Mena, 2012). Se inserta directamente en la enseñanza para generar modelos y formas concretas de buenas prácticas, constituyéndose en un enfoque clave para compartir actividades de perfeccionamiento, como el que pretende el curso de formación de este estudio.

Es un proceso cíclico compuesto de tres etapas: preparación, implementación y evaluación de la clase y revisión de resultados. Es una forma eficaz de articular la colaboración entre pares, la práctica y la focalización en el aprendizaje de los alumnos (Isoda, Arcavi & Mena, 2012), investigación sobre la propia práctica (Elliot, 2004), elementos considerados fundamentales en los procesos formativos eficaces (Cortés, et al., 2011).

En Chile, a partir de iniciativas del Ministerio de Educación en los años 2006 y 2008 académicos de universidades viajaron a Japón a interiorizarse de esta metodología. Desde entonces se han llevado a cabo diversas iniciativas para incorporarla en nuestro país, como los Talleres Comunales en los años 2008 a 2010, estrategias de formación profesional para docentes de matemáticas centradas en EC. Hoy en día existen grupos de EC en diversas zonas del país, por ejemplo, en Valparaíso, hay dos grupos de EC liderados por nuestra universidad.

Complementariedad del estudio de clases y la reflexión

Al revisar la literatura del tema, se observa que la conexión entre el EC y reflexión docente no es casualidad. Elliot (2004), nos habla del EC y su impacto en propuestas de formación con enfoque en la noción de profesor reflexivo. Enfatiza la importancia decisiva de los procesos de reflexión en contextos colaborativos como un componente clave de la profesionalidad autónoma de los docentes. El análisis del movimiento denominado *Lesson study* en Japón o *Learning study* en Hon Kong),

permite a este autor integrar en una propuesta las sugerencias de desarrollo del docente como profesional reflexivo, investigador de su propia práctica, y la poderosa tradición japonesa de estimular el aprendizaje continuo de los docentes mediante su participación en grupos de EC, cuya finalidad prioritaria es provocar el aprendizaje de cada uno de los estudiantes. Además, afirma que los estudios de aprendizajes (*learning study*) proporcionan un contexto y un espacio en el que los profesores son capaces de reflexionar sobre su práctica.

Dentro del ámbito educativo matemático, Callejo, Llinares y Valls (2007), afirman que una de las formas de articular el análisis y la reflexión compartida sobre la práctica, es a través del desarrollo del EC, la que ha tenido diferentes concreciones. Los autores, llevan a cabo un programa de formación para futuros profesores de matemáticas, en donde proponen una formación permanente en la línea de una práctica reflexiva adoptando el ciclo de EC. Concluyen que el uso de estos entornos en la formación inicial ha mostrado que la interacción y la reflexión sobre registros de la práctica ayuda a los estudiantes a generar una visión más compleja de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Para el docente que no cuenta con experiencia en investigación, la actitud reflexiva es fundamental para investigaciones sobre la propia práctica (enmarcadas en nuestro caso en EC), ya que permiten intervenciones significativas en contextos de trabajo, orientadas a solucionar problemas de la práctica, que ayuda a identificar las estrategias para afrontarlos y, al mismo tiempo, tiene un efecto formativo de largo alcance en los profesores (Ponte, 2014). La estimulación de la reflexión que provoca el trabajo en grupo corrobora los resultados de Álsina, Busquet, Esteve y Torra (2006), si “se observa, se reflexiona y se construyen soluciones de manera colectiva y esto rompe el aislamiento profesional y permite compartir, con otros, preocupaciones, soluciones y esperanzas” (p. 40).

La consideración del trabajo entre pares que enfatiza el EC coincide con la idea de Korthagen, la reflexión “es beneficiosa si se estimula el aprendizaje reflexivo entre pares” (2010, p. 94). En relación a este autor, en Ramos-Rodríguez (2014), hemos ilustrado como las etapas del EC nos sirven para generar las fases del proceso reflexivo ALaCT (Korthagen, 2011). El modelo ALaCT responde a cómo se lleva a cabo la reflexión, los cursos de formación permanente pueden colaborar mediante situaciones que posibiliten cada parte del ciclo. Una de esas partes requiere distanciamiento de la propia acción, bien para detectar los problemas que han surgido, bien para apreciar el posicionamiento que se adopta. Este distanciamiento que requiere un trabajo entre pares, desde el trabajo colaborativo, es posible realizarlo mediante procesos sistemáticos como los que propone el EC. Este favorece las fases del ciclo reflexivo, en donde se incorporan nuevos elementos que sustentan las decisiones de los profesores respecto a sus clases, identificando las fases del modelo reflexivo ALaCT y las etapas de un ciclo del EC (figura 2).

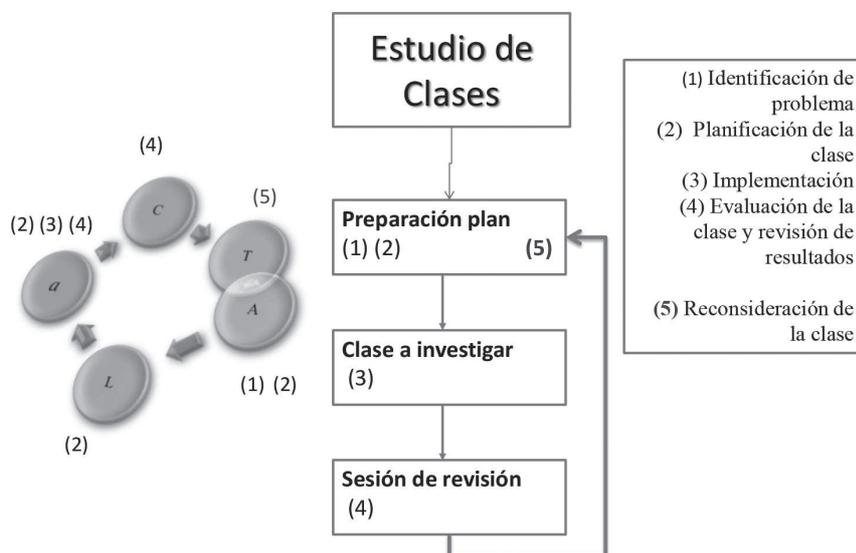


Figura 2. Articulación del EC y modelo ALaCT

Se ilustra cómo la fase final, T, del ciclo de reflexión, es posible generarla a partir de la realización de las etapas del ciclo de EC, es decir, este es un medio que permite lograr que los profesores atraviesen estas fases del ciclo reflexivo.

Una de las conclusiones del estudio, es que si bien, parece ser que el EC no es un elemento clave en toda reflexión, esta favorece el proceso reflexivo en un curso formativo, elemento que además vincula fácilmente teoría y práctica, confirmando los resultados del trabajo realizado por Elliot (2004) sobre EC y reflexión y en concordancia con el enfoque realista planteado por Korthagen (2011).

En el proceso reflexivo ALaCT articulado con el EC es posible observar los tres momentos de la reflexión presentados por Schön (1983). Así, en la etapa de planificación de la clase, fase A del proceso ALaCT se concreta la reflexión para la práctica. Posteriormente en la puesta en marcha de la planificación (segunda etapa del EC), estimulada en la fase L, se concreta la reflexión en la práctica del profesor. Por último, en la fase a, donde se analiza la clase, se estimula la reflexión sobre la práctica.

Análisis didáctico

La reflexión debe centrarse en un problema de la práctica; en el curso de formación los profesores se centran en un problema sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Para facilitar el análisis de las producciones de los docentes sobre sus problemáticas, desarrollaremos parte del análisis didáctico tal como lo concibe el grupo Pensamiento

Numérico y Algebraico (PNA) de la Universidad de Granada. Este es un procedimiento fundamentado en la noción de currículo que promueve un enfoque funcional para permitir al profesor la planificación de clases de matemáticas (Rico, et al., 2013). Para su desarrollo se llevan a cabo cinco sub-análisis de manera sistemática y secuencial: conceptual, de contenido, cognitivo, instruccional y de evaluación (figura 3).

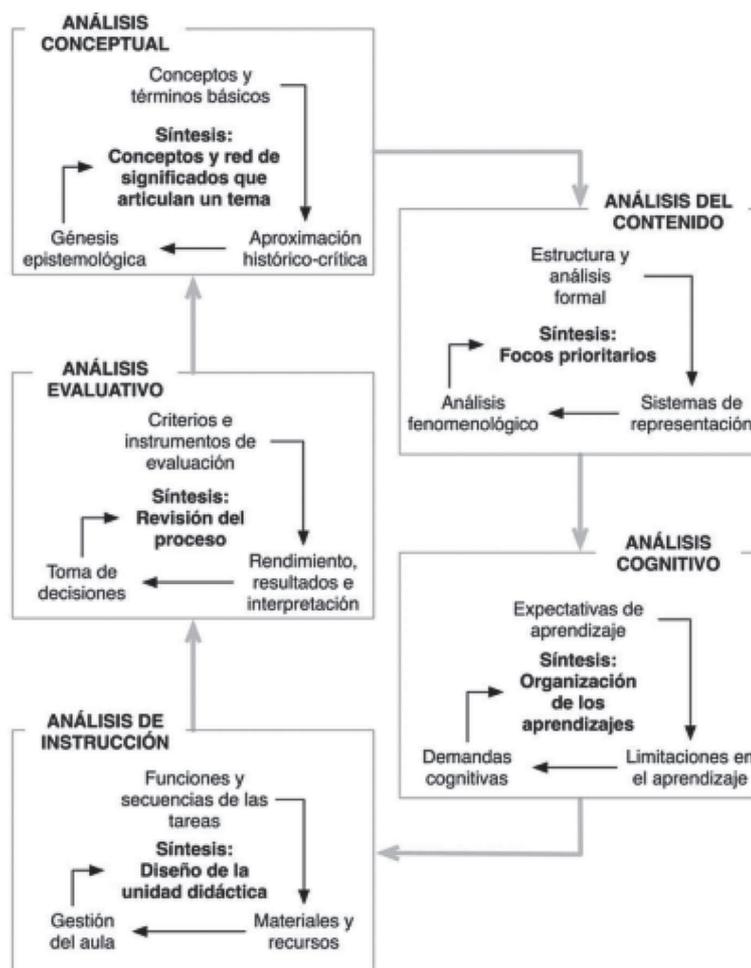


Figura 3. Estructura y ciclo del análisis didáctico (Rico et al., 2013, p.19)

El interés que tiene el análisis didáctico para el docente en su actuación práctica y el papel de la reflexión en este lo muestra Flores (2005). El autor afirma que el desarrollo del análisis didáctico sin una reflexión del docente quedaría supeditado a la acción, lo que conduce a que su tarea derive de una simple formación artesana, que surge del ejercicio de la docencia.

Tareas matemáticas escolares

Hemos seleccionado a las tareas como elemento que nos permite observar la práctica, siendo necesario explicitar los elementos que las definen. En Ramos-Rodríguez (2014) proponemos una caracterización de las tareas en base a once descriptores (figura 4), ocho primarios, que permiten ver el diseño de las tareas, y tres secundarios, para analizar de qué forma se articulan con el contenido matemático que involucra.

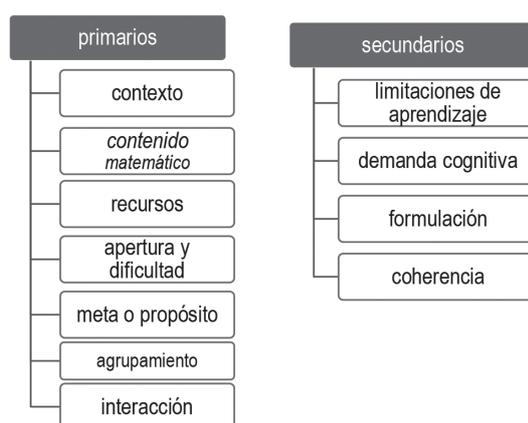


Figura 4. Descriptores que caracterizan las tareas matemáticas escolares (Ramos-Rodríguez, 2014)

Continuaremos describiendo la metodología de investigación, los resultados y las conclusiones que surgen a la luz del análisis.

Metodología

Adoptamos el paradigma cualitativo (Hernández, Fernández & Baptista, 2010), bajo un enfoque descriptivo-interpretativo de la realidad, a partir de un estudio de caso, que al apoyarse en procedimientos y técnicas cualitativas (Flick, 2004), procura generar conocimiento comprensivo de la complejidad educativa referente a la formación de profesores.

El contexto del estudio se enmarca en un curso de formación que pretende generar reflexión en sus participantes. Los sujetos informantes son 7 docentes participantes (tabla 1) que interactúan con las dos formadoras del curso, investigadoras con experiencia en formación docente y que guían todo el proceso del EC, tomando una de ellas el rol de observadora participante de este estudio. No hubo deserción durante el proceso a partir de la segunda sesión.

Tabla 1. Resumen de información sobre docentes

Experiencia docente	E. Primaria	E. Secundaria	E. Universitaria
Menos de 3 años	2	3	0
12 años	1	0	0
26 años	0	0	1

El profesor de enseñanza universitaria trabajó 20 años en la enseñanza media y luego en la formación de profesores en la universidad. Se consideraron siete instrumentos de recogida de datos: diarios de aprendizajes, portafolios, transcripciones de vídeos de las clases del curso de formación, tareas de formación subidas en la plataforma virtual, un cuestionario de reflexión, los archivos powerpoint de las exposiciones grupales de algunas sesiones, el informe final individual que incluye una meta-reflexión, con apreciaciones finales sobre los procesos reflexivos y el curso. También se consideraron notas de campo para llevar registros y anotaciones durante los eventos del curso formativo.

Con la información recogida realizamos un análisis de contenido, fijando como unidades referenciales, los conjuntos de párrafos que tienen conexión o idea en común (Flick, 2004). Las categorías de análisis empleadas surgen del marco de referencia en relación a las tareas, ya que estas nos permiten mirar la actuación de los profesores y aportar información más rica para apreciar, con seguridad, afirmaciones sobre sus reflexiones. Es decir, miramos en las tareas planteadas por los profesores su objetivo, coherencia, representaciones empleadas, más los otros ocho descriptores mencionados en el apartado teórico.

De acuerdo con la relación manifiesta entre el EC y la reflexión, diseñamos un curso formativo que utiliza el EC para lograr la reflexión de los profesores asistentes. Se adopta la metodología de EC por satisfacer las condiciones que se imponen al curso, que se inicia debatiendo en grupo el diseño de una clase, discutiendo el diseño entre pares y con las formadoras, posteriormente se implementa la clase y finalmente analizándola a través de su observación en vídeo. Las etapas del EC nos facilitan herramientas metodológicas que ayudan al diseño del curso. La organización de las sesiones (20 en total, con una duración de tres horas cronológicas) arranca del desarrollo de procesos que favorezcan la reflexión a partir del ciclo reflexivo *ALaCT*.

Cabe señalar que el EC es un medio del que nos valemos en el curso, explicando al inicio del ciclo los elementos más relevantes de esta metodología. Pero la reflexión tiene un doble rol, fin y medio. Es un fin, pues es el propósito del curso. Pero también repercute en la metodología del curso, que procura lograr las fases del ciclo reflexivo a partir de acciones concretas en diversas sesiones de trabajo.

Hemos considerado dos grandes ciclos reflexivos a lo largo de todo el curso, que concuerdan con dos ciclos de EC. En una primera instancia los docentes distribuidos en grupos, identifican y formulan una situación de aula que han apreciado como problemática relativa a la enseñanza o al aprendizaje de la matemática (figura 5).

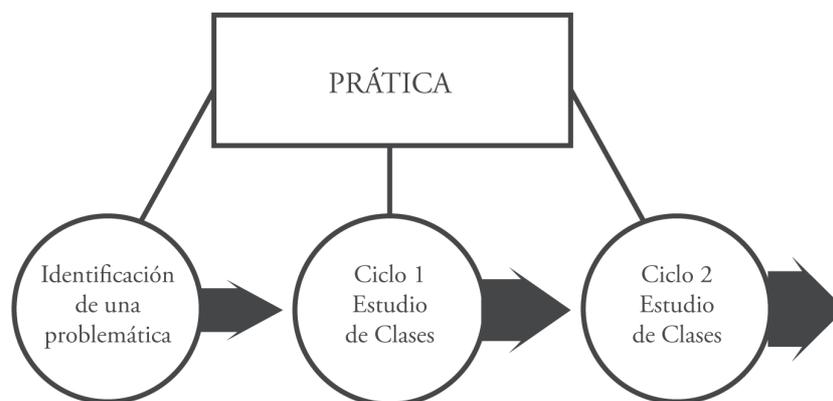


Figura 5. Estructura del curso formativo

Los participantes se distribuyen en grupos mezclándose docentes de distintos niveles educativos, para enriquecer la discusión interna (tabla 2). En la etapa de implementación en el EC, un integrante del grupo implementa la clase y los otros y las formadoras, observan. En el ciclo siguiente otro de los integrantes del grupo debe implementar la clase, mientras los demás observan. Todas las clases son grabadas y analizadas en el curso formativo.

Tabla 2. Distribución profesores según problemáticas

Grupo (nominación)	E. Primaria	E. Secundaria	E. Universitaria	Problemática inicial
Generalización	1	1		Generalizar en lenguaje abstracto un razonamiento de 2 múltiplos. Reconocer un modelo algebraico para representar un número par
Modelación*	2		1	Plantear problemas mediante ecuaciones, en específico, dificultades para traducir del lenguaje verbal al algebraico.
Cuadrado de binomio		2		Comprender la fórmula generalizada del cuadrado de binomio rompiendo con la mecanización

*El grupo denominado “modelación” corresponde al caso que se estudia en este artículo.

Resultados y análisis

Los resultados de la implementación del curso se detallan a continuación, analizando los dos ciclos de EC, así como la reflexión promovida en los profesores, atendiendo a las tareas propuestas por uno de los grupos compuesto por dos profesoras que utilizan para sus clases calculadoras gráficas y TI Navigator.

Estudio de Clases I

Etapa 1: Preparación de la clase

El grupo debe planificar una clase relativa a un problema detectado por ellos, que se centra en “cómo enseñar para que los alumnos no tengan dificultades para traducir del lenguaje verbal al algebraico”. Este problema, junto con el diseño de la clase corresponde a la primera fase del ciclo reflexión ALaCT. Los profesores diseñan dos tareas, $T_{1.1}$ y $T_{2.1}$ (figura 6).

$T_{1.1}$

Inicio: Se presenta el siguiente problema [enunciado], escribiéndolo en el pizarrón, el cual puede ser acompañado de un dibujo que lo haga más concreto

“En el almacén de don Luis se venden masticables a \$40 cada uno”

Escribe una expresión algebraica que represente esta situación

Desarrollo: En parejas se comparte la expresión descrita y lo escriben en la calculadora (utilizan distintos símbolos)

Para comparar las expresiones se utiliza la gráfica de la función utilizada, los estudiantes introducen su expresión

Como utilizan símbolos que la calculadora no reconoce, se definen las variables utilizando las letras “y”, “x”. Con ello, se explica que esto describe una función, donde la x es una variable independiente y la y es la variable dependiente

Vuelven a introducir la expresión ahora utilizando los nuevos símbolos, se proyectan las gráficas que representan las soluciones y se busca la concordancia entre ellas, analizando todas aquellas que no llegaron a las soluciones, escribiéndolas a un lado del pizarrón

Se vuelve al problema escrito en la pizarra, se pide a los estudiantes leerlo e identificar primero las variables involucradas, a ellas se les asigna un símbolo, luego se describen situaciones para el problema, buscando identificar la operación que la representa (se puede realizar una tabla de doble entrada para apoyarse)

Se construye un diagrama que represente el problema [enunciado] en el pizarrón y se concluye escribiendo la función nuevamente y realizando la gráfica

$T_{2.1}$

Cierre:

Los estudiantes realizan un diagrama para el siguiente problema utilizando la calculadora:

Paula dice que su papá, que tiene el triple de la edad de ella, la pasa por 30 años ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la edad de Paula?

Se proyectan los diagramas de los estudiantes. A partir del diagrama escriben la expresión algebraica que la representa en la hoja que se les entrega

Figura 6. Plan de clases inicial

En esta etapa inicial del EC, las profesoras proponen emplear diversos tipos de representaciones para el desarrollo de la tarea: verbal, tablas, gráfico, algebraico y diagramas. Se observa una intención por apoyarse en las tablas para construir el modelo matemático, en caso que los alumnos no pudieran obtenerla, otorgándole el papel de modelo real. El uso de estas lo consideran de manera opcional, dando mayor relevancia a la verificación de la representación algebraica (con la representación gráfica) que a la construcción de la misma. El diagrama y la gráfica se emplean como medio para verificar la construcción de la función asociada al enunciado verbal. Agregan el uso del diagrama para verificar si han logrado la representación algebraica, luego vuelven a la representación gráfica con la misma intención. Se observa que la tecnología se usa en un buen espectro de la clase, aportando al trabajo individual y colectivo. Las docentes prevén que los alumnos tengan alguna dificultad en su uso, a causa de la simbología usada para representar la expresión (que en realidad es una función lineal discreta). Sin embargo, manifiestan utilizar esta dificultad como medio para aclarar la idea de variable dependiente e independiente.

La tarea $T_{2,1}$ comienza apoyándose en la construcción del diagrama como medio de apoyo para el objetivo propuesto, es decir para encontrar la expresión algebraica asociada al enunciado verbal.

En esta tarea pretenden usar la tecnología para que los alumnos visualicen los diagramas diseñados, en una puesta en común, con el fin de ahorrar tiempo y además observar las diversas respuestas aportadas.

Etapa 2: Clase a investigar

Siguiendo con la metodología de EC, una de las docentes del grupo realiza la clase en uno de los cursos que imparte. Esto incentiva mirar hacia atrás (fase L, del proceso reflexivo ALaCT) la planificación, las decisiones que se adoptan en la misma. La puesta en práctica de lo planificado genera cambios en las tareas propuestas, originando las tareas $T_{1,2}$ y $T_{2,2}$ (figura 7).

<i>T_{1.2}</i>	
Momento	Descripción (la docente...)
Inicio de la clase	Verbaliza el objetivo de la clase y lo escribe en la pizarra: Modelar problemas mediante ecuaciones. Menciona los aprendizajes que los alumnos deben manejar y que fueron vistos en sesiones anteriores (términos semejantes, reducción de expresiones algebraicas, etc.). Solicita a los alumnos la definición de modelar y relaciona esta definición con la vida cotidiana.
Presentación de la tarea 1	Pide a un alumno que lea en voz alta el problema Vuelve a leer el problema para verificar si el resto de los alumnos lo comprende, enfatizando las palabras claves del enunciado Da pautas para el trabajo individual: <ul style="list-style-type: none"> • la docente pide que expresen algebraicamente el enunciado de la tarea. • va verificando que cada uno de los alumnos escriba en la hoja la expresión que estimen conveniente.
Trabajo individual	Los alumnos trabajan en forma individual sin evidenciar mayor dificultad.
Trabajo grupal	Solicita a los alumnos que se ubiquen en grupos y que discutan las “expresiones algebraicas” de cada uno de los miembros del grupo y que se decidan por la que ellos estimen correcta.
Puesta en común	Pide a los grupos que ingresen en la calculadora la representación algebraica elegida. Identifica cada una de esas representaciones algebraicas por medio de las calculadoras y TI Navigator, las discuten en gran grupo. Se discute una a una cada expresión, hasta llegar a la conclusión que la mayor parte de los grupos representa algebraicamente el enunciado de manera correcta. En este proceso destaca un grupo que utiliza el sistema de representación pictórico para solucionar
<i>T_{2.2}</i>	
Momento	Descripción (la docente...)
Presentación de la tarea 2	Una alumna lee el enunciado Pide a los grupos que trabajen en la construcción del diagrama para el segundo enunciado y que cuando tengan el diagrama lo ingresen a la calculadora
Puesta en común	En la pizarra se proyectan los diagramas ingresados en las calculadoras Elige uno de ellos y discute la relación con el enunciado.
Cierre	Establece las dos relaciones que están inmersas en el enunciado.

Figura 7. Caracterización de la clase

En la tarea $T_{1,2}$, está previsto que las representaciones gráficas no se introduzcan hasta que la profesora llegue a un consenso con los estudiantes sobre cuál es la representación algebraica adecuada. La docente al no llegar a consenso sobre la representación algebraica, hace uso de la representación pictórica (dibujo de caramelos asociado a precio de compra). Utiliza una tabla de doble entrada con valores numéricos como lo tenía previsto en su planificación, para apoyar la construcción de la representación algebraica. El debate sobre la representación algebraica se realiza con lentitud, por lo que se dedica más tiempo de lo planificado.

En la tarea $T_{2,2}$, se hace dificultosa a los alumnos la construcción del diagrama en la calculadora, por lo que demora un tiempo mayor de lo estimado que se disminuye del tiempo para la puesta en común. Se aprecian dificultades para construir el diagrama. Finalmente, la docente presenta el diagrama y construye la representación algebraica (sistema de ecuaciones), terminando la clase.

Etapa 3: Análisis y revisión de la clase

Durante esta etapa del EC, se observa la grabación en vídeo de la clase implementada. Posteriormente la profesora que la impartió expresa sus impresiones, cómo se sintió, qué pretendía y cómo llevó a cabo en la práctica lo planificado (dando nuevamente lugar a la fase “L: una mirada hacia atrás” del proceso ALaCT).

La docente reconoce ser consciente de haber realizado cambios respecto a la planificación. Advierte que modificó elementos de la simbología e incorporó preguntas para determinar el precio de otras cantidades de masticables; introdujo la representación gráfica antes de consensuar cuál era la representación algebraica. Se cuestiona si es correcto cambiar en el acto lo planificado. Por otro lado, manifiesta que no se sintió a gusto con el manejo que posee de los recursos tecnológicos, reconociendo que necesita mejorar su dominio de la calculadora para su docencia. En contraparte, destaca que se sintió segura al ver que algunos alumnos escribieron correctamente la representación algebraica en la calculadora, lo que le sirvió para continuar la clase con mayor propiedad. Está satisfecha también con la decisión de revisar las respuestas erradas antes de centrarse en las correctas.

La otra integrante del grupo (que presenció la clase), opina que su compañera dirigió excesivamente la enseñanza, ayudando a sus alumnos para llegar a las respuestas. Pese a ello, considera que se cumplió el objetivo propuesto para la clase. También indica que antes de la clase, ambas habían pensado en posibles estrategias a seguir, en caso de que no se dieran ciertas respuestas durante su desarrollo.

Posterior a esto se incentiva un debate sobre lo acontecido en la clase, motivando el reconocimiento de los puntos importantes de la planificación, con lo que se produce una verbalización de los argumentos de los profesores, llevando a cabo la tercera fase (“a”) del proceso ALaCT, generado en el EC.

El grupo recoge en sus portafolios los elementos que considera relevantes de las observaciones de los demás integrantes del curso, esperando mejorar su planificación para una nueva clase. Se replantean examinar la vinculación que existe entre diagrama

y representación gráfica y aclarar mejor el papel que juegan las representaciones en las tareas. Destacamos el comentario de una de las docentes en el diario de aprendizaje: “al parecer la tabla de doble entrada y el gráfico puede complicarlos aún más, ya que sirven para la verificación, pero como las funciones no son un concepto que manejen aún puede causar un problema aún más grande”.

Sus apreciaciones sugieren que las docentes, gracias a la colaboración de sus pares, toman conciencia de puntos importantes de la planificación, centrándose prioritariamente en responder a preguntas como ¿qué rol tienen la representación gráfica y los diagramas para el propósito de la clase en relación a la problemática?, ¿cómo hemos considerado las limitaciones de aprendizaje y reflejado en el contexto de la tarea, la estructura conceptual seleccionada y los enunciados planteados?, ¿cómo gestioné la clase?, ¿cómo formulé el plan de clases? y ¿es coherente con la problemática el propósito de la clase? Posicionamientos y conductas que dan indicios de que las docentes han materializado esta fase del ciclo reflexivo.

Tras el análisis de la clase, se solicita que expliciten los elementos que modificarían. El grupo busca estrategias o soluciones para afrontar posteriormente la planificación. Como se observa, esta etapa de reformulación del EC facilita la fase C del proceso reflexivo. En sus apreciaciones, las docentes al trabajar en conjunto, deciden cambiar la instrucción “escribe una expresión algebraica que represente esta situación”, por “modela una ecuación que lo represente”. Con ello intentan prestar mayor atención a los términos matemáticos usados, haciéndolos más coherentes con la estructura conceptual de cada tarea, con la intención de no provocar confusiones en los alumnos.

Emplean su conocimiento de la estructura conceptual, utilizando una función continua en lugar de la función discreta planteada, para evitar posibles errores de los alumnos sobre el concepto de función, ya que la calculadora representa funciones continuas. Al buscar estrategias para la planificación, las docentes manifiestan dar sentido al cierre de la clase, en términos de formalización de lo tratado en la misma, resaltando el papel de la modelación y el uso de diagramas.

Como fin del ciclo de EC, el grupo se replantea el punto de partida, la planificación, con propósito de reformularla, dando origen a un nuevo ciclo de EC. En paralelo, vuelven al punto de partida del ciclo reflexivo (fase T), es decir, al problema que dio origen al mismo: el diseño de clase. Las formadoras solicitan explicitar qué elementos cambiarían, lo origina las tareas $T_{1.3}$ y $T_{2.3}$ (figura 8).

En esta nueva versión de la tarea inicial, las docentes centran su atención en cómo emplear el recurso tecnológico para mejorar la clase. Cambian la estructura conceptual de función discreta a función continua, en relación a una magnitud continua, como es el precio del kilo de pan. Además consideran necesario abordar otros conceptos asociados a las funciones: dominio y recorrido. Eliminan la representación gráfica y de tablas, y continúan con el uso de diagrama.

	$T_{1.3}$
Inicio	
	<ul style="list-style-type: none"> - Darle importancia a qué es modelar. - El problema puede cambiar a algo como el kg. de pan, un objeto que describa una función lineal (continua)
	Se pide a los estudiantes modelar una ecuación que lo represente.
Desarrollo	
	<ul style="list-style-type: none"> - En grupo, no más de 3, comparten sus ecuaciones y discuten hasta lograr una, la cual ingresan a la calculadora. - Se proyectan las ecuaciones descritas y se analizan hasta llegar a un consenso con ellas. - Se proyectan las funciones y sus gráficas, ahora se analizan a partir de ellas y cuales representan la función descrita. - Se analiza la función y su dominio y recorrido. - Se puede ampliar los conceptos de v. dependiente e independiente. - Se proyecta un diagrama que describa la situación y se pide a los estudiantes (a mano alzada) explicar el diagrama.
	<hr/> $T_{2.3}$ <hr/>
Cierre	
	<ul style="list-style-type: none"> - Se entrega el 2° problema [enunciado verbal] (el segundo de la planificación anterior) y los estudiantes crean un diagrama para éste. - A partir del diagrama, los estudiantes modelan el problema [enunciado] a partir de una ecuación. - Algún estudiante puede presentar su diagrama y explicar cómo obtuvo la ecuación.

Figura 8. Planificación reformulada

La segunda tarea de esta planificación, $T_{2.3}$, deriva de la tarea $T_{2.1}$, volviendo a utilizar el término “ecuación” en vez de “expresión algebraica”, dando mayor coherencia a la tarea con el contenido matemático. En sus comentarios se aprecia que las docentes consideran un sistema de ecuaciones, aunque durante esta fase no se detienen a diferenciar entre “ecuación” y “sistema de ecuaciones”. Las docentes agregan una nueva forma de interacción, explicitando la intención de facilitar que uno de los alumnos presente el diagrama a sus compañeros en la pizarra, para explicar cómo llega a la ecuación, lo que indica una intención de dar mayor protagonismo a los alumnos en la clase.

El nuevo plan de clase ya no considera un momento para activar los conocimientos previos de los alumnos. Pretenden considerar el inicio con una visión integrada de la matemática (qué es modelación), acorde con la noción de “inicio de clases” propuesto en los planes y programas del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2014). A partir del tercer momento de la clase (el cierre), se apoyan en los diagramas para construir la representación algebraica, es decir, asistir a los alumnos en la traducción del lenguaje verbal al algebraico, lo que puede sugerir una mirada técnica de la problemática, centrandó el desarrollo de la clase en la identificación de los errores que cometen los alumnos en la traducción de un lenguaje a otro.

Estudio de Clases II

Etapa 1: Preparar clase

Esta etapa se inicia a partir de la anterior, desde la revisión y evaluación de la planificación, proponiendo las tareas $T_{1,3}$ y $T_{2,3}$, analizadas anteriormente. Para este segundo ciclo de EC, además de la concreción del plan de clases, la preparación de esta involucra varios momentos dentro del curso formativo: a) la explicitación de los elementos que sufrieron cambios de la planificación, b) el desarrollo de algunos elementos del análisis didáctico, y c) la reformulación de la planificación que surge del análisis didáctico. Detallaremos algunos aspectos de estos puntos a continuación.

a. Explicitación del plan de clases

Se estimula a que las docentes miren el nuevo plan de clases propuesto, explicando qué elementos reformularon. El grupo menciona que ahora dan énfasis al uso de representaciones, en específico al diagrama. También menciona que cambian la estructura conceptual, de función discreta a continua, para evitar que los alumnos puedan interpretar una representación gráfica continua de la calculadora, aunque el problema sea de variable discreta. Por último, se preocupan por establecer nuevos aspectos de la gestión, otorgando mayor participación a los alumnos, promoviendo que expongan a sus pares durante el desarrollo de la segunda tarea. Esto incentiva cuestionamientos como ¿qué quiero hacer en la planificación? ¿Cómo se sentirían mis alumnos? interrogantes de la fase L del proceso reflexivo, de mirar hacia atrás, el problema: diseñar una clase.

b. Análisis didáctico

Después de la exposición de las planificaciones, se introduce en el curso un nuevo elemento teórico, el análisis didáctico, que los grupos desarrollan teniendo en cuenta su plan de clase.

Cada grupo expone sus avances tomando conciencia de nuevos aspectos de su planificación, dándose diversas discusiones colaborativas con sus pares y formadoras, quienes le hacen comentarios y sugerencias referentes a los sistemas de representación, al papel de la representación gráfica y de los diagramas, y al orden en que aparecen en la planificación. Proponen variar el momento donde se introduce la representación gráfica, de modo que esta sirva como modelo real para la construcción del modelo matemático. Continúan intentando clarificar las ventajas y desventajas entre el uso de la representación gráfica y el diagrama, para finalmente sugerir emplear el diagrama en vez de la representación gráfica.

Las docentes consideran estos comentarios, aprecian que les origina una transformación sustancial en la clase, pero observan que esto puede producir mejoras significativas para el logro de la meta de la tarea. Las formadoras requieren que clarifiquen si el propósito de la clase es la modelación o sólo la iniciación a esta. El grupo examina sus prioridades y recuerda su problemática, optando por aclarar que su intención es que los alumnos realicen los dos primeros pasos de la modelación, por lo que empiezan a expresar la

problemática en términos de la “iniciación a la modelación”, lo que refleja en parte el trabajo colaborativo entre pares.

Se discute además sobre la forma de gestionar algunas representaciones matemáticas, como en qué momento y de qué forma introducir el diagrama, si hacerlo a partir de otro ejemplo o en relación al enunciado que aparece en la tarea. Las docentes afirman que habían pensado este punto, pero que no tenían claro de qué forma lo iban a realizar, por lo que la discusión sirvió para que las docentes examinaran las ventajas de cada opción, y para apreciar la relevancia del diagrama en ambas tareas, que finalmente se constituye en puente entre el lenguaje verbal y el modelo matemático.

c. Reformulación del plan de clases

Por último, antes de realizar la clase, el grupo escribe la planificación de su clase tal como piensan llevarla a cabo, expresando las tareas $T_{1,4}$ y $T_{2,4}$ (figura 9).

$T_{1,4}$

INICIO: Se comparte con los estudiantes el objetivo de la clase, realizando una motivación acerca de la importancia de este y su significado.
 Se les hace entrega de una hoja con la siguiente situación multicopiada, la cual puede ser acompañada de un dibujo que lo haga más concreto (se pide a los estudiantes que utilicen lápiz pasta para escribir las ecuaciones en las hojas y que no las borren)
 Moisés compra, en el almacén de Don Luis, pan a \$850 el kilogramo ¿cuál (es) la representación algebraica que podría asociarse a la situación?
 Explica, justificando los pasos que utilizaste para llegar a dicha representación(es).
 En grupos ingresarán la solución a la calculadora TI, destacando los pasos que utilizaron para representarla.

DESARROLLO: Para comparar las ecuaciones se proyectan las soluciones, un integrante de cada grupo debe explicar su solución y los pasos que utilizaron para llegar a dicha representación.
 (Como utilizan símbolos que la calculadora no reconoce, se definen las variables utilizando las letras “y”, “x”. Con ello, se describe que esto describe una función, donde la x es una variable independiente y la y es la variable dependiente)
 Se expone el método de diagrama como una herramienta para modelar. Se presentan los rectángulos para reconocer las variables, los óvalos para los datos y los conectores como operaciones
 Con ello los estudiantes crean un diagrama para la situación anterior haciendo uso de la calculadora
 (En el caso de que ningún estudiante pueda explicar el problema, se formularán preguntas guiadas como: ¿qué representa la variable x?, ¿qué representa el valor 950?, etc.)
 Se realiza un plenario, en el cual se buscará la relación entre el diagrama y la representación algebraica.

$T_{2,4}$

CIERRE: Como desafío, los estudiantes realizan un diagrama para la siguiente situación utilizando la calculadora:
 “Rodrigo en tres años más tendrá el cuádruple de la edad de su hermano”
 A partir del diagrama los estudiantes modelan la situación en la hoja, algunos de los estudiantes expone la proyección de su diagrama justificándolo.

Figura 9. Nueva reformulación de la planificación

En la tarea $T_{1,5}$ las docentes incorporan instrucciones para la clase. En el enunciado entregado a los alumnos, se les pide que expliquen y justifiquen los pasos que han dado

para llegar a la representación algebraica. Los cambios relacionados con la modelación (incorporar implícitamente los pasos) nos sugieren que las profesoras vuelven a destacar la importancia de las actividades de traducción, buscando además la forma de formularla para no caer en instrucciones dirigidas y bajar la demanda cognitiva. Esto manifiesta una profundización de las docentes en relación a la problemática y el propósito de la tarea.

Consideran las representaciones verbal y algebraica, dando mayor protagonismo en el proceso al diagrama. Observaciones aparecidas en uno de los diarios de aprendizaje: “se puede utilizar un método más gráfico para ir trabajando en paralelo a la modelación, en vez de que sean con las preguntas que son muy conductistas”, evidencian la intención de las docentes por buscar una forma de suplir las preguntas por el uso de un modelo real, con el fin de que la enseñanza sea menos dirigida.

La tarea $T_{2.5}$ sufre un cambio importante, sigue en un contexto de edades, pero con un enunciado que las docentes consideran más sencillo que la versión anterior, en el que no hay dos condiciones separadas (triple de edad y diferencia en 30 años), que sugieren emplear un sistema de ecuaciones. Pasa a expresar una relación, que corresponde con una ecuación lineal con dos incógnitas, en forma de igualdad entre edades. Esta nueva versión manifiesta la intención de las docentes por ahorrar dificultades sobre el nivel escolar y el contenido matemático. Sin embargo, puede generar dificultades debidas a la variación simultánea de las dos magnitudes. Si se toma como variables las edades actuales, la ecuación debería ser $x+3=4(y+3)$; si se escribe $x+3=4y$, se estarán utilizando variables relativas a dos momentos diferentes, “ x ” para la edad actual de Rodrigo e “ y ” para la edad del hermano dentro de tres años.

Etapa 2: Realización de la clase

La otra integrante del grupo implementa esta nueva versión de clase, poniendo finalmente en práctica las tareas $T_{1.4}$ y $T_{2.4}$, surgiendo las tareas $T_{1.5}$ y $T_{2.5}$. Una descripción de la tarea $T_{1.5}$ se detalla en la figura 10.

INICIO: Se comparte con los estudiantes el objetivo de la clase, realizando una motivación acerca de la importancia de este y su significado.

Se les hace entrega de una hoja con la siguiente situación multicopiada, la cual puede ser acompañada de un dibujo que lo haga más concreto (se pide a los estudiantes que utilicen lápiz pasta para escribir las ecuaciones en las hojas y que no las borren).

Moisés compra, en el almacén de Don Luis, pan a \$850 el kilogramo ¿cuál (es) la representación algebraica que podría asociarse a la situación?

Explica, justificando los pasos que utilizaste para llegar a dicha representación(es).

En grupos ingresarán la solución a la calculadora TI, destacando los pasos que utilizaron para representarla.

DESARROLLO: Para comparar las ecuaciones se proyectan las soluciones, un integrante de cada grupo debe explicar su solución y los pasos que utilizaron para llegar a dicha representación.

(Como utilizan símbolos que la calculadora no reconoce, se definen las variables utilizando las letras "y", "x". Con ello, se describe que esto describe una función, donde la x es una variable independiente y la y es la variable dependiente).

Se expone el método de diagrama como una herramienta para modelar. Se presentan los rectángulos para reconocer las variables, los óvalos para los datos y los conectores como operaciones.

Con ello los estudiantes crean un diagrama para la situación anterior haciendo uso de la calculadora.

(En el caso de que ningún estudiante pueda explicar el problema, se formularán preguntas guiadas como: ¿qué representa la variable x?, ¿qué representa el valor 950?, etc.).

Se realiza un plenario, en el cual se buscará la relación entre el diagrama y la representación algebraica.

T_{1.4}

CIERRE: Como desafío, los estudiantes realizan un diagrama para la siguiente situación utilizando la calculadora:

"Rodrigo en tres años más tendrá el cuádruple de la edad de su hermano".

A partir del diagrama los estudiantes modelan la situación en la hoja, algunos de los estudiantes expone la proyección de su diagrama justificándolo.

Figura 10. Caracterización de la tarea T_{1.5}

En la realización de la tarea la docente lleva a cabo una forma de interacción no contemplada en la planificación. Solicita a un alumno la lectura del enunciado de la tarea, con propósito de obtener atención del resto de los alumnos. Esta forma de interacción se propuso en el análisis en el primer ciclo de EC, lo que denota que la docente va incorporando en su práctica aportaciones de agentes externos (sugerencias de pares en los ciclos anteriores).

La docente comienza por solicitar a los alumnos que obtengan la representación algebraica individualmente, luego les pide que concuerden en grupos sobre cuál o cuáles son adecuadas y que expliciten los pasos que usaron en su construcción. Finalmente realiza la puesta en común ingresando en las calculadoras la representación algebraica.

Al observar que no hay consenso en la representación algebraica, la docente realiza un cambio en la planificación, introduce el diagrama exponiéndolo en gran grupo. Luego retoma la representación algebraica, dando un margen de tiempo para que los alumnos vuelvan a ingresarlas en la calculadora, las analiza cuidando de estudiar si otro grupo había pensado la misma expresión que el grupo analizado. Esto denota su intención por considerar en su práctica las sugerencias de las formadoras (aportes externos) en el análisis de la clase anterior, sobre una nueva forma de interactuar con sus alumnos.

Por último, modifica el cierre de esta tarea, introduciendo otro tipo de representación, la numérica, que valida la representación algébrica para algunos valores. Cierra la clase preguntando si el diagrama les ayudó a construir dicha representación.

Se presentan dos dificultades no previstas en la planificación: los alumnos no entienden cómo tienen que representar, y cuando se les aclara, dudan sobre qué letra utilizar, si da lo mismo una u otra. La docente aclara esto en el momento a partir de preguntas a los alumnos. Además, la profesora utiliza la palabra “solución” para referirse a la expresión algebraica, pero en el acto observa que puede provocar malentendidos (por emplearse este término matemático para expresar la obtención de datos desconocidos, es decir, la solución de la ecuación) y lo corrige inmediatamente en su discurso. El uso que la docente da a este término fue discutido en sesiones anteriores, por lo que denota su disposición a considerar las sugerencias de formadoras en el uso de términos matemáticos. Las discusiones generadas en el EC van cobrando presencia en la práctica de la profesora.

La segunda tarea de esta clase se describe en la figura 11.

Momento	Descripción
Presentación enunciado	<p>Se construye en la pizarra el diagrama de la relación, mediante un trabajo en gran grupo, preguntando la docente cuántas variables hay, cuáles son los datos, qué relación existe entre ellos.</p> <p>Luego pide a voz alzada cuál es la expresión algebraica, de donde surge inmediatamente la respuesta ($r+3=4x$).</p> <p>Algunos alumnos observan que usaron otras letras. La profesora pregunta si es lo mismo las letras que se usa, y los alumnos observan que lo relevante es la representación</p> <p>Nuevamente la docente pregunta si el diagrama ayudó a representar la situación, a lo que los alumnos responden que sí.</p>
Cierre	<p>La docente se refiere al apoyo del diagrama para construir las representaciones. Posteriormente les pregunta si estaban buscando la solución a la situación, los alumnos observan que no, que solo estaban buscando expresarla.</p> <p>De esta forma la docente cierra la clase enfatizando que el objetivo de la clase era iniciar a la modelización por medio de la representación algebraica, el fin es representar, sin pretender resolver.</p>

Figura 11. Caracterización de la tarea $T_{2.5}$

Se observa que modifica el momento de finalización de la clase, recordando el objetivo previsto, planteando preguntas sobre qué hicieron y sobre la utilidad del diagrama para construir la representación algebraica.

La docente modifica en su docencia varios aspectos. Promueve una discusión en gran grupo sobre la construcción del diagrama y la posterior construcción de la representación algebraica. Prefiere no poner en común el trabajo individual de los alumnos sobre las variables, continuando con la introducción del diagrama. Afronta las confusiones, errores (por ejemplo, respuestas que no responden a la consigna dada), dificultades o indecisiones en sus alumnos con nuevas preguntas para que de ellas surjan las aclaraciones. Se observan otros errores de los alumnos que la docente no parece atender.

Etapa 3: Análisis y revisión

Nuevamente esta etapa se inicia cuando la docente que impartió la clase manifiesta su percepción sobre lo acontecido, reconociendo que ha podido darse cuenta de que su forma de gestionar apresura a sus alumnos. Indica que le molesta el bullicio provocado por el trabajo grupal de los alumnos, lo que puede interpretarse como cierto temor a adoptar nuevas formas de gestionar la clase.

La otra docente del grupo considera que la calculadora provocó ciertas dificultades para comprender los conceptos matemáticos, ya que por ejemplo, TI Navigator visualizaba el signo *, cuando los alumnos ingresaban $850x$. Observa una dificultad que no habían previsto en la planificación sobre la interpretación del enunciado, pues varios grupos pensaron que se les pedía que expresaran el precio de un kilo de pan, observando más aspectos de la clase que los que observaron tras la primera clase realizada.

Advierte que no habían previsto que los alumnos no pudieran elaborar la representación correcta, por lo que tuvieron que tomar decisiones en el acto para abordar dicha situación. De hecho, la docente que imparte la clase explica y construye el diagrama antes de volver a pedir que envíen nuevamente a la calculadora la representación algebraica. Apreciamos que las docentes son conscientes de haber tenido que cambiar aspectos de la planificación con el fin de lograr los objetivos propuestos.

Consideran que el diagrama ayudó a sus alumnos a reconocer las dos incógnitas del problema de la tarea, reconociéndolo como un anclaje para la construcción del modelo matemático, es decir, como modelo real. Esto denota una toma de conciencia del papel del modelo dentro de la modelación. Ante preguntas de las formadoras sobre su intención de utilizar el diagrama en futuras ocasiones, la docente responde que lo utilizará, pues ha visto el efecto que tuvo para la construcción de la representación algebraica. Esta reflexión le da la oportunidad de apreciar que en su práctica habitual tiende a pedir inmediatamente la representación algebraica, sin suministrar elementos de apoyo, habiendo alumnos que no llegan a construirla. Esto muestra que la docente ha tomado conciencia del papel que juegan los elementos intermedios para la construcción de la representación algebraica.

Las docentes aprecian haber realizado cambios en la gestión respecto a la clase anterior realizada, considerando que han reducido el protagonismo del profesor y estimulado la comunicación de los estudiantes, con el propósito de que lleguen al objetivo propuesto sin mayor intervención de la docente. Las formadoras observan que la docente consideró aspectos de gestión sugeridos en el ciclo anterior sobre la conducción de la clase con el fin de ahorrar tiempo y conseguir involucrar a todos los alumnos en las discusiones, solicitando la opinión directa de otros alumnos sobre las respuestas de sus pares.

En esta etapa las docentes van tomando conciencia (fase *a* del proceso reflexivo) de distintos elementos de su planificación, principalmente la forma en que los alumnos interpretan y afrontan las tareas, relacionando este hecho con la formulación de las mismas, así como con la forma en que se implementan. También toman conciencia de la forma en que ellas y los alumnos consideran el recurso tecnológico y sobre la importancia de la forma de gestionar la clase.

Como resultado del proceso, las docentes elaboran nuevas estrategias para abordar el diseño de clase (fase *C* del proceso reflexivo), buscando mejorar la propuesta y solucionar las dificultades que encontraron en la implementación. Ellas consideran que no lograron que sus alumnos describieran los pasos que se les pedía en la primera tarea. También consideran que no se consiguió verificar si se cumplió el objetivo de la clase, quedándose con la sensación de que los alumnos no disponen de estrategias para traducir cualquier enunciado, sino sólo los que se parecen al enunciado puntual planteado. Les parece interesante mantener ciertos elementos, como el trabajo grupal, la puesta en común con las calculadoras, los enunciados verbales y el uso del diagrama.

También pretenden realizar algunos cambios, haciendo la primera puesta en común tras mostrar el diagrama. Primero los alumnos representan algebraicamente, después las docentes exponen las ideas globales de cómo construir un diagrama, a continuación los alumnos construyen el diagrama para el modelo matemático que determinaron, y finalmente, ponen en común empleando los diagramas y las representaciones algebraicas. Este cambio en la gestión manifiesta un momento clave en el proceso reflexivo de las docentes, pues indica que cambian su visión sobre el papel que juegan los diagramas, pasan de usarlo como herramienta para verificar si son correctas las representaciones algebraicas, a usarlo como modelo real que permite llegar al modelo matemático. Esto muestra que las docentes empiezan a ver la planificación y la problemática con mayor profundidad en relación a la enseñanza de la modelación y el diseño de tareas y objetivos de estas.

Por último se plantean no entregar las calculadoras hasta poco antes de la puesta en común, con el fin de que sus alumnos se concentren en la actividad matemática, y sólo la usen durante la puesta en común. Esto muestra que las docentes también atienden a la gestión de recursos, otorgándole mayor importancia a la enseñanza sin uso de tecnología.

En este punto, las formadoras solicitan a las docentes volver a plantearse la planificación de la clase, escribiendo una versión reformulada de la misma, llevándolas a la fase *T* del proceso reflexivo. De esta versión surgen las tareas $T_{1,6}$ y $T_{2,6}$ (figura 12), estando en condiciones de plantear nuevas clases, lo que llevará a nuevos ciclos de reflexión.

$T_{1.6}$
Moisés compra, en el almacén de Don Luis, pan a \$850 el kilogramo. ¿Cuál es la expresión que permita representar la compra del pan?
1° Realizar un diagrama para la situación utilizando la calculadora.
Plenario [Puesta en común].
2° En grupos ingresen la solución a la calculadora TI, destacando los 3 pasos principales que utilizaron para representarla.
<hr/> $T_{2.6}$
Realicen un diagrama para la siguiente situación utilizando la calculadora
Rodrigo en tres años más tendrá el cuádruple de la edad de su hermano
A partir del diagrama los estudiantes modelan la situación en la hoja, algunos de los estudiantes expone la proyección de su diagrama justificándolo.

Figura 12. Plan de clases al finalizar los ciclos

La tecnología pasa a tomar un rol simplificador de la gestión, verificando y comparando las respuestas de los alumnos, pero su presencia o ausencia no perturba la enseñanza de las matemáticas. Las docentes pretenden usar el diagrama (con la calculadora) para la construcción de la representación algebraica.

El enunciado de la tarea $T_{1.7}$ (que procede de la tarea $T_{1.0}$) sufre varios cambios, en concreto ahora se inicia con la construcción del diagrama por los alumnos, como medio para obtener la representación algebraica. Las profesoras manifiestan la necesidad de emplear elementos secundarios e intermedios como parte esencial para obtener la representación algebraica. Es decir, esta versión de la tarea explicita los pasos de la modelación, en la formulación de la tarea, lo que sugiere una profundización de las docentes en su problemática, una mayor precisión en la formulación de la tarea y una mayor coherencia con su propósito.

Se vuelven a producir cambios en las preguntas que completan los enunciados verbales de la tarea $T_{1.7}$. Se pasa de preguntar “¿Cuál es la representación algebraica que podría asociarse a la situación?”, a “¿Cuál es la expresión que permite representar la compra del pan?”. Con esto parece que las docentes aprecian una consigna más específica, tratando de orientar la atención de los alumnos a la variable dependiente del enunciado (el precio de la compra). Vuelven a usar “expresión” en vez de “representación” (como utilizaban en versiones anteriores), pero con el fin de hacer notar a sus alumnos que lo que se ingresa en la calculadora es una expresión. Es decir, el término “expresión”, lo usan con intención de “completar” en la calculadora la instrucción “ $f(x)=\dots$ ”, por lo que deben ingresar una expresión, en este caso $40x$. Mantienen la petición de que indiquen los pasos para encontrar la representación algebraica, aunque de forma menos imperativa, otorgando mayor coherencia al propósito de la tarea y la problemática del grupo.

Lo más significativo es el cambio de estrategia respecto al uso de representaciones, es decir, pedir que trabajen con el diagrama antes de encontrar la representación algebraica, que da mayor racionalidad a la tarea, apuntando más a la problemática del grupo. Es una tarea que considera un objetivo de aprendizaje correspondiente con el propósito de la problemática del grupo, el contenido establecido en este nivel escolar acorde con la tecnología a emplear y, prevé limitaciones de aprendizaje en su formulación al considerar un consenso de respuestas. Por su parte, la tarea $T_{2.7}$ (que procede de la tarea $T_{2.1}$) no sufre cambios.

En esta fase las profesoras toman una postura más crítica frente a sus planificaciones, considerando elementos matemáticos como el de modelación, reflejado en sus respuestas a la pregunta dada en el informe final ¿Cómo evaluo mi proceso en el segundo ciclo reflexivo? También han apreciado que el profesor tiene que reestructurar la planificación cuantas veces sea necesario con ese propósito. Indican el valor que ha tenido el análisis didáctico para la consecución de la meta. Realzan la importancia de considerar un modelo real para encontrar el modelo matemático.

En la última sesión del curso formativo, las docentes exponen los cambios realizados en esta nueva versión de planificación, indicando cómo han mejorado la redacción de la primera tarea y cambiado las formas de interacción en relación a las representaciones (pasando de la primera puesta en común a hacerlo después de mostrar el diagrama). Manifiestan que mantendrán el trabajo grupal, la puesta en común con las calculadoras y los enunciados de los problemas que aparecen en las tareas, así como el uso de diagrama. Además expresan su problemática como “iniciar a la modelación por medio de la representación algebraica”. Así finaliza el último ciclo de EC.

Conclusiones

En el primer ciclo de EC, las docentes diseñan una clase, iniciando el proceso reflexivo, considerando tres momentos claves: inicio (como la activación de los conocimientos previos), desarrollo y cierre. La práctica provoca interés en los docentes por mejorar sus propuestas de clases. La realización de la clase (la práctica) que trae consigo el EC favorece al grupo observar el papel funcional del álgebra, por ejemplo, al iniciar la clase preguntando a los alumnos qué es modelar. Modifican así el inicio de clase, presentando ideas sobre modelación y su papel en el álgebra. La fase L se destaca con claridad en este ciclo, por el componente “práctica” que en él se presenta, lo que hace que las discusiones se centren sobre el análisis de la clase implementada, dando ocasión para mirar hacia atrás y justificando las decisiones adoptadas, tanto al diseñar la clase, como en su implementación. Durante la fase L se percibe la reflexión en la acción (Schön, 1983) de la docente, que le lleva a variar el momento en qué introduce la representación gráfica y las tablas, optando por utilizar las tablas como modelo real para apoyar a los alumnos en la construcción de modelo matemático. La realización y análisis de la clase facilita también una toma de conciencia en el grupo, de los elementos que componen su planificación, observando con

mayor detenimiento el propósito de la clase y el rol que toman la tecnología, la estructura conceptual y las representaciones seleccionadas, para el logro del objetivo. Las docentes terminan el ciclo de EC proponiendo una clase donde cambian la estructura conceptual de la primera tarea y consideran un momento inicial en el que introducen ideas sobre qué es modelar.

El segundo ciclo es más interesante. En él la práctica tiene una mayor presencia, especialmente por suponer la segunda ocasión en que se implementa la clase, una vez se reformula tras apreciar su funcionamiento en el ciclo anterior. Se inicia con la planificación de la clase, reformulada en el ciclo anterior. Tienen mayor interés en mejorar la práctica, tomando conciencia de que deben profundizar en el concepto de modelación, y redefinen su problemática en términos de la iniciación a esta. La presencia de la práctica en la fase "a", le da realce, apreciándose la reflexión en la acción (Schön, 1983) de la docente, por ejemplo, cuando toma decisiones sobre cómo continuar la clase, variar algún aspecto previsto de la gestión (forma de agrupar los alumnos, interacciones), y en el cuidado por emplear un vocabulario matemático preciso. En esta fase, el análisis de la clase provoca que las docentes observen el papel que juega un modelo real para llegar a un modelo matemático, otorgándole mayor protagonismo al uso de diagramas para tal efecto. Resulta un momento relevante en el proceso formativo la toma de conciencia del papel del modelo real para determinar el modelo matemático en la traducción del lenguaje verbal al algebraico. A ello colabora la introducción del análisis didáctico como herramienta para realizar un diseño sistemático de la clase. Este análisis lleva a las docentes a tomar conciencia de la importancia de las estructuras conceptuales puestas en juego en las tareas planteadas, así como la importancia del papel de las diferentes formas de representación.

En resumen, hemos apreciado que en este último ciclo de EC se han marcado con mayor claridad la generación de las fases de reflexión, especialmente por la diversidad de aspectos sobre los que se ha producido la mirada hacia atrás, pero preferentemente la toma de conciencia, favorecida por los referentes empleados, en especial poner en práctica la clase y llevar a cabo su análisis posterior como momentos claves del EC.

Una mirada global de los dos ciclos de EC nos permite apreciar el papel que juega esta herramienta en relación a la reflexión, en donde la práctica fue fuente importante para la toma de decisiones, para aclarar puntos importantes, poder mirar hacia atrás las situaciones problemas, y, especialmente, relacionar la teoría con la práctica. La selección, análisis y diseño de tareas por los profesores en el contexto del EC ha constituido el hilo conductor que ha regido al curso. La identificación de la enseñanza con la puesta en práctica de una secuencia de tareas permitió abordar actuaciones prácticas del profesor en ámbitos relativos a la reflexión: para la acción, durante la acción y sobre la acción (Schön, 1983). La reflexión para la acción se afronta mediante la práctica del diseño de clase, como un referente importante.

Los debates entre pares generados por el EC se han establecido a partir de los criterios que les suministra la experiencia práctica, y tomando como referentes la viabilidad de implementar tareas. De esta forma se ha puesto en marcha la reflexión sobre la acción, compartida por otros observadores, lo que facilita la clarificación de principios de actu-

acción, tanto los implícitos (detectados por sus compañeros), como los explícitos, exigidos en los debates para argumentar las decisiones adoptadas durante la acción. Durante estos debates aparecieron de manera más precisa las variaciones que sufren las tareas cuando se está en situación de enseñanza. Se pone de manifiesto la reflexión en la acción, examinando el grado de fundamentación de las decisiones adoptadas, y el peso que en ellas tiene el conocimiento trabajado durante las sesiones del curso formativo. La continua interrelación entre teoría y práctica es una característica esencial del enfoque realista propuesto por Korthagen (2011) para la formación del profesorado y se ha favorecido aplicando la metodología del EC.

En síntesis, observamos la complementariedad entre el EC y la reflexión, ya que el EC aporta una metodología de intervención con los profesores que favorece fijar la atención en la práctica, por medio de un trabajo colaborativo, contribuyendo con ello a potenciar el trabajo reflexivo de los profesores.

Notas

- ¹ En el sentido de cómo o cuándo se favorece la relación entre estrategia de perfeccionamiento, mejoramiento de la práctica y aprendizaje de estudiantes.
- ² Si bien Korthagen (2011) emplea la sigla ALACT, nosotros empleamos la sigla ALaCT para evitar confusión entre la primera y tercera fase.
- ³ A estas llamaremos “tareas” para agilizar la lectura, haciendo distinción de las tareas propuestas por las formadoras, las cuales llamaremos tareas formadoras.
- ⁴ Las formadoras son las profesoras a cargo del curso, para hacer distinción de los profesores y profesoras participantes del curso.
- ⁵ Un software que permite interactuar con los alumnos a partir de las calculadoras
- ⁶ A pesar que no explicitan los enunciados verbales de las cuestiones matemáticas, hemos considerado este planteamiento como formulación de tareas, pues contienen elementos diferenciadores que posteriormente vuelven proponer las docentes.

Referencias

- Álsina, À., Busquets, O., Esteve, O., & Torra, M. (2006). La reflexió sobre la pròpia pràctica: una eina per a progressar en l'ensenyament de les matemàtiques. *Biaix, Revista de la Federació Catalana d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques*, 25, 37-43.
- Barber, M., & Mourshed, M. (2007). *How the world's best performing systems came out on top*. London: McKinsey & Co.
- Callejo, M. L., Llinares, S., & Valls, J. (2007). El uso de videoclips para una práctica reflexiva. In *Acta de XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas-JAEM*, Julio de 2007, Granada.

- Cortés, F., Taut, S., Santelices, V., & Lagos, M. J. (2011). Formación continua en profesores y la experiencia de los Planes de Superación Profesional (PSP) en Chile: Fortalezas y debilidades a la luz de la evidencia internacional. *Paper presentado en el segundo encuentro anual de la Asociación Chilena de Políticas Públicas*, 19 enero 2011, Santiago, Chile.
- Dewey, J. D. (1910). *How we think*. Boston, MA: D.C. Heath.
- Elliot, J. (2004). Using research to improve practice: the notion of evidence-based practice. In C. Day & J. Sachs (Eds.), *International handbook of the continuing professional development of teachers* (pp. 264-290). Milton Keynes: Open University Press.
- Elipane, L. (2011). Incorporating lesson study in pre-service mathematics teacher education. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 257-282). Ankara, Turkey: PME.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.
- Flores, P. (2005). Papel del análisis didáctico en el desarrollo de competencias profesionales del profesor de matemáticas. Trabajo presentado en *Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico*, Málaga, España.
- Hernández, R., Fernández C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Isoda, A., Arcavi, A., & Mena A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Korthagen, F. A. (2011). Making teacher education relevant for practice: The pedagogy of realistic teacher education. *Orbis scholae*, 5(2), 31-50.
- MINEDUC (2014). *Resultados de la evaluación docente*. Consultado el 15 de octubre 2016 en http://www.docentemas.cl/docs/Resultados_Evaluacion_Docente_2014.pdf.
- Miranda, C. (2008). Revalidación de constructo índice de calidad del aprendizaje profesional. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 34(2), 137-149.
- Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais. In J.P da Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp.343-358). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua*. Tesis doctoral: Universidad de Granada. Granada, España.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.
- Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in Mathematics Teachers Education. The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematics education and development of teachers. In F.K. Jr. Lester (Ed.), *Second handbook on research on mathematical teaching and learning* (pp. 157-224). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Taut, S. (2015). ¿Cómo se relacionan los resultados de la Evaluación Docente con el aprendizaje que alcanzan los estudiantes de profesores evaluados? *Midevidencias*, 2, 1-7.