Números racionais no 1.º ciclo: compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos

Rational numbers in the elementary school: understanding the magnitude and density supported by models

Cristina Morais
Externato da Luz
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
cristina.morais@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. Neste artigo procuramos compreender de que modo o uso de modelos contribui para a compreensão da noção de grandeza de número racional e de densidade como propriedade do conjunto dos números racionais. Relatamos parte de um estudo que seguiu a modalidade de Investigação Baseada em Design, tendo sido realizada uma intervenção onde participaram 25 alunos de uma turma e respetiva professora, nos 3.º e 4.º anos de escolaridade. Analisamos episódios de sala de aula centrados no uso dos modelos da reta numérica, de grelhas 10×10 e 10×100 e da barra. Os resultados mostram que o recurso a estes modelos contribuiu para a compreensão da noção de grandeza de número racional, uma vez que promoveram a identificação e mudança de unidade de referência, o uso de diferentes representações para um mesmo número, a mobilização de números de referência, e relações de ordem entre diferentes números. O uso dos modelos apoiou o desenvolvimento da noção de densidade, ajudando a identificar a existência de um número racional entre dois números racionais e a reconhecer a possibilidade de progressivas divisões das unidades por 10.

Palavras-chave: números racionais; grandeza de um número; densidade; modelos; representações.

Abstract. In this article we aim to understand how the use of models contributes to the understanding of the magnitude of a rational number and the density of the set of rational numbers. We report part of a broader study that follows a Design Based Research, within which a teaching experiment was carried out with 25 students and their teacher, in grades 3 and 4. We analyze classroom episodes where the number line model, 10×10 and 10×100 grids and the bar model were used. The results show that using these models contributed to the understanding of the magnitude of a rational number, as they promoted unit identification and unit change, association of different representations to the same number, call upon reference numbers, and order comparisons between different numbers. The use of models supported the development of the notion of density, supporting the identification of a rational number between two rational numbers and the recognition of the possibility to further partition units by 10.

Keywords: rational numbers; magnitude of a number; density; models; representations.

(Recebido em janeiro de 2018, aceite para publicação em maio de 2018)

Introdução

Na aprendizagem dos números racionais surgem questões e desafios que provocam uma transformação e ampliação do conceito de número até então construído pelos alunos com base nas características dos números inteiros[1] (Swan, 2001). Siegler, Thompson e Schneider (2011) propuseram uma teoria integrada de desenvolvimento numérico segundo a qual o processo de transformação do conceito de número ocorre, por um lado, com o reconhecimento pelo aluno de que todos os números racionais, incluindo os números inteiros, possuem grandeza. A grandeza de um número é entendida como o *tamanho* ou o *valor* de um número, estreitamente relacionada com a comparação e ordenação de números, pertencentes ao conjunto ordenado dos números racionais, e que permite a sua localização na reta numérica. Por outro lado, o processo de transformação do conceito de número passa também pelo reconhecimento, pelo aluno, das características que são específicas dos conjuntos numéricos, como a propriedade densidade do conjunto dos números racionais.

São vários os estudos que mostram as dificuldades dos alunos na compreensão da noção de grandeza de um número racional e da propriedade de densidade deste conjunto numérico. Os alunos tendem a considerar que, por exemplo, $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{4}$ uma vez que cinco é maior que quatro (e.g., Stafylidou & Vosniadou, 2004), ou a comparar dois numerais decimais[2] interpretando a parte não inteira de cada numeral como se de um número inteiro se tratasse, afirmando, por exemplo, que 0,25 é superior a 0,5 uma vez que 25 é maior que 5 (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015).

De acordo com estudos recentes (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2015; van Hoof et al., 2018), a identificação da grandeza de um número racional é um dos primeiros indicadores da compreensão de número racional pelos alunos. A compreensão da densidade deste conjunto numérico parece ser mais complexa.

Por exemplo,no estudo de van Hoof et al. (2018), dos 201 alunos dos 4.º e 5.º anos, apenas cerca de 19% revelam alguma evidência de compreensão de densidade do conjunto dos números racionais. O facto de os números racionais poderem ser expressos através de diferentes representações simbólicas contribui para a complexidade na compreensão da densidade. De acordo com estudos realizados com alunos mais velhos (com idades compreendidas entre os 12 e os 16 anos) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & van Dooren, 2011), estes tendem a interpretar as diferentes representações de número racional de modo isolado, isto é, consideram que num intervalo limitado por números racionais na representação em fração só existem frações, assim como num intervalo limitado por números racionais na representação em numeral decimal, só existem numerais decimais.

Torna-se necessário que os alunos trabalhem com diferentes representações de números racionais de modo a compreendê-las como representações de números pertencentes a um mesmo conjunto numérico (Owens & Super, 1993; Wang & Siegler, 2013). O recurso a modelos, enquanto representações cujas estruturas realçam determinadas ideias matemáticas, pode contribuir não só para o desenvolvimento da flexibilidade no uso de diferentes representações, mas também para a compreensão da noção de grandeza de um número e da densidade do conjunto numérico uma vez que permitem, por um lado, o desenvolvimento das ideias matemáticas e, por outro, o retorno ao contexto do problema se os alunos o necessitarem (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Assim, neste artigo procuramos compreender de que modo o uso de modelos por alunos do 1.º ciclo contribui para a compreensão da: (i) noção de grandeza de um número racional; e (ii) densidade do conjunto dos números racionais.

Grandeza de número racional e densidade do conjunto dos números racionais

A compreensão do número racional é aqui entendida numa perspetiva de sentido de número, descrito por McIntosh, Reys e Reys (1992) como um conhecimento dos números e operações, associado à capacidade e intuição de o usar de modo crítico e flexível em diferentes situações. É desenvolvido a partir das experiências com números inteiros e, depois, alargado aquando do estudo do conjunto dos números racionais.

Para o desenvolvimento do sentido de número, indissociável do desenvolvimento numérico tal como entendido por Siegler et al. (2011), é fundamental ter uma intuição ou *feeling* dos números (Clarke & Roche, 2009; Lamon, 2007; McIntosh et al., 1992), onde se inclui a noção de grandeza, referida por McIntosh et al. (1992) como um "sentido de tamanho de um número"[3] (p. 6). O reconhecimento da grandeza de um número está fortemente associado à conceptualização da unidade, pois decorre da sua relação com a unidade tomada como referência. Este aspeto assume particular importância no conjunto dos números racionais (Lamon, 1996; Monteiro & Pinto, 2005), uma vez que uma mesma representação pode expressar uma grandeza diferente.

O facto de os números racionais poderem ser expressos em diferentes representações simbólicas, como numeral decimal, percentagem ou fração, torna complexa a perceção da grandeza do número (Siegler & Braithwaite, 2017). Para além da especificidade de cada representação, acresce o facto de, em certos casos, um mesmo número poder ser representado de infinitas formas num dado modo de representação (e.g., $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\dots$). A compreensão de número racional implica assim um reconhecimento desse número em diferentes representações, sendo que é no conjunto das diferentes perspetivas fornecidas pelas diferentes representações que resulta a compreensão da ideia nelas expressa (Tripathi, 2008). A transformação de representações, mantendo ou alterando o tipo de representação, contribui ainda para a distinção necessária entre o que é o número representado e a sua representação (Duval, 2006). O reconhecimento de múltiplas formas de representação de um número racional pressupõe a identificação da grandeza desse número, e, numa perspetiva mais abrangente, é parte integrante do processo de ampliação do conceito de número (McMullen et al., 2015) e indicador de compreensão de número racional (Post et al., 1993).

Destacamos o papel que os modelos podem assumir para o desenvolvimento de flexibilidade no uso de diferentes representações e para a construção de uma visão holística de número racional (Tripathi, 2008). Os modelos podem ser entendidos como representações que refletem aspetos matemáticos e estruturas consideradas relevantes para a situação em que se utilizam, podendo assumir diferentes formas, como materiais, esquemas ou até mesmo símbolos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Os modelos apoiam a transição entre o conhecimento associado à realidade, criada num problema significativo para os alunos, e o conhecimento subjacente a ideias matemáticas formais (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Deste modo, surgem inicialmente dependentes do contexto o que significa que não são aplicáveis a outros contextos, sendo por isso designados como *modelos de* (Gravemeijer, 1999). Estes modelos evoluem para *modelos para* (Gravemeijer, 1999), utilizados em várias situações, independentemente do contexto específico do problema, quando a atenção recai sobre as relações matemáticas envolvidas e não na situação descrita no problema. Importa sublinhar que o potencial dos modelos, associado às estruturas matemáticas a eles subjacentes, é dependente de quem os utiliza (Lamon, 2001) e, por isso, devem ser intencionalmente focados pelo professor (Prediger, 2013).

Neste estudo, centramo-nos em três modelos: a reta numérica, a grelha 10×10 (que depois evoluiu para a grelha 10×100) e a barra. A reta numérica assume particular importância neste estudo pois este modelo permite a ordenação e localização de números inteiros e números racionais, cuja continuidade se pretende valorizar (Siegler et al., 2011). No uso deste modelo está subjacente a interpretação de número racional no significado de medida, para a qual é essencial a identificação da unidade de referência. De entre as diferentes formas em que a reta numérica pode ser apresentada, incluindo a reta numérica não graduada ou a reta numérica dupla, centramo-nos na reta numérica estruturada cujo intervalo relativo à unidade de referência é dividido num determinado número de partes iguais.

As características da grelha 10×10 enfatizam a estrutura do sistema de numeração decimal, fundamental para a compreensão de número racional representado em numeral decimal. À semelhança da reta numérica, este modelo apoia a representação de número racional em diferentes representações simbólicas (por exemplo, $0,25=\frac{25}{100}=25\%$), contribuindo para a perceção da grandeza de um número e, deste modo, promovendo o estabelecimento de relações de ordem entre números racionais (Cramer et al., 2015; Cramer et al., 2009). Este modelo privilegia a interpretação de números racionais no significado parte-todo, contribuindo para a compreensão de número racional que decorre também do entendimento dos diferentes significados poderá assumir (Lamon, 2007).

A barra é uma representação retangular, de dimensões variáveis e que não apresenta qualquer divisão. Por este motivo, permite uma utilização diferente por cada aluno, sendo dividida ou aumentada de acordo com o entendimento de número racional ou as relações que os alunos estabelecem entre números racionais (Middleton, van den Heuvel-Panhuizen, & Shew, 1998). Este modelo possibilita de forma intuitiva a interpretação de número racional no significado parte-todo e medida, uma vez que pode ser facilmente transformado numa representação que se aproxime do modelo da reta numérica ou ainda da reta numérica dupla, dando visibilidade à natureza relacional de número racional (Middleton et al., 1998).

Ao apoiarem uma perceção e estabelecimento de relações de ordem entre diferentes números racionais, estes modelos possibilitam também o reconhecimento da existência de um número racional situado entre dois números racionais representados. Este reconhecimento é um primeiro passo fundamental para a compreensão da densidade do conjunto dos números racionais.

Sendo uma propriedade que não é partilhada pelo conjunto dos números inteiros, a compreensão da densidade implica reconhecer que a sequenciação de números e a existência de um número sucessor são características específicas do conjunto dos números inteiros (McMullen et al., 2015; Ponte & Serrazina, 2000) e que não se estendem ao conjunto dos números racionais. Os números racionais constituem um conjunto denso uma vez que, para cada número, não existe um número sucessor, sendo que existem infinitos números racionais entre quaisquer dois números racionais (Harnett & Gelman, 1998; McMullen et al., 2015; Monteiro & Pinto, 2005).

Metodologia de investigação

Neste artigo reportamos parte de um estudo mais amplo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (IBD) (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). Especificamente, segue-se um tipo de IBD que é designado por Cobb, Jackson e Dunlap (2016) como estudo de design na sala de aula, uma vez que é uma investigação centrada nos processos de aprendizagem de um conteúdo específico, no contexto de sala de aula, neste caso a construção da compreensão de número racional na sua representação em numeral decimal, que contou com o envolvimento da professora da turma onde se realizou a investigação.

O enquadramento teórico apresentado na secção anterior permitiu suportar as decisões tomadas na preparação da intervenção, tendo sido revisitado em vários momentos da intervenção. Esta forte interligação entre as componentes teórica e pragmática conferem à IBD o seu carácter cíclico. A IBD realizada teve um ciclo de intervenção com três microciclos, cada um deles constituído pela (i) preparação da intervenção; (ii) experimentação em sala de aula; e (iii) análise retrospetiva dos dados recolhidos que informaram o microciclo seguinte (Cobb & Gravemeijer, 2008; Cobb et al., 2016; Gravemeijer & Cobb, 2006). Da análise realizada sobre a fase de experimentação de um dos microciclos resultaram elementos que apoiaram a fase de preparação do microciclo seguinte.

Na preparação do primeiro microciclo foi considerado que os alunos tinham trabalhado anteriormente com números racionais em fração, maioritariamente frações unitárias, com um significado parte-todo. Tendo estes elementos como ponto de partida, e considerando as ideias teóricas previamente apresentadas, foram planeadas tarefas cujo contexto privilegiasse uma interpretação de número racional no significado de medida, valorizando-se o uso da reta numérica.

Após a experimentação em sala de aula, a análise retrospetiva levou-nos a promover no microciclo seguinte o recurso ao modelo da grelha 10×10, posteriormente adaptada na grelha 10×100 e, embora não seja foco de análise neste artigo, também a grelha 20×50 (ou *decimat*). As tarefas realizadas e os modelos valorizados privilegiaram a interpretação de número racional no significado parte-todo. Foi antecipado que promovessem o reconhecimento da estrutura subjacente ao numeral decimal, dando visibilidade às relações entre as subdivisões das unidades, subjacentes ao sistema de numeração decimal, e à possibilidade de continuar a subdividir as unidades em partes progressivamente menores.

O trabalho realizado informou o terceiro microciclo, em que foram propostas tarefas que levassem à interpretação de números racionais no significado de medida e parte-todo. Foram usados o modelo da barra e retomados os restantes modelos já usados, de modo a promover flexibilidade no uso de diferentes representações de número racional.

Os participantes foram os 25 alunos de uma turma de uma escola em Lisboa, a professora da turma e a investigadora (primeira autora). A intervenção desenvolveu-se no 3.º e 4.º ano, com início no ano letivo de 2013/2014. Foram propostas 18 tarefas que foram resolvidas em aulas de 90 minutos, num total de 16 semanas nos dois anos letivos. As tarefas foram propostas pela investigadora à professora da turma, analisadas e discutidas em reuniões conjuntas e alteradas sempre que necessário. Foi elaborado um guião de exploração de cada tarefa com indicações relativas à organização dos alunos, objetivos da tarefa, sugestões para a sua exploração e antecipação de resoluções dos alunos. As aulas seguiram, na sua maioria, a mesma organização em diferentes momentos: um primeiro momento de abordagem à tarefa, o segundo de resolução da tarefa, realizada em pequenos grupos ou em pares, e o terceiro de discussão coletiva.

Os principais processos de recolha de dados foram as gravações vídeo e áudio das aulas, a recolha dos registos realizados pelos alunos e a realização de notas de campo pela investigadora. Neste artigo analisamos cinco episódios de sala de aula, ilustrativos do uso de modelos em tarefas que sugerem um foco na grandeza de números e/ou densidade do conjunto dos números racionais: os dois primeiros episódios ocorreram no primeiro microciclo, o terceiro ocorreu no segundo microciclo e os dois últimos episódios integraram o terceiro microciclo. Os dados apresentados referem-se a momentos de resolução das tarefas em pares ou individualmente pelos alunos da turma, identificados com nomes fictícios, e a momentos de discussão coletiva.

Os episódios foram analisados tendo em conta o modo como o uso de cada modelo contribuiu para a compreensão da noção de grandeza de um número racional e de densidade do conjunto dos números racionais. A compreensão da grandeza foi analisada considerando: (i) a comparação de números racionais em diferentes representações; (ii) a identificação da unidade de referência; (iii) o uso de números de referência; e (iv) a representação de um mesmo número racional em diferentes representações. Relativamente à densidade, os episódios foram analisados considerando: (i) a identificação de um número racional entre dois números racionais; e (ii) o reconhecimento da possibilidade de realizar partições sucessivas de unidades progressivamente menores.

Resultados

Compreensão da grandeza e densidade apoiada pela reta numérica

A intervenção iniciou-se com a exploração de relações entre diferentes capacidades de garrafas de água, nomeadamente, de 1 l, 0,75 l, 0,5 l e 0,25 l. Para tal, os alunos sentiram necessidade de ir marcando, na garrafa considerada como unidade, até onde chegava a água das outras garrafas quando vertidas naquela. Assim, naquela garrafa foi traçada uma linha vertical onde constavam as marcas relativas às diferentes capacidades das outras garrafas. A tarefa que analisamos seguiu-se a esta exploração, tendo sido a primeira em que a reta numérica foi apresentada com graduação em décimas.

Foi mantido o contexto das garrafas de água e apresentado um garrafão associado à reta numérica. Foram apresentadas várias garrafas com diferentes capacidades representadas em numeral decimal (Figura 1), sendo pedido que os alunos, em pares, assinalassem no garrafão, com o auxílio da reta, até onde chegaria a água contida nas garrafas quando vertidas para o garrafão.

Vamos encher garrafões!
Se cada garrafa de água for esvaziada para um garrafão,
até onde chegará a água? Faz as marcações em cada garrafão.

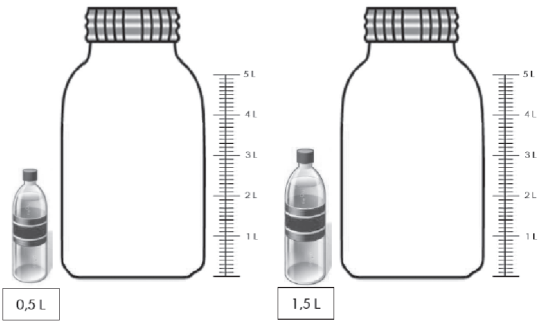


Figura 1. Parte do enunciado da tarefa “Vamos encher garrafões!”

Uma vez que a reta numérica foi apresentada com um intervalo de 0 a 5, entre alguns alunos surgiu uma discussão em torno da unidade de referência a considerar. Rute, que trabalhou com Dinis, procurou relacionar os numerais apresentados com o garrafão, que conceptualizou como unidade de referência:

Rute: Isto é para saber quantas destas [garrafas] é que é para encher esta [garrafão]?

(…)

Rute: Espera Dinis, isto a pergunta é... Olha, se cada garrafa de água for esvaziada para um garrafão até onde subirá a água? Mas o que é que a pergunta? O que é que nós estamos a fazer? Não estou a perceber.

Dinis: É só dizermos quanto é que vale.

Rute: Quanto é que vale? Não é nada quanto é vale... Tu não sabes. . .

Dinis: Começa a fazer as marcações Rute.

(…)

Rute: Fazer marcações de quê?!

Dinis: Então, de quanto é que isto vale. Por exemplo… Quanto é que isto representa.

Perante as diferentes representações apresentadas na tarefa (garrafa, garrafão, reta numérica e representação de número racional em numeral decimal), para Rute não foi imediato o reconhecimento de que teria que representar o mesmo número expresso em numeral decimal na reta numérica. Após esta discussão com o colega, a aluna identifica o garrafão ou 5 litros como unidade de referência. Esta interpretação é evidente quando, de seguida, interpreta 0,25 l como "Tem de ser um quarto de cinco".

Já Dinis parece centrar a sua atenção no número representado, dissociando-o da sua representação, referindo "É só dizermos quanto é que vale", tentando ajudar a colega ao pedir-lhe para localizar os números na reta numérica. Dinis identificou 1 l como unidade de referência, que se tornou evidente quando reconheceu, por exemplo, que 0,25 teria "de ser abaixo de um litro".

No par constituído por Bárbara e André, ambos consideraram diferentes unidades de referência ao procurar posicionar 0,5 l:

Bárbara: Olha, é muito fácil. Olha esta é zero vírgula cinco.

André: Só temos que contar cinco tracinhos!

Bárbara: Não é bem... Pronto, então imagina, zero vírgula cinco, pensa no dez, cinco é metade de dez, não é? Pensa cem por cento, é como se fosse cinquenta por cento, metade!

André: Cinquenta por cento é metade disto! [referindo-se a metade da garrafa] E cinquenta por cento é cinco traços! [referindo-se a cinco décimas]

Bárbara: Não, não é! . . . Olha, isto é como se fosse metade de uma garrafa, então é metade do garrafão André!

Os dois alunos mobilizaram a representação de percentagem para interpretar o numeral decimal, representando como 0,5 ou 50%, considerado ainda como "metade". Contudo, referem-se a unidades de referência diferentes. Bárbara tomou como unidade o garrafão (5 l) e André a garrafa (1 l). O par acabou por pedir ajuda à investigadora que chamou a atenção para o facto de metade do garrafão corresponder a 2,5 l e a garrafa ter a capacidade de 0,5 l. Os alunos reconheceram que 2,5 l seria superior a 0,5 l, assinalando depois a posição de 0,5 corretamente na reta.

Na localização de 0,25 l na reta numérica, André contou o correspondente a 25 divisões, ou seja, 25 décimas, assinalando a posição 2,5. Bárbara ajudou o colega recorrendo à relação entre 0,25 e 0,5, apoiada pela transformação entre representações:

André: Mas esta chega até aqui [localização de 2,5 na reta numérica].

Bárbara: Não, não chega André! Isto [0,25] é menos do que isto [0,5]! Isto é metade, isto é um quarto! Olha, cem por cento é o cinquenta e depois o vinte e cinco. A metade e o quarto André!

André: Espera um segundo... Então mas se isto não é, e agora estou a ver que tens toda a razão, tem de ser menos do que isto... Ou seja vai abaixo da unidade. (…) Podemos fazer a metade deste [0,5 l]?

Bárbara comparou os números 0,25 e 0,5, recorrendo para isso à representação em percentagem e fração. Deste modo, a aluna associa a uma mesma localização na reta numérica diferentes representações simbólicas de um mesmo número. As transformações entre representações parecem ter auxiliado André a identificar 0,25 como menor que 1 e correspondente a metade do número representado por 0,5. Esta última relação evidencia que os alunos reconhecem a existência de, pelo menos, um número racional situado entre 0 e 0,5, etapa inicial importante para o reconhecimento da densidade dos números racionais. No entanto, ambos consideraram que não era possível marcar 0,25 l na reta numérica:

André: Quanto é que é a metade de cinco?

André e Bárbara: É dois e meio. (em simultâneo)

André: Só que ali não representamos, fazemos no dois.

Bárbara: OK.

Embora os alunos reconheçam que metade de 0,5 seria "dois e meio", o facto de a reta ser apresentada com a unidade dividida em décimas parece levar ambos a não considerar possível a localização de 0,25, marcando antes uma posição aproximada (0,2). Bárbara e André parecem revelar uma interpretação da reta numérica como um conjunto de pontos discretos, provavelmente consequente da utilização deste modelo com números inteiros.

Já Dinis reconheceu a possibilidade de marcar números nos espaços compreendidos entre as décimas já assinaladas na reta:

> Dinis: Deixa-me contar os... Aqui porque se contar ao contrário, então vai noventa, oitenta, setenta, sessenta, cinquenta, depois vou para o quarenta, depois vou para o trinta, mas está no meio do vinte e do trinta. Por isso há de ser vinte e cinco.

Dinis associou dez a cada uma das divisões de uma unidade. É provável que o aluno não estivesse a recorrer a "dez" compreendendo que poderia dividir cada décima em 10 centésimas. Talvez o tenha feito por associar à unidade (1 l) a noção de 100, unidade fortemente relacionada com a percentagem. Dinis referiu que 0,25 "está no meio do vinte e do trinta", fazendo a marcação a meio do espaço compreendido entre as décimas.

Uma outra tarefa identificava a posição do número representado por 12,05 na reta numérica com uma seta, sendo apenas visível o traço correspondente à localização do número. Era pedido que os alunos discutissem em pares se o número em questão seria 12,05 ou 12,5 (Figura 2).

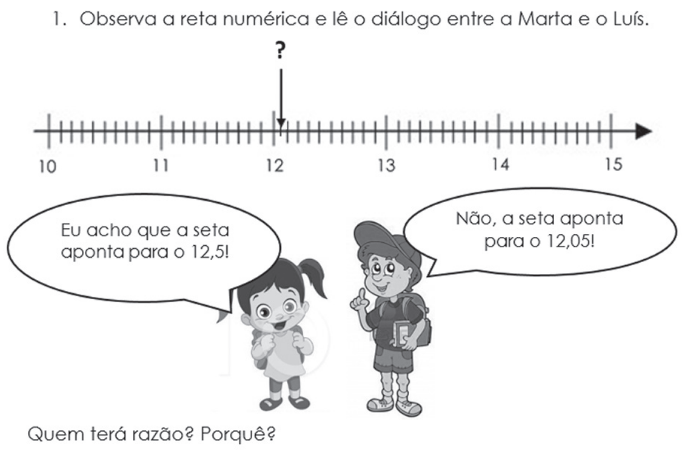


Figura 2. Questão 1 da tarefa "Localização de números na reta numérica"
(adaptada de Brocardo, Delgado, & Mendes, 2010)

Inicialmente, foram vários os alunos que começaram por considerar que ambos os numerais representavam o mesmo número, interpretando o zero na parte não inteira do numeral 12,05 como um algarismo que não altera o valor do número representado. Frederico referiu mesmo "Porque nós… Para mim e para a Íris (colega com quem trabalhou) o zero não está lá a contar muito".

Contudo, foi ao refletir sobre a representação dos numerais na reta numérica, que começaram a surgir algumas hesitações relativamente à grandeza de cada um dos números. Tal foi evidente quando André partilhou com o colega Dinis a sua hesitação:

André: Não, mas os dois são iguais! Porque nenhum deles... Mas está ali dentro...

Dinis: Pois...

André: Se calhar os dois, são os dois aqui, se calhar nenhum tem razão!

A afirmação de André "Mas está ali dentro…" evidencia que o aluno parece reconhecer a existência de números entre as marcações apresentadas, uma observação fundamental para o início da compreensão de densidade.

Outra aluna, Rute, pareceu interpretar a parte não inteira de 12,05 também como metade de uma unidade, diferente da unidade de referência:

Rute: Isto é o que a Marta diz, que é doze vírgula cinco. Doze unidades e cinco décimas. Só que eu acho que ele é que tem razão, zero vírgula cinco [referindo-se a 12,05] é metade. Então estamos a falar metade de um quadrado, não é da unidade toda. Por isso é que eu acho que é da unidade.

Rute identificou claramente a unidade de referência, ao alertar a colega Bárbara que não estava a considerar a "unidade toda". A aluna interpretou 0,05 como "metade de um quadrado", referindo-se ao espaço compreendido entre 12,1 e 12,2. A aluna parece usar o modelo da reta numérica que enfatiza uma interpretação de número racional no significado de medida, integrando a interpretação parte-todo, considerando a reta numérica como uma barra, dividida em vários espaços que denomina por quadrados.

Rute começou depois a associar dez a cada espaço, referindo "O quadradinho é como se fosse dez", embora não verbalize por que o fez. Talvez o tenha feito para procurar identificar a grandeza relativa a 0,05 (em 12,05). Uma vez que 0,5 significa metade, Rute poderá ter concluído que 0,05 (05) seria a metade de 10 (0,10). É importante notar que esta associação a dez, ainda que pouco sustentada, é fundamental para a compreensão da extensão da estrutura do sistema de numeração decimal ao conjunto dos números racionais na sua representação em numeral decimal.

O uso da reta numérica para localizar números racionais permitiu que os alunos interpretassem representações que se revelavam, inicialmente, incompreensíveis (como 12,05). O espaço correspondente a uma décima não só foi entendido como compreendendo outros números, noção fundamental para a compreensão de densidade, como também foi interpretado por alguns alunos como estando dividido em dez partes iguais, aspeto essencial para a compreensão do sistema de numeração decimal quando estendido aos números racionais.

Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelas grelhas 10×10 e 10×100

O modelo da grelha 10×10 foi apresentado como uma "toalha", dividida em cem partes iguais. Após a exploração deste modelo, foi proposta uma tarefa que apelava à comparação de números racionais representados em numeral decimal, recorrendo ao modelo da grelha 10×10.

Uma das questões colocadas foi "Será 0,67 maior que 0,9?". No momento de discussão coletiva, Jorge partilhou como usou o modelo para comparar os dois numerais:

> Jorge: Primeiro pensei que zero vírgula sessenta e sete fosse maior que zero vírgula nove porque à primeira vista o sessenta e sete parece maior que o nove. . . Mas depois vi que podia pensar de outra maneira. Então, se nós pensarmos que cada coluna tem dez centésimas nós pintávamos seis colunas destas, sem o sete (em 0,67) ficava só sessenta. E o outro [0,9] ficava noventa centésimas, era maior que pintar sessenta e sete centésimas.

Jorge recorreu ao modelo da grelha 10×10 para representar e comparar os números (ver Figura 3).

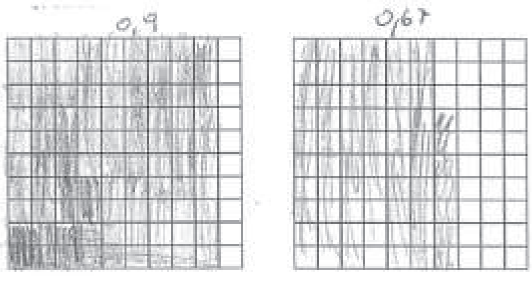


Figura 3. Registo realizado por Jorge na tarefa "Provas e Toalhas"

Já no par constituído por Dinis e André, foi imediato que 0,9 representava um número superior a 0,67. Dinis justificou que "Zero vírgula nove, porque zero nove é igual a zero vírgula noventa!", sem aparente necessidade de usar um modelo. Já André recorreu ao modelo da grelha para justificar à investigadora a sua resposta:

André: Então porque se nós... Por exemplo, temos aqui unidades divididas em cem partes iguais (referindo-se à grelha 10×10).

(…)

André: Ora, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove (conta nove colunas na grelha). Até aqui. Até aqui pintámos noventa quadradinhos porque... Uma décima vale dez.

André recorreu ao modelo para mostrar que 0,9 é equivalente a 0,90, identificando nove colunas como 0,9 mas correspondendo a noventa quadrículas, ou seja, 90 centésimas. Deste modo, o aluno mobilizou o modelo para justificar a equivalência entre os numerais. André referiu ainda que "uma décima vale dez", o que parece indicar que reconhece a décima como sendo uma unidade dez vezes superior à centésima, relação fundamental para a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal, no caso da representação em numeral decimal.

De seguida, foi explorada uma representação que designámos por "barrinha das milésimas" que resultou de uma adaptação da grelha 10×10 a um modelo que permitisse a representação de numerais com partes não inteiras constituídas até às milésimas. Com uma forma retangular, a barra representa a unidade, dividida em dez quadrados, as décimas, cada um dividido em dez colunas, as centésimas, que por sua vez estão divididas em dez partes iguais, as milésimas. Após uma discussão inicial em torno das características da grelha 10×100, foi pedido que os alunos representassem uma décima usando cor amarela, uma centésima a vermelho e uma milésima a verde. Vários alunos identificaram cada parte tal como Mafalda, cujo registo (incorreto) se apresenta na Figura 4.

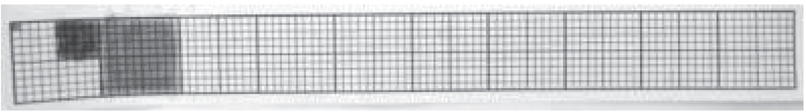


Figura 4. Registo de Mafalda na tarefa "Números em barrinhas"

As características da grelha, constituída por quadrados de diferentes tamanhos, parecem ter induzido os alunos a pensar que a décima corresponderia ao quadrado de maiores dimensões, a milésima ao quadrado menor, e a centésima ao quadrado "médio". Frederico, que fez um registo semelhante ao da Figura 4, explicou:

Frederico: Eu acho, já que isto está dividido em quatro partes iguais, o quadrado inteiro, eu achei que uma milésima já era um bocadinho e uma centésima já achava que era aquilo…

I: Porque era um bocadinho maior…

Frederico: Porque é um bocadinho maior.

I: A centésima é um bocadinho maior que a milésima. Mas quantas vezes é maior?

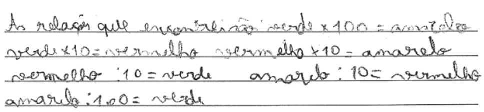
Frederico (de imediato): Dez!

O aluno conseguiu, de seguida, verbalizar que deveria ter pintado dez quadradinhos. As características da barra pareciam levar à identificação de cada parte fortemente influenciada pela forma de quadrado de cada uma das partes. Contudo, esta disposição da barra permitiu também reconhecer a relação existente entre cada uma das partes identificadas. É com base na configuração da barra, que Rute explica como é que ela e o colega André, que também tinham identificado uma centésima tal como se apresenta na Figura 4, alteraram a sua resposta:

Rute: Mudámos de ideias porque vimos que em cada quadrado (uma décima) tinha dez filas (dez centésimas). Como havia dez quadrados, dez vezes dez é cem. E a palavra centésima vem de cem por isso era uma… (faz um gesto vertical com a mão) era uma barrinha.

Rute e André, identificando a décima parte da barra, contam as dez filas existentes em cada uma. Uma vez que existem dez décimas, existiriam cem filas em toda a barra, logo, cada fila teria que ser uma centésima. Associando o nome da parte não inteira com a parte pretendida no modelo, Rute tornou clara a relação entre décima e centésima.

Após a identificação de 0,1, 0,01 e 0,001 neste modelo foi pedido aos alunos que explicitassem as relações identificadas entre cada uma dessas partes. Um exemplo das relações estabelecidas é apresentado na Figura 5, na resposta de Artur.



"As relações que encontrei são: verde×100=amarelo, verde×10=vermelho, vermelho×10=amarelo, vermelho:10=verde, amarelo:10=vermelho, amarelo:100=verde"

Figura 5. Registo de Artur na tarefa "Números em barrinhas"

Artur, tal como outros colegas, identificou a partição e agrupamento de unidades numa relação de dez vezes menor ou dez vezes maior, estando subjacente a estrutura do sistema de numeração decimal. É importante referir que foi a primeira vez que estas relações foram claramente identificadas pelos alunos.

Compreensão de grandeza e de densidade apoiada pela barra

Esta tarefa (Figura 6), resolvida no 4.º ano, envolvia a reconstrução da unidade dada uma parte e a construção de partes, menores e maiores que a unidade, a partir de diferentes representações simbólicas de número racional (sem o recurso a régua).

A figura seguinte representa 0,75 de uma tira de papel.

a) Como será a tira de papel completa? Desenha-a.

b) Representa agora 50%, $\frac{4}{3}$, 1,125 e 20% dessa mesma tira de papel.

50 %

$\frac{4}{3}$

1,125

20 %

Figura 6. Enunciado da tarefa "À descoberta da tira"
(Tarefa adaptada de Menezes, Rodrigues, Tavares, & Gomes, 2008)

Iremos centrar a análise no modo como os alunos representaram 1,125 e 20% da tira. Vários alunos representaram 1,125 tal como se apresenta na Figura 7: traçaram a barra completa, dividindo de seguida uma segunda barra em dez partes iguais, considerando depois 1,1 e, de seguida, considerando mais um pouco da tira, embora sem precisão. Este tipo de representação revela que os alunos têm uma perceção da grandeza do número racional apresentado.

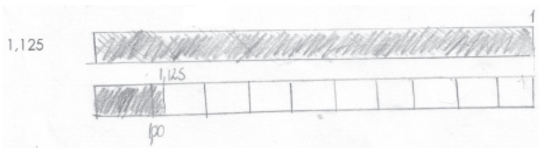


Figura 7. Representação de 1,125 realizada por Matilde,
na tarefa "À descoberta da tira"

André também representou 1,125 de modo semelhante ao apresentado na Figura 7. De modo a seguir uma estratégia mais eficiente para a representação do número, a investigadora sugeriu que André visualizasse a que parte da décima correspondiam as vinte e cinco milésimas, recorrendo à barrinha das milésimas. Ao pintar um quadrado correspondente a 0,25, usando a barrinha (tal como a parte assinalada a vermelho na Figura 4), André reconheceu de imediato que se tratava da quarta parte de uma décima, acrescentando: "Então terá que ficar mais ou menos esta unidade (décima) dividida em quatro partes".

Identificou a décima como unidade, dividindo-a em quatro partes iguais, pintando uma delas de modo a obter vinte e cinco milésimas (Figura 8). André fez uma mudança da unidade, da tira (1) para uma das partes obtidas após a divisão da tira em 10 partes iguais (0,1), reconhecendo a possibilidade de dividir também a nova unidade. Este reconhecimento é importante para a construção da compreensão da densidade no conjunto dos números racionais.

Figura 8. Representação de 1,125 realizada por André, na tarefa "À descoberta da tira"

Relativamente à última parte pedida, Manuel explica como representou 20% (ver Figura 9), evidenciando como usou a barra de modo bastante próximo da reta:

Manuel: Como eu já tinha assinalado os cinquenta por cento pensei que vinte e cinco por cento são metade dos cinquenta por cento. Depois pensei que, como também já tinha assinalado, para uma outra coisa, tinha assinalado uma décima, metade disso seria cinco. Então tirei cinco a esses vinte e cinco por cento e mais ou menos naquela zona fico com os vinte.

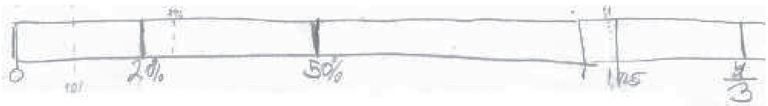


Figura 9. Registo realizado por Manuel, na tarefa "À descoberta da tira"

O uso que Manuel fez da barra evidencia o estabelecimento de múltiplas relações entre diferentes representações. Ao invés de traçar a parte pedida em cada situação, separadamente, o aluno utiliza a barra de modo semelhante a uma reta numérica. Esta integração de elementos da reta no modelo da barra foi consciente, pois referiu que "Primeiro desenhei a régua", referindo-se à reta.

No excerto apresentado, Manuel partilhou o seu processo de aproximação a 20%, usando como referência 50% para obter a sua metade, 25%. De seguida, para ter a noção do que representavam 5% na barra, usou a marcação já feita de uma décima, que havia registado como 10%, para identificar a sua metade, o que evidencia que reconhece que 5% será correspondente à metade de 1 décima.

De destacar que o modelo não foi usado pelos alunos como meio para representar números mas, principalmente, como meio para estabelecer relações entre números, para as quais a perceção da grandeza foi essencial. Essas relações são também evidência de algum reconhecimento de números racionais compreendidos entre dois números racionais já representados na barra, como é exemplo a localização de 1,125 entre 1,1 e realizada por Manuel, importante para a construção da noção de densidade.

Discussão

Através da análise de cinco episódios, procurámos compreender de que modo o uso de modelos contribui para a compreensão da noção de grandeza de um número racional e da densidade no conjunto dos números racionais. Centrámo-nos em episódios que ilustraram o recurso ao modelo da reta numérica, de grelhas 10×10 e 10×100 e da barra. O facto de terem sido analisados vários episódios ao longo da intervenção permitiu identificar uma mudança no modo como os alunos usaram os modelos que se relaciona com a sua própria construção da compreensão da noção de grandeza de um número racional e de densidade do conjunto dos números racionais.

Nos episódios iniciais, a reta numérica foi usada com o propósito de representar números racionais, possibilitando a interpretação de representações ainda pouco familiares aos alunos (como era o caso da representação em numeral decimal). Foi também o uso deste modelo que possibilitou um olhar centrado nos espaços compreendidos entre divisões já assinaladas na reta, nos quais nem sempre os alunos reconheceram a existência de números racionais.

Para a perceção da grandeza de um número, possibilitada através da localização de números racionais na reta numérica, revelou-se essencial o estabelecimento de relações entre diferentes representações simbólicas assim como a identificação da unidade de referência. Assim, um mesmo ponto da reta numérica foi associado a diferentes representações (e.g., $0{,}25 = \frac{1}{4} = 25\%$), aspeto fundamental para interpretar um mesmo número racional sob diferentes perspetivas (Tripathi, 2008). O facto de terem sido mobilizadas diferentes representações de números racionais possibilitou ainda o desenvolvimento de um sistema de números de referência.

Também o modelo da grelha 10×10 foi usado, numa fase inicial, como meio para representar números, permitindo a sua comparação. Contudo, na tarefa centrada neste modelo, surgiram evidências de que alguns alunos usaram as características subjacentes ao modelo para explicitar relações entre décima e centésima, e entre estas e a unidade, sem necessidade de usar efetivamente este modelo, que teve assim um papel importante na visualização da estrutura do sistema de numeração decimal, tal como sublinhado por Cramer et al. (2015). As relações estabelecidas são um indicador do reconhecimento, ainda que numa fase bastante inicial, do sistema de numeração decimal estendido ao conjunto dos números racionais, importante para a compreensão da propriedade densidade.

A estrutura do sistema de numeração decimal tornou-se ainda mais visível com o recurso ao modelo da grelha 10×100, ao permitir representar e relacionar unidade, décima, centésima, e milésima, possibilitando as relações de natureza multiplicativa tal como as ilustradas pela resposta de Artur (Figura 5).

Por fim, o modelo da barra foi usado com grande flexibilidade pelos alunos, refletindo as relações por eles estabelecidas entre diferentes representações simbólicas e entre estas e a representação icónica da barra. Tal como salientado por Middleton et al. (1998), este modelo revelou grande potencial para ser mobilizado de diferentes formas pelos alunos, evidenciando diferentes modos de relacionar os números.

O uso deste modelo pelos alunos revelou uma perceção da grandeza de um número racional, evidenciada, por exemplo, na representação de 1,125 ou nas relações entre diferentes números racionais, expressos em diferentes representações, realizadas por Manuel (Figura 9). As relações estabelecidas pelos alunos apontam também para alguma perceção de densidade, evidente quando relacionaram, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de 0,1 a 0,025 (no exemplo de André) ou 5% como metade de 0,1 (no exemplo de Manuel). Relacionado com este aspeto está o recurso a um sistema de números de referência que auxiliou os alunos na representação dos números racionais, assim como mudanças na unidade de referência considerada.

Os resultados mostram ainda que, numa fase inicial, os alunos sentiram necessidade de identificar a grandeza de números racionais de forma a compararem ou representarem esses números. Foi após revelarem alguma apropriação da noção de grandeza de número racional, que os alunos evidenciaram uma noção, ainda que preliminar, de densidade do conjunto dos números racionais, que assume por isso uma menor expressão na análise realizada.

Conclusão

O uso dos modelos focados neste artigo contribuiu para a construção da compreensão da noção de grandeza de número racional, evidenciada a nível (i) da identificação da unidade de referência, em particular ao ser apresentada a reta numérica graduada de 0 a 5; (ii) da mudança da unidade de referência, igualmente importante para a compreensão da propriedade densidade; (iii) do uso de diferentes representações para expressar um mesmo número; (iv) do recurso de números de referência, especificamente 100% (unidade), $50\% = 0,5 = \frac{1}{2}, 25\% = 0,25 = \frac{1}{4}$ e 0,1; e (v) das relações de ordem estabelecidas entre diferentes números racionais. No que diz respeito ao contributo para a construção da compreensão da propriedade densidade, foi possível identificar que os modelos promoveram o reconhecimento da existência de um número racional entre dois números racionais e o reconhecimento da possibilidade de progressivas divisões das unidades por 10, essenciais no sistema de numeração decimal estendido a este conjunto numérico.

Estas conclusões constituem indicadores da compreensão de número racional, uma vez que, tanto a noção de grandeza de número racional, como a de densidade deste conjunto numérico, estão estreitamente relacionadas com a própria compreensão de número racional. Neste sentido, destacamos a perspetiva de continuidade entre a aprendizagem dos números inteiros e a dos números racionais, enfatizada pela teoria integrada de desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011), baseada no uso de modelos, como promotora de uma abordagem aos números racionais, com compreensão, no 1.º ciclo.

Notas

1 Neste artigo, sempre que nos referimos a "números inteiros" estamos a considerar números inteiros não negativos.

2 Usamos o termo "numeral decimal" para identificar números racionais não negativos escritos de acordo com o sistema de numeração decimal, utilizando vírgula ou ponto.

3 No original ". . . to sense the general size (or magnitude) of a given number".

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/108341/2015).

Referências

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2010). *Números e operações: 1.º Ano*. Lisboa: DGIDC. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/5144.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 127–138.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). New York, NY: Routledge.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Colum, K., Wiley, B., & Wyberg, T. (2015). Five indicators of decimal understandings. *Teaching Children Mathematics, 22*(3), 186–195.

Cramer, K. A., Monson, D. S., Wyberg, T., Leavitt, S., & Whitney, S. B. (2009). Models for initial decimal ideas. *Teaching Children Mathematics*, *16*(2), 106–117.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21–29.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17–51). London: Routledge.

Harnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction, 8*(4), 341–374.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170–193.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics – 2001 Yearbook.* (pp. 146–165). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction, 37,* 14–20.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para o 5.º ano.* Lisboa: DGIDC.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 302–312.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89–108.

Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 137–158). Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77–98.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º* ciclo do ensino *básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Prediger, S. (2013). Focussing structural relations in the bar board: A design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (TWG2, CERME8) (pp. 343–352). Antalya, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology, 68,* 187–213.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Scheiner, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503–518.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147–165) London: Routledge/Falmer.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21,* 676–685.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010) How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9–35.

van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61,* 99–108.

Wang, Y., & Siegler, R. S. (2013) Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin*, *58*(36), 4630–4640.