Investigación narrativa en didáctica de las Matemáticas: microrrelatos en torno al infinito

Narrative research in didactics of Mathematics: short stories in the context of infinity

Juan Antonio Prieto Sánchez
Universidad de Cádiz, España
juanantonioprieto@uca.es

Francisco Moreno-Pino
Universidad de Cádiz, España
franciscomanuel.moreno@uca.es

Antonio Ángel Guerrero Bey
Universidad de Cádiz, España
antonio.bey@uca.es

Catalina Fernández Escalona
Universidad de Málaga, España
cfernandez@uma.es

Resumen. El objetivo del presente artículo es explicar como la investigación narrativa y la creación de microrrelatos, mediante una experiencia física, facilitó que los alumnos de educación secundaria (12 a 16 años) elaboraran respuestas categóricas en el estudio del infinito actual como identidad cardinal. La investigación narrativa se puede utilizar en un triple sentido: el fenómeno que se investiga (como resultado escrito o hablado), el método de la investigación (como forma de construir y analizar los fenómenos narrativos) y el uso que se pueda hacer de la narrativa con diferentes fines (formativo, proceso de reflexión, cambio, innovación, mejora,…). De todo ello, es la narrativa un modo básico de pensamiento, de organizar el conocimiento y la realidad donde la experiencia humana vivida es enunciada a través de un relato. Para nosotros ha sido un nuevo procedimiento de análisis con dos pretensiones: extraer más información de estas entrevistas cuando se tuvieron que escribir como relatos cortos; y, por otro lado, hemos intentado innovar la investigación narrativa en el campo de investigación de la didáctica de la matemática. En nuestro estudio, favoreció la categorización en cinco estados diferentes, de menos a más evolucionado.

Palabras-clave: investigación narrativa; matemática; relato; estudiante de secundaria; infinito.

Abstract. The aim of this article is to explain how the narrative research and the creation of short stories, using a physical experience, helped secondary school students (12 to 16 years old) to elaborate category answers while studying the actual infinity as a cardinal identity. The narrative investigation can be used, at least, with a triple sense: the phenomenon investigated (as a written or spoken result), the method of investigation (as a mean to construct or analyse the narrative phenomenon) and the use of narrative with different purposes (educational, reflection process, change, innovation improvement…). Therefore, narrative is a basic method of thinking, organizing the knowledge, and the reality where human experience is formulated through a short story. This new analysis procedure has allowed us to extract more information from these interviews since they had to be written in the form of short stories. Similarly, we have tried to innovate narrative research into the field of mathematic didactics. Our study favored the categorization of five different states, from less to more evolved.

Keywords: narrative research; mathematics; short story; secondary school student; infinity.

(Recebido em janeiro de 2017, aceite para publicação em maio de 2018)

Introducción

En un estudio epistemológico realizado, centramos nuestra atención en la noción del infinito actual en el periodo crítico de la fundamentación de las matemáticas que se origina con los trabajos de Bolzano, precursor de la actualización del infinito, y a partir de éste, los trabajos de Cantor y posteriormente los de Russell.

Entre Bolzano y Cantor, hay diferencias esenciales en tanto a las teorías de conjuntos que exponen para llegar a definir el concepto del infinito. Es esto último lo que fijamos la atención. Mientras que la comparación y correspondencia que hace Cantor (uno-a-uno) es de exclusión (compara el conjunto de números naturales que es infinito numerable con otros conjuntos), la relación en Bolzano es de inclusión enfatizando la relación parte-todo, estableciendo una comparación dentro del propio conjunto.

El criterio de Bolzano es el que nos basaremos en nuestro presente estudio. Tal como argumenta Waldegg (2005) sobre ello, es este criterio más intuitivo puesto que es más cercano a experiencias concretas (finitas) y además menos paradójico. De ahí el estudio que realizarán Moreno y Waldegg (1991), analizando las dos primeras etapas de la triada piagetiana (intra- e inter-) en la evolución conceptual del término, con los trabajos de Bolzano y Cantor. En el mismo trabajo mostraron las dificultades por los estudiantes para lograr estas etapas dadas en la estructura curricular.

Con la ayuda de la investigación narrativa hemos podido analizar las entrevistas realizadas a los alumnos de secundaria (cursos académicos que se realizan ordinariamente entre los 12 y 16 años de edad), utilizando para ello microrrelatos para poder categorizar esas respuestas. El objetivo del presente artículo es explicar como la investigación narrativa y la creación de microrrelatos, mediante una experiencia física, facilitó que los alumnos de educación secundaria elaboraran respuestas categóricas en el estudio del infinito actual como identidad cardinal.

Marco Teórico

El infinito actual con la comparación de conjuntos en Bolzano

La forma de abordar el concepto de infinito en Bolzano, tal como lo hace también Cantor, es con la noción de conjunto. Diferencia los siguientes términos de agregado, conjunto y multitud, antes de definir conjuntos finitos. A partir de éstos, definirá el conjunto infinito para, posteriormente, ver la posibilidad de recapacitar al infinito actual como calificativo y no como sustantivo de algunas colecciones:

- Define agregado, como todo compuesto de elementos bien definidos. Especifica que hay agregados que coinciden, es decir, poseen los mismos miembros y, a su vez, se diferencian en algunos aspectos (a esas diferencias las llamó esenciales).
- Llama conjuntos a aquellos agregados en los que es indiferente la forma de combinación y cuyas permutaciones no causan cambios fundamentales. Puntualiza que un conjunto es un agregado que muestra cierta característica de la cual se prescinde.
- Por último describe *multitudes* a partir de esta última definición, como aquellos conjuntos cuyos miembros son individuos que pertenecen a una misma especie.

Aclarado estos términos, define conjuntos finitos mediante la siguiente proposición:

> Pensemos en una serie cuyo término es un elemento del tipo A, en la que todo sucesor se deriva de su predecesor, de tal manera que, tomando un objeto igual a él lo relacionamos con otro elemento del tipo A en una suma. Es entonces evidente que todos los términos que aparecen en esta serie –con excepción del primero que es únicamente un elemento del tipo A – serán multiplicidades a las que llamaré *finitas* o *numerables* o, de manera algo audaz: números y, más específicamente, números enteros (que incluirían el primer término). (Bolzano, 1851/1991, p. 43).

Es una construcción inductiva del conjunto de los números naturales: a partir del 1 y utilizando el término de “sucesor” (cada elemento del conjunto se crea como una multitud finita es decir, cada número será formado por unidades mediante un proceso bien establecido). Nos ha proporcionado modelos de colecciones finitas.

A partir del concepto conjunto finito, Bolzano define conjunto infinito:

> En particular, puede haber tantos términos que si la serie ha de agotar (incluir a) todos los elementos, no puede tener un *último término*, (…) Suponiendo esto por el momento, llamaré *infinita* a una multiplicidad si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella. (Bolzano, 1851/1991, p. 44).

Observamos que la forma de definir infinito no es la que tradicionalmente se estuvo haciendo como la negación de lo finito, aunque en su introducción menciona lo infinito como lo que contrapone a lo finito. El infinito es un atributo de los conjuntos y definen éstos a partir de conjunto finito. El infinito actual no puede existir sino como un atributo de una colección infinita (Fuenlabrada, 2008).

En el párrafo que sigue es donde Bolzano atribuye el concepto de infinito actual a una multitud, no ve la posibilidad de recapacitar el infinito como sustantivo sino como calificativo de algunas colecciones. Suprime la manera de pensar en el infinito como sinónimo de no acotado o como valor que crece sin límite:

> Una cantidad verdaderamente infinita (…) no necesariamente variable (…). Por otra parte, una cantidad que solamente puede ser considerada como algo que es siempre mayor que cualquier cantidad (finita) dada, es capaz de conservar su carácter de cantidad finita, tal y como ocurre con las cantidades numéricas 1, 2, 3, 4, …. (Bolzano, 1851/1991, p.45)

En el siguiente párrafo, Bolzano, discute de forma objetiva la existencia de conjuntos infinitos:

> Una vez que nos hemos puesto de acuerdo en cuanto al concepto que queremos asociar con la palabra *infinito* y tras haber distinguido claramente sus partes constitutivas, se plantea como siguiente problema la cuestión de su objetividad, la pregunta de si tiene o no una existencia objetiva. (…) Me atrevo a decir que la respuesta es definitivamente *afirmativa* (…) *El conjunto de las proposiciones* y de las verdades en si es claramente infinito. (Bolzano, 1851/1991, p. 50).

Utiliza, de nuevo, el método inductivo para la construcción de conjuntos infinitos. Establece una comparación biunívoca entre tal conjunto infinito y el conjunto de números enteros y de ahí demuestra que el conjunto así construido es infinito:

> Porque cuando consideramos una verdad cualquiera A (por ejemplo, la proposición “existen verdades” o cualquier otra) descubrimos que la proposición expresada por la frase “A es verdadera” y es algo distinto a la proposición A misma, pues, obviamente, el sujeto de ambas es diferente: el sujeto de ella misma. De manera análoga a como derivamos a partir de A una proposición distinta B podemos, a partir de ésta, obtener otra proposición C, diferente tanto de A como de B y así sucesivamente en un proceso sin fin.

> (…) si fijamos nuestra atención en una verdad cualquiera tomada al azar, digamos la proposición "existen verdades", la llamamos A, encontramos que la proposición compuesta por las palabras "A es verdadera" es distinta de la proposición A, puesto que A es el sujeto de la nueva proposición. A la nueva proposición la llamamos B. A continuación podemos formar la proposición "B es verdadera" y continuar de este modo generando una lista de proposiciones sin fin (…)
>
> Esta analogía, existente entre la serie de estas proposiciones, obtenida con la ley de construcciones enunciada, y la serie de los números del párrafo p. 43, consiste, en realidad, en que para cada elemento de la serie de los números existe un elemento correspondiente en la serie de las proposiciones descrita; y por tanto, en que para cualquier número entero (…) existe un número igual de proposiciones distintas entre sí. Por último, en que podemos continuar indefinidamente el proceso de construcción de proposiciones, siendo posible siempre generar nuevas proposiciones (…) De todo ello se sigue que el agregado de todas las proposiciones mencionadas posee una multiplicidad que supera cualquier número; es decir, que la multiplicidad de ese agregado es infinita. (Bolzano, 1851/1991, pp.50-51)

Bolzano concluye con el párrafo anterior que el conjunto de los números enteros es infinito y por tanto la existencia de éstos:

> Considero suficiente la exposición y defensa que aquí se ha hecho de que existen los conjuntos infinitos; por lo menos los de objetos que no tienen realidad; en particular, el conjunto de todas las verdaderas absolutas es infinito. (…) podemos aceptar que el conjunto de *todos los números* (de los llamados naturales o enteros (…) es también infinito. (Bolzano, 1851/1991, p.57)

De forma esquemática resumimos las dos posibles interpretaciones en la Figura 1.

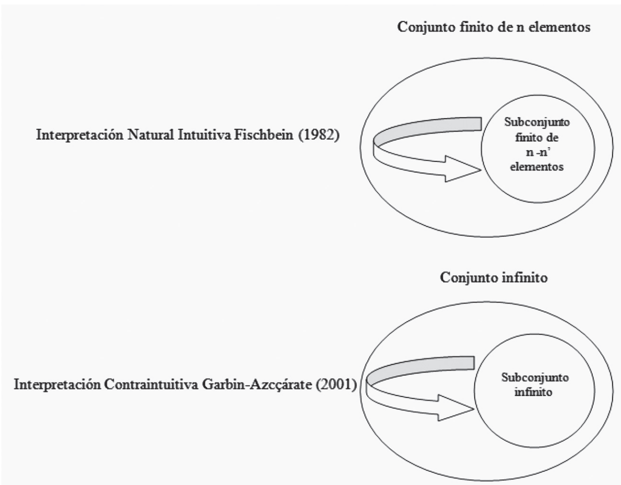


Figura1. Esquema comparación de conjuntos mediante el método de inclusión de Bolzano

Relación de la etapa intra-objetal piagetiana con la conceptualización del infinito actual en Bolzano

La conceptualización en Bolzano se estableció mediante la comparación de conjuntos infinitos en función de dos criterios de comparación: por un lado con la correspondencia uno-a-uno y la relación parte-todo. De estos dos, Bolzano enfatizó en este último, basándose en las relaciones de inclusión.

Esta primera etapa, intra-objetal, es en el marco de trabajo piagetiano donde argumenta la validez para extraer conclusiones de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su propia historia (Piaget & García, 1982).

Moreno y Waldegg (1991) justifican las relaciones conjuntistas dadas por Bolzano, y consideran que son relaciones de tipo intra-objetal, en varios puntos:

a. Bolzano, facilitó una definición para la comparación entre conjuntos infinitos como el predecesor directo para el establecimiento de funciones uno-a-uno caracterizado por Cantor, pero esta comparación no da origen a transformaciones, al no definir operaciones conjuntistas que originen un nuevo conjunto.

b. Los criterios de comprobación son su mayor parte empíricos.

c. No existe evidencia de conservación, entendido en el sentido piagetiano.

d. Si existe evidencia de un cierto grado de transitividad en las relaciones utilizadas por Bolzano para la comparación, no obstante, hay que puntualizar, que son limitadas.

Si comparamos los enfoques de Bolzano y Cantor, la diferencia principal se puede manifestar en términos del objeto del estudio y en sus aspectos donde se centraliza la atención:

- Si para Bolzano su foco de atención se encontraba en cada uno de los conjuntos infinitos y era dentro de ellos donde se podría constituir sus comparaciones, para Cantor se basaba su criterio de comparación en la relación biyectiva entre los conjuntos distintos que comparaba.
- Si para Bolzano el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto, aquellos que atañen a sus subconjuntos infinitos propios, y de ahí que no pudo fragmentar conjunto para comparar al conjunto con su subconjunto ya que la naturaleza misma estaba en la inclusión misma, para Cantor se encontraba en las relaciones que se podrían constituir entre los diferentes conjuntos.
- Mientras la delimitación del objeto de estudio lo alcanza Bolzano con el concepto de conjunto, Cantor lo demarcará en las relaciones.

Por todo ello, Bolzano muestra características de la etapa intra-objetal y Cantor de la etapa inter-objetal del desarrollo histórico del concepto.

Uso de la experiencia física en nuestro trabajo

Consideremos un espejo y situemos un objeto *O* a una distancia *a* del pie del mismo. La imagen que se produce *O'*, estará situada a una distancia *a* del pie del espejo, que lo representamos en la Figura 2:

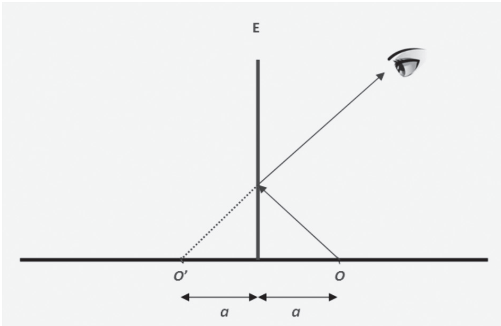


Figura 2. Reflexión de un objeto en un espejo

Supongamos ahora, dos espejos planos y paralelos, E1 y E2, cuyas caras reflectoras están orientadas hacia el objeto que se encuentra entre ambos. Situemos un observador entre ellos hacia *A*. Éste verá un número de imágenes tanto mayor cuanto más largos sean los espejos (ver figura 3):

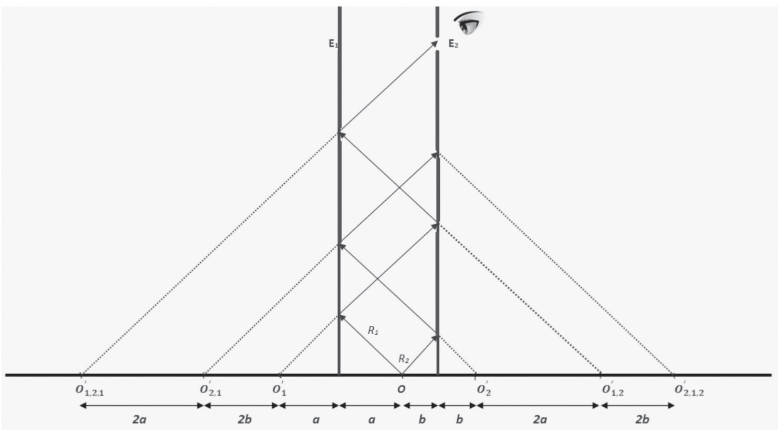


Figura 3. Reflexión de un objeto en dos espejos paralelos

Pretendemos utilizar los dos fenómenos de reflexión, detallados en el apartado anterior, en experiencias con los alumnos para indagar en ellos el cardinal infinito mediante la misma posición de Bolzano; donde el foco de estudio era la comparación dentro del mismo conjunto y mediante una relación de inclusión. Queremos desde su inicio que esta experiencia sea constructiva inductiva, el proceso que se sigue en la entrevista ayuda a ello.

Metodología

Entrevistas y tareas

De acuerdo con los propósitos de la investigación tomamos como referencia la población de escolares correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Por razones de tamaño y teniendo en cuenta los propósitos limitados de la investigación, decidimos elegir una muestra que tuviera una cierta representatividad con respecto a la población mencionada. Todo ello se justifica sobre la base de los siguientes motivos: para este estudio cualitativo nos interesa cotejar los resultados de alumnos de distintos cursos y que hayan seguido procesos de enseñanza tanto iguales como distintos (unidades paralelas, adaptaciones significativas y no significativas, programa de diversificación curricular, alumnos con altas capacidades). Esta semejanza o diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje no es determinante para nuestro trabajo, pero puede ser un factor a tener en cuenta para la interpretación de nuestro trabajo. Nuestro propósito es realizar un estudio transversal. En ninguno de los casos, nuestro estudio no tiene la intención de generalizar resultados.

En definitiva se elige un solo centro escolar con la intención que todos los alumnos tengan similares características y así, no pueda haber diferencias significativas en los resultados según el medio sociocultural, urbano o rural, y según el tipo de enseñanza, pública o privada.

El sistema de elección es mediante un sorteo de veinte alumnos por curso. Una vez realizado este proceso, son reunidos en el salón de acto y se les comenta la naturaleza del estudio y en que va a consistir éste. Al finalizar este encuentro, se le entrega a cada alumno un modelo de autorización paterna que debería cumplimentar el padre, la madre o el tutor/a de los menores de 16 años, de acuerdo con la legislación respecto al tratamiento de las imágenes de alumnos menores de dieciséis años.

Una vez acabado el plazo, una semana después de esta reunión, y aclaradas las dudas de algunos familiares respecto a la forma en que se iban a realizar las 69 entrevistas. Se trata de una entrevista semiestructurada y por ello es necesario especificar en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Fernández, 2001). Por tanto exponemos a continuación el objetivo pretendido, el desarrollo de la entrevista, así como los aspectos a observar en el conjunto de la prueba. Son dos las tareas que se le propone al alumno:

Tarea asociada al cardinal finito

Con un solo espejo (Figura 4) se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que cuenten, éstas y las reflejadas en el único espejo (pregunta A).

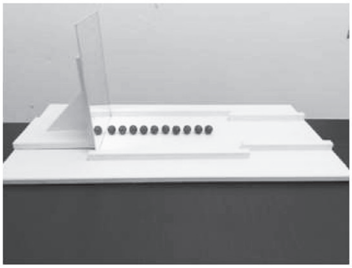
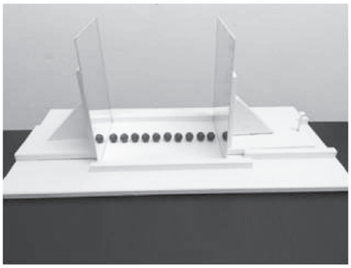


Figura 4. Cardinal finito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar (pregunta B). Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola (pregunta A-B).

Tarea asociada al cardinal infinito

Con los dos espejos ya enfrentados y paralelos (Figura 5), se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que las cuenten, éstas y las reflejadas en los dos espejos (pregunta C).



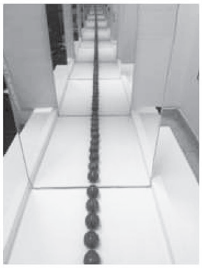


Figura 5. Cardinal infinito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar (pregunta D). Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola (pregunta C-D).

Con estas dos tareas se pretende estudiar la cardinalidad infinita según modelo Bolzano de comparación de conjunto en uno mismo mediante el método de inclusión, en los estudiantes de secundaria. La primera tarea, la del cardinal finito, está propuesta para que el alumno, de una forma constructiva e inductiva, empiece a inferir lo que posteriormente se les preguntará, sí tienen o no las mismas cantidades.

Análisis de respuestas con los microrrelatos

Nos ha facilitado nuestro análisis de respuestas y su categorización por estados, la realización de microrrelatos de casos específicos. Para nosotros ha sido un nuevo procedimiento de análisis con dos pretensiones: extraer más información de las entrevistas semiestructuradas realizadas y plasmarla narrativamente, y por otro lado, hemos innovado la investigación narrativa en el campo de investigación de didáctica de la matemática. Se adjunta a este artículo cinco microrrelatos, uno por cada estado que hemos podido categorizar.

La investigación narrativa

Para Bolívar, Domingo y Fernández (2001), considera la investigación narrativa en el ámbito educativo no sólo una metodología específica de recogida y análisis de datos sino de en un área más amplia según determinadas orientaciones y posiciones actuales del pensamiento. Esto último hace que se constituya como un enfoque propio del ámbito educativo, disponiéndose como una forma de reflexión tanto oral como escrita que usa la experiencia personal en su dimensión temporal. Los mismos autores puntualizan que puede ser comprendida dentro de la investigación cualitativa en concreto como investigación experimental.

Connelly y Clandinin (1995), señalan que, al menos, la narrativa se puede utilizar en un triple sentido: el fenómeno que se investiga (como resultado escrito o hablado); el método de la investigación (como forma de construir y analizar los fenómenos narrativos); el uso que se pueda hacer de la narrativa con diferentes fines (formativo, proceso de reflexión, cambio, innovación, mejora,…). De todo ello, es la narrativa un modo básico de pensamiento, de organizar el conocimiento y la realidad (Bolívar et al., 2001); considerándose como un tipo específico de discurso consistente en una narración, donde la experiencia humana vivida es enunciada a través de un relato (Connelly & Clandinin, 1995).

Es en la metodología donde la investigación narrativa toma el proceso de recogida de información a través de los relatos y donde las fuentes de construcción de los relatos son las propias entrevistas. Este tipo de investigación hace referencia a dos posiciones básicas bien diferenciadas en el análisis de las narraciones: la del investigador como analista de relatos que realiza un análisis de la narración y piensa *sobre* los relatos, y la del investigador como relator de historias que realiza un análisis narrativo y piensa *con* los relatos (Satriano & Marques, 2015).

La labor del investigador como analista de relatos, se puede sintetizar en los siguientes puntos:

- Realiza un análisis de las narraciones con el propósito de explorar ciertas características de contenido o estructura de los relatos.
- El proceso de análisis se realiza pensando *sobre* las historias.
- Adopta una postura estrictamente metodológica porque entiende el análisis sólo desde una perspectiva técnica.
- Reduce los contenidos y los desagrega con la idea de obtener patrones, categorías o temas.

Para la segunda posición, el trabajo del investigador como relator de historias en los siguientes puntos:

- Revela un tipo de investigación y análisis en el que el producto es el propio relato.
- El énfasis está puesto en las técnicas narrativas.
- Las historias son la unidad de análisis y que sirven para interpretar y dar sentido al mundo.
- El investigador participa del momento en que se está contando la historia, por lo tanto forma parte del proceso.
- Esto implica pensar *con* los relatos y no sobre ellos, así como una implicación desde dentro y no un análisis desde fuera.

Análisis de datos

Una vez realizadas las entrevistas hemos podido categorizar la respuesta final de los alumnos en cinco estados diferentes, de menos a más evolucionado, y resumida en la Tabla 1. Aunque se entrevistaron a los 69 alumnos, se eligió en cada uno de los cinco estados la entrevista de un alumno para escribir su correspondiente microrrelato y así evidenciar su situación estatutaria.

Tabla 1. Categorización de las respuestas en el proceso infinito

Estados	Descripción
Finitista elemental	Alumnos que quitando una, la cantidad final es ya menor que la inicial.
Finitista complejo	Alumnos que quitando una y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial.
In-finitista	Alumnos que consideran el infinito con propiedades de lo finito
Potencialista	Alumnos que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual.
Actualista	Alumnos que razonan la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito actual.

Los términos aquí empleados, finitista e infinitista, así como potencialista y actualista son usados por Garbin y Azcárate (2002, p.94).

Microrrelatos

Para facilitar el seguimiento de los microrrelatos, hemos visto oportuno realizar una estructura esquematizada en el siguiente gráfico cronológico de las entrevistas. Para aclarar definiremos los diferentes términos que aparecen (ver Figura 6):

Preámbulo: Corresponde al espacio temporal antes de ser entrevistado. Creemos oportuno saber y describir en los microrrelatos en qué situación está el alumno antes de entrevistarlo. Además de su personalidad, su estado de ánimo y otras características.

Escenas: Son dos diferentes según el objeto del estudio se quiera realiza finitistas, si lo que indagamos con el alumno es si entienden el cardinal finito e infinitista si lo que queremos analizar es la aceptación o no infinito actual como identidad cardinal. Cada una de estas dos escenas podemos distinguir tres fases: *Inicial*, cuando se le hace la primera pregunta, A o C según escena, de cuántas bolas ve en la plataforma incluidas las reflejadas en los espejos; *Intermedia*, correspondiente al momento que se le dice que respondan a las preguntas B o D según escena, cuando le pide que quite una de las bolas y que explique qué es lo que observa; *Final*, donde el alumno se le pide que explique si hay la misma cantidad de bolas antes y después de haber sustraído una de ellas.

Desenlace: Momento que le corresponde al entrevistador-investigador de analizar y extraer conclusiones de todo este proceso.

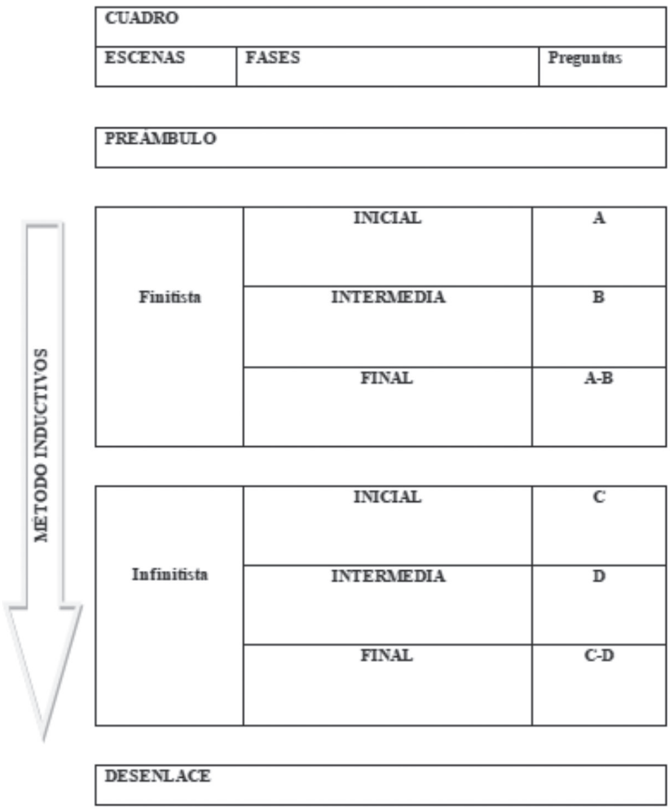


Figura 6. Gráfico cronológico de la entrevista

Microrrelato 1: finitista elemental

Sujeto 1

Los preámbulos

Lo que más caracteriza al sujeto 1 es su personalidad introvertida. Exceptuando las matemáticas, en todas las demás asignatura lo lleva bastante bien. Con quince años, no eligió ninguna de ciencias en 4.º de ESO. Comentó en su momento, evidentemente de forma reservada a su tutor, que su formación futura académica sería en letras.

Fue el primero entre los entrevistados de ese día. Me esperó en el sillón que hay en frente de mi despacho. Su cara inexpresiva y con su voz ronca me dio los buenos días.

Escena finitista. Me mira fijamente mientras le hago la pregunta de cuantas bolitas hay sumado a los que se refleja en el espejo. Tras pensar varios segundos mordisqueando los carrillos internos de su boca, contesta, "veinte". No me mirará en toda la entrevista. Su mirada se perderá en algún lugar del despacho. Me responde la segunda pregunta, "dieciocho" y con un "no", termina este primer acto refiriéndose si tienen o no la misma cantidad.

Escena infinitista. Me seguirá evitando con su mirada durante este segundo acto. A la primera pregunta que le hago, de nuevo como si fuera un telegrama, me dice que "mucha". Le quita una de ellas, y después de mover la plataforma me responde que no hay la misma cantidad "porque le he quitado una".

Desenlace

Apenas ha habido diferencia entre las intuiciones primarias y secundarias, en el sujeto 1. El aporte pedagógico que le hemos ofrecido para caracterizar las dos escenas e intentar relacionarla, ha sido insuficiente para dar una respuesta positiva en la aceptación del infinito potencial. La respuesta que da como "muchas bolas" nos hace reflexionar que el infinito como proceso para él no es concebidle. De ahí, que la no aceptación de este sea un obstáculo para la aceptación del infinito actual (Turégano, 1996).

Microrrelato 2: finitista complejo

Sujeto 2

Los preámbulos

El sujeto 2 es un alumno trabajador y persona trabajadora y muy responsable, ha llegado a segundo de secundaria, 13 años, con pocos problemas. Aun así, sus notas no son del todo brillantes. Es lo que llamamos los docentes un alumno "que le cuesta". A parte de lo académico, las tardes las tiene totalmente ocupada, con inglés, atletismo y conservatorio de música. La completará con clases particulares privadas en su casa. Tiene muy claro lo que quiere estudiar y donde trabajará.

El día de la entrevista estuvo muy preocupada en como saldría en el vídeo que le iba hacer. Cuando lo recogí de su aula, me repetía una y otra vez que estaba muy nerviosa.

Escena finitista. En este primer acto da sus respuestas cortas y firmes. “Hay veinte”, “ahora hay dieciocho” “Antes había más”. Aparenta estar tranquila, pero no para de tocarse el pelo largo e planchado que tiene.

Escena infinitista. Empieza contestando a la primera pregunta diciendo que “hay treinta,…, no, (se levanta de su asiento para ver mejor y responde…) muchísimas”. Ya la segunda, no aguanta sentada y lo contesta de pie diciendo que son distintas porque ha quitado una y es esa una la que se ha quitado también en cada espejo. Le digo si la ha contado para saber si son distintas y me contesta “¿Los cuento?”. Se ríe cuando le respondo diciendo que íbamos a estar mucho tiempo en contarlas. Finaliza explicando que hay menos cantidad porque hay una menos en cada espejo.

Desenlace

Hay una clara diferencia en la entrevista del sujeto 2: las intuiciones primarias podrían haber sido las mismas, pero el aporte pedagógico durante la entrevista le ha servido, en particular, a él para reflexionar como intuición secundaria la presencia de los reflejos de las bolas en los espejos. El quitar una de ellas no es sólo quitar esa sola, sino, es esa y todas las reflejadas. Pero es la pregunta que hace casi al finalizare la entrevista, qué si quiere que las cuentes, refiriéndose a “todas” las bolas, que puede visualizar entre los espejos, nos hace pensar que, como el caso del sujeto 1, no presenta la concepción de la infinitud como proceso. Posiblemente en este caso, otras tareas de conexión en la actividad hubieran favorecido el desarrollo de un pensamiento coherente en el estudiante y de manera particular cuando es la noción del infinito actual esté implicado en dichas tareas (Garbin y Azcárate, 2002).

Microrrelato 3: in-finitista

Sujeto 3

Los preámbulos

La edad del sujeto 3 es de 15 años, un año menos que el resto de sus compañeros de 4.º ESO. En primaria, le adelantaron en un curso escolar por petición de sus padres y aconsejado por el departamento de orientación. Si no es un alumno de altas capacidades al menos es talentoso en matemáticas.

Al entrar en el despacho para empezar la entrevista, se fija en el artilugio de los espejos y me dice: “Esto va del infinito, ¿no?”. Algo se olería o le dijeron sus compañeros entrevistados anteriormente de cursos inferiores y que solía tener más empatía que los que estaban en su clase. “Vamos a ver, de momento siéntate en frente de todo esto”, le dije.

Escena finitista. Empiezo preguntándole cuantas pelotitas hay contando con las que se reflejan en el único espejo que tiene enfrente. Él asienta con la cabeza muy educadamente y dirige su mirada a éste, a la cual contesta “veinte”. Le pido que quite una y que me diga cuánta hay en ese momento, a la cual responde dieciocho sin mirarlas. Cuando finalizo con la pregunta hay la misma cantidad que antes, duda al principio un poco expresándolo con un "Ehm…" para continuar con un "No" en voz baja.

Escena infinitista. Entre escena y escena, me dice "¿Aquí hay truco, Don Juan?", a la cual le contesto que no hay nada en especial y que sólo me debe comentar lo que ve. Se acomoda en este segundo acto, tomando un ángulo de observación adecuado para observar todo lo que se refleja entre los espejos, y me indica "¿Ves cómo no me hace falta el cojín?" mientras que juguetea con el tornillo elevador de la plataforma como si lo hubiera hecho con anterioridad. "Dime ¿cuántas bolitas hay entre los dos espejos?". Todavía cree que hay truco en la pregunta y no sólo me repite la pregunta, que me afirma que son diez las bolitas. Le aclaro que junto a las que se reflejan y me contesta de nuevo en voz baja, tal como pasó en la última pregunta del acto anterior, "Infinito". Al quitarle la primera y acercar los espejos para que no haya espejo, me contesta que hay nueves bolitas y, de nuevo al aclararle, que con los que se reflejan me vuelve a decir con voz más decisiva "Infinito".

Mirando la bola que ha quitado me dice que no hay la misma cantidad que antes dando la explicación que son infinitos diferentes y que realmente hay menos cantidad de bolitas.

En el retorno a su clase, que le acompañaría, él sigue pensando en las preguntas que le hice y casi llegando al aula sin hablarnos, me despide diciéndome: "la he fastidiado, ¿no? Don Juan. Usted no me ha dicho nada… y la he fastidiado".

Desenlace

El sujeto 3 acepta los infinitos tanto potencial como actual, pero con propiedades de lo finito. El criterio de inclusión de Bolzano que hemos modelizado en una experiencia física, plantea para él una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio, es decir, si un conjunto A tiene un subconjunto propio B, la intuición del alumno indica que B es necesariamente más pequeño que A debido a que existen elementos de A que no están en la de B (Ortiz, 1994).

Microrrelato 4: potencialista

Sujeto 4

Los preámbulos

El sujeto 4 es una alumna con 16 años de 4.º de ESO, poco trabajadora pero muy avispada. Ese recurso le ha bastado para superar los cursos anteriores: es un "pequeño brillante que falta por pulir".

Cuando fui a recogerla para acompañarlo a mi despacho, permaneció en todo el trayect en silencio, algo inusual en ella pero para nada nerviosa. De vez en cuando me miraba y sonreía.

Escena finitista. Contesta a las preguntas de forma correcta. Para ello señala con sus manos, que tiene menos cantidad.

Escena infinitista. Comenta que hay infinitas bolitas entre los dos espejos y sus reflejos. Tras quitar la bolita y dar la misma respuesta que la anterior, finaliza su razonamiento, haciendo aspaviento con sus manos, que son las mimas cantidades porque se reflejan infinitamente las bolas.

Desenlace

El sujeto 4 acepta el infinito actual pero con argumento potencialista. Para ella se referirá al infinito como el proceso reiterado de reflejos producidos por los espejos paralelos en las bolas. Responde básicamente con la intuición natural del infinito (Grabin y Azcárate, 2002).

Microrrelato 5: actualista

Sujeto 5

Los preámbulos

Lo sujeto 5 es la típica alumna que todo docente querríamos en nuestras clases. Cursa 4.º de ESO con 16 años. Su fuerte personalidad y carácter disimula la adolescencia que está atravesando. Si no nos comentara su edad, podría decir que estaría estudiando bachillerato. Cuando le tocó hacer la entrevista me comentaba por el pasillo cuando fui a recogerla, "estás experimentando con nosotros como ratones de laboratorio".

Escena finitista. A la primera pregunta, me responde sonriendo, e indicando con los dedos las bolas y las reflejadas, que hay veinte. La segunda fase, ya no sonríe, le ha quitado una y cree que la pregunta tiene algo más que se les escapa. Dice que hay dieciocho y que no hay la misma cantidad del total que antes, pero en voz baja y mirándome fijamente a los ojos.

Escena infinitista. Al ponerle el segundo espejo y aclarándole cómo funciona el artilugio, para que pudiera adaptar a su ángulo de observación, exclama con un "hostia, que pasada" al ver las bolas reflejadas. La primera pregunta, la responde con una sonrisa final "Infinitas". Le quita la bola. Acerca los espejos y contesta "hay infinitas bolas". A la pregunta que le hago de si son iguales me contesta que no que ahora hay infinita y antes había veinte, y es que aún cree que hay truco en la pregunta. Aclaro que se trata de antes y después de quitar esa bola a los espejos paralelos. La explicación a su afirmación final es única: "son las mismas cantidades, son infinitas y ésta (refiriéndose a la bola y la muestra en su mano) es despreciable frente al infinito".

Desenlace

La respuesta de la sujeto 5 es contundente y sin titubeo, "son las mismas cantidades por ser infinito". La inmutabilidad y la inconmensurabilidad, la emplea ella en el comentario de que la extracción de cantidad en el infinito como acto es totalmente despreciable. El estudiante crea sus propios argumentos, acertados o no, para poder dar respuestas en la aceptación del infinito actual (Sierpinska,1994, citado en Penalva, 1996).

Conclusiones

Dos son los propósitos de este trabajo: introducir la investigación narrativa en el campo de la didáctica de la matemática y el uso de los microrrelatos para el posterior análisis y categorización de respuestas en alumnos de educación secundaria entorno al infinito actual como identidad cardinal, utilizando para ello el método de comparación mediante la relación de inclusión de Bolzano y la ayuda de una experiencia física. Por otro lado, dar significado a los comportamientos generales encontrados, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en tanto reconocer las cardinalidades de esos conjuntos y finalmente la aceptación o no del infinito actual. Con la ayuda de la investigación narrativa y sus microrrelatos hemos podido categorizar las respuestas en cinco estados evolutivos.

En el primer estado considerado (*Finitista elemental*), se consideraron los alumnos que quitando una de las bolas, la cantidad final es ya menor que la inicial con los dos espejos enfrentados. Entendemos, en consonancia de Garbin y Azcárate (2002), que estos alumnos evaden la infinitud, argumentando con propiedades finitas la situación planteada. Incluso con el aporte pedagógico que se le ofrece para caracterizar las dos escenas e intentar relacionarla, es insuficiente para dar una respuesta positiva en la aceptación del infinito potencial. Y por supuesto, la no aceptación de este es un obstáculo para la aceptación del infinito actual (Turégano, 1996).

En el segundo estado (*Finitista complejo*), se incluyen los alumnos que quitando una de las bolas y los correspondientes reflejos, la cantidad final es menor que la inicial. Tanto este estado como el anterior evaden la infinitud argumentando lo observado con propiedades propio de lo finito. La diferencia con en el estado anterior que estos alumnos consideran las bolas reflejadas en la sustracción. Las intuiciones primarias podrían haber sido las mismas, pero el aporte pedagógico durante la entrevista les ha servido, en particular y sin más, para reflexionar como intuición secundaria la presencia de los reflejos de las bolas en los espejos. Aun así no presenta la concepción de la infinitud como proceso.

En el tercer estado (*In-finitista*), se incluyen alumnos que consideraron el infinito con propiedades de lo finito. Aceptan con medidas la infinitud pero con argumentos finitista. En este estado los alumnos aceptan los infinitos tanto potencial como actual, pero con propiedades de lo finito. Como afirma Ortiz (1994), el criterio de inclusión de Bolzano plantea en nuestro caso en alumnos entrevistados, una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio.

En el cuarto estado (*Potencialista*), se consideraron alumnos que razonaron la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios del infinito potencial, no haciendo ninguna referencia al actual. Éstos aceptan el infinito actual pero con argumento potencialista. Los alumnos categorizados en este estado, manifiestan las respuestas fundamentalmente con la intuición natural del infinito descrita por Garbin y Azcárate (2002).

Y en el último estado se incluyen los alumnos que razonaron la equidad de las cantidades utilizando argumentos propios, acertadas o no, para dar respuestas en la aceptación del infinito actual tal como los describe Sierpinska (1994, citado en Penalva, 1996). Las respuestas dadas son contundentes y acepta el infinito como un todo.

Tras analizar el currículo de matemática en secundaria (12 a 16 años) con relación al infinito matemático podemos certificar, en primera instancia, la ausencia de forma aparente de éste. Decimos forma aparente ya que este concepto matemático estudiado no aparece de forma explícita, ahora bien, se puede relacionar con muchos puntos del currículo.

Queremos puntualizar dos recomendaciones para introducir a nuestros alumnos de estas edades el concepto de infinitud. Por un lado, el nuevo conocimiento debe ser abordado desde una situación preferiblemente intuitiva, que comparando el modelo evolutivo creado correspondería a las primeras preguntas de las tareas asociadas, sí es verdad que solo podría conseguir ese acercamiento de forma intuitiva sobre el infinito potencial. Y por otro lado, el nuevo conocimiento debe ser afrontado desde una situación cercana al estudiante. El utilizar los espejos paralelos hace que sea más factible esa proximidad al concepto de una forma elemental que más adelante será retomado de nuevo en el propio modelo evolutivo añadiendo elementos más complejos.

Referencias

Arribas, H. F. (2008). *El pensamiento y la biografía del profesorado de Actividad Física en el Medio Natural: un estudio multicaso en la formación universitaria orientado a la comprensión de modelos formativos* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, España.

Bolívar, A., Domingo, J., & Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación. Enfoque y metodología.* Madrid: La Muralla.

Bolzano, B. (1851/1991). *Las paradojas del infinito*. (L.F. Segura, trad.). México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. (Obra original publicada en 1851).

Connelly, M., & Clandinin, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación educativa. In J. Larrosa et al. (Coord.) *Déjame que te cuente. Ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 11-59). Barcelona: Laertes/Psicopedagogía.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años* (Tesis Doctoral). Universidad de Málaga, España.

Fuenlabrada, I., & Armella, L. (2008). *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg.* México: Departamento de investigaciones educativas.

Garbin, S., & Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 87–113.

Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211–231.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto del infinito. *Asociación Matemática Venezolana* (AMV)*, 1*(2), 59-81.

Penalva, C. (1996). *Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares.* Universidad de Alicante, España.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI Editores.

Satriano, C., & Marques, V. (2015). Instrumentación Metodológica sobre el uso de narrativas. *Revista Psicología Digital, Revista del Programa Problemáticas Contemporáneas. Psicoanálisis, Ciencia, Ciencia Cognitiva*. Extraído el 20 de julio de 2015 de http://psicologiadigital.unr.edu.ar/?p=196

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP. *Epsilon, 34*, 11-46.

Waldegg, G. (2005). Bolzano's approach to the paradoxes of infinity: Implications for teaching. *Science and Education, 14*, 559-577.