

Editorial

Contributos da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da geometria

Contributes from research in teaching and learning geometry

Angel Gutiérrez

Departamento de didática da matemática,
Faculdade de Magisterio, Universitat de València, España
angel.gutierrez@uv.es

Leonor Santos

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
mlsantos@ie.ulisboa.pt

Dadas as recentes mudanças dos currículos oficiais de matemática em numerosos países de todos os continentes, mantem-se viva a discussão entre professores de matemática dos diversos níveis de ensino e investigadores em educação matemática sobre como deve ser a aprendizagem da matemática e como se deve ensinar para promover essa aprendizagem. Esta dupla questão admite diversas abordagens.

Uma delas é o ponto de vista profissional e o da investigação. Os professores, em geral, focam-se em aspetos práticos e quotidianos, resultantes da experiência produzida pela sua prática docente diária. Já os investigadores centram-se na elaboração e experimentação de propostas, baseadas em análises teóricas, que forneçam informações válidas sobre como se produz a aprendizagem matemática que seja útil para o maior número possível de professores e alunos. Criticam-se os investigadores por desconhecerem a realidade das salas de aula e por muitas das suas propostas não poderem ser levadas à prática. Isto é parcialmente correto uma vez que uma parte da investigação em educação matemática é intuir o futuro e criar ferramentas que permitam, quando chegar esse momento, formar adequadamente os novos professores e atualizar o conhecimento do corpo docente atual. Contudo, a investigação em educação matemática também se centra em problemas atuais e trata de oferecer soluções realistas e aplicáveis em salas de aula comuns. Uma ilustração do que acabamos de afirmar são os artigos deste número temático que combinam investigação com atividades docentes concretas.

Outra abordagem importante é a respeitante aos conteúdos que os alunos devem aprender nos diferentes níveis de ensino, fortemente relacionada com as reformas curriculares que acontecem periodicamente em quase todos os países. Apesar dos enormes avanços científicos e tecnológicos realizados desde a segunda metade do século XX, e sobretudo nas últimas décadas, a maioria dos sistemas educativos continuam a considerar como elementos principais da matemática escolar as operações aritméticas e, posteriormente, as algébricas. Esta opção parece ignorar a importância educativa, cultural e social de outras áreas da matemática, como seja a geometria (ver artigo de Clements et al. neste número da revista *Quadrante*) que deveria constituir uma ferramenta imprescindível para o estudo das demais áreas da matemática e para a aplicação a outras ciências, assim como um contexto muito adequado para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, necessário para os indivíduos se desenvolverem apropriadamente ao longo da sua vida em contextos familiar, social e profissional.

Há diversas agendas para a investigação em educação geométrica (Jones & Tzekaki, 2016; Sinclair, Cirillo, & De Villiers, 2017; Sinclair et al., 2017), algumas das quais se situam os artigos deste número. Uma destas agendas centra-se no raciocínio espacial, entendido como “a capacidade para ‘ver’, analisar e refletir sobre objetos, imagens, relações e transformações espaciais” (Battista, 2007, p. 843), no qual se incluem nomeadamente conhecimentos, capacidades mentais, e estratégias de resolução de problemas, relacionados com o espaço. O raciocínio espacial é necessário para a aprendizagem da geometria tridimensional em todos os ciclos de ensino, mas também de outros conteúdos matemáticos (em particular da geometria plana) e de outras áreas em que as representações tridimensionais ocupam um lugar importante para trabalhar conteúdos, propriedades e relações, como as ciências experimentais, as engenharias, as ciências sociais, a medicina, etc.

Os marcos teóricos em que se apoia a investigação sobre o ensino e a aprendizagem da geometria é um elemento central desta investigação. Atualmente, diversos marcos teóricos proporcionam propostas de organização didática da geometria, ajudam a desenvolver metodologias de ensino e a compreender os processos de raciocínio e de resolução de problemas dos alunos. Entre estes, o modelo de raciocínio de Van Hiele continua a ser o mais relevante. Ajuda-nos tanto a avaliar os processos de raciocínio dos alunos, como a organizar um ensino da geometria que promova o desenvolvimento do raciocínio matemático e de uma aprendizagem com compreensão de novos conceitos, relações e propriedades geométricas (Van Hiele, 1986).

Também os estudos realizados por Duval deram lugar a numerosas publicações que apresentam os contributos deles emergentes. Entre estes, destacam-se as suas análises dos tipos de processos cognitivos que se desenvolvem durante a atividade geométrica (visualização, construção e raciocínio) e as formas de perceber, transformar e utilizar as figuras geométricas, que denomina como apreensões perceptiva, discursiva e operativa (Duval, 1998).

A intuição joga um papel central na atividade matemática em todos os níveis etários, desde as crianças da educação de infância aos matemáticos. Em particular, os contextos

geométricos e as figuras e suas manipulações (por exemplo utilizando *software* de geometria dinâmica) são uma fonte de ideias intuitivas que os alunos devem converter em ideias matemática e em argumentos convincentes. Deste modo, é também necessário mencionar a obra de Fischbein (1987, p. x), na qual “uma intuição é uma concepção cristalizada – muitas vezes construída prematuramente – em que a incompletude ou a imprecisão da informação é mascarada por mecanismos especiais para produzir a sensação de imediatismo, coerência e confiança”. Fischbein apresenta uma análise detalhada dos diferentes tipos de intuição e das suas relações com a convicção e conhecimento intuitivo (aquele que parece evidente por si mesmo).

Uma parte da herança recebida da Grécia clássica na nossa cultura atual do mundo ocidental é a organização da matemática escolar e, em particular, que o ensino e a aprendizagem da demonstração matemática se baseiam sobretudo em contextos geométricos. A investigação didática sobre a aprendizagem da demonstração é uma das mais ativas na atualidade, nela se incluindo desde estudos teóricos de tipo epistemológico ou cognitivo até propostas pedagógicas em contexto escolar. Algumas publicações recentes, como Boero (2007) e Stylianides (2016), centram-se no estudo da aprendizagem da demonstração de alunos dos ensinos básico e do secundário.

O surgimento, a partir da década de oitenta do séc. XX, de uma diversidade de *software* educativo, em especial de ambientes de geometria dinâmica (AGD), de representação gráfica de funções e de cálculo algébrico simbólico (CAS), pressupõe o início de uma nova era no ensino e aprendizagem da matemática. Em particular, os resultados da investigação em educação matemática evidenciam que o uso adequado de AGD constitui uma ferramenta que apela à revolução do ensino da geometria (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Sträesser, 2006). Sem dúvida que o uso adequado deste *software* por professores e alunos ajuda a compreender os conceitos geométricos e suas propriedades, e a identificar, formular e demonstrar conjecturas. Neste número da revista *Quadrante* há exemplos de estudos desenvolvidos em contextos tecnológicos que evidenciam como tirar partido das potencialidades dos AGD ou de outras aplicações informáticas em sala de aula dos ensinos básico e secundário.

O presente número da revista *Quadrante* é constituído por seis artigos que relatam investigações realizadas em contextos de ensino e aprendizagem da geometria em diversos níveis de ensino, desde a educação de infância até ao ensino superior, incluindo ainda a formação inicial de professores.

O primeiro artigo, de Douglas H. Clements, Julie Sarama, Sudha Swaminathan, Deborah Weber, e de Jeffrey Trawick-Smith, intitulado “O ensino e a aprendizagem da Geometria: Princípios fundamentais”, parte da assunção de que a geometria e o pensamento espacial são pouco considerados na prática de ensino da matemática das crianças, contrariando os resultados da investigação que destacam a sua importância para o desenvolvimento matemático desse grupo etário. São analisados os resultados de três estudos, que se focam, respetivamente, nos processos de aprendizagem das crianças quando desenvolvem a cognição visual e as capacidades geométricas nelas associadas, numa abordagem curricular assente em trajetórias de aprendizagem e ainda no discurso

matemático do professor e os seus impactos na aquisição pelas crianças de conceitos matemáticos. Os resultados obtidos apontam que as crianças são capazes de aprender ideias e processos geométricos com um nível e profundidade surpreendentes. Para tal, é importante que os educadores façam recurso a uma variedade de tarefas interessantes, baseadas em trajetórias de aprendizagem, proporcionando às crianças experiências matemáticas com diversas classes de formas, usando exemplos e contraexemplos e comparando-os para que as crianças captem os seus atributos críticos. As crianças devem ainda ser encorajadas a desenvolver a sua linguagem através da comunicação matemática.

No âmbito de um projeto que tinha por propósito explorar as conexões entre a matemática e a dança, Ana Paula Canavarro e Mercedes Prieto apresentam-nos um artigo intitulado “Desenvolvimento do sentido espacial através do uso de representações múltiplas no contexto da dança tradicional: uma experiência de ensino no 1º ciclo de escolaridade”. O estudo tinha como objetivo analisar em que medida os alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade desenvolvem o sentido espacial através do uso de representações múltiplas emergentes na resolução de tarefas matemáticas desafiantes, associadas à execução de dança tradicional. Os resultados obtidos apontam para que a experiência de ensino permitiu desenvolver nas crianças o sentido espacial, nomeadamente a compreensão global dos objetos geométricos convocados e das suas propriedades e relações, das rotações e reflexões, embora com níveis distintos de consecução. A localização e a orientação espacial foram outras capacidades associadas ao sentido espacial evidenciadas pelas crianças.

No contexto da educação pré-escolar, Maia João Nunes e Margarida Rodrigues apresentam um artigo intitulado “Compondo e desenhando formas tridimensionais: Um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos”. O estudo desenvolvido teve por objetivo caracterizar o raciocínio espacial de um grupo de nove crianças de 5 anos de idade de uma turma, através da análise das suas estratégias na composição e desenho de formas tridimensionais. Na composição das formas tridimensionais, os resultados evidenciam que as crianças participantes utilizam estratégias envolvendo a intencionalidade e a antecipação, correspondendo aos níveis compositor de formas e compositor de substituição. Nos desenhos das referidas composições, as crianças evidenciam a capacidade de perceber relações espaciais, ao adotarem uma abordagem parcial em que atendem às posições relativas de cubos como partes distintas de tetracubos.

Focando-se em diversos aspetos do objeto matemático ângulo, Leonor Camargo Uribe, Sandra Jiménez Ardila e Viviana Salazar Fino são autores do artigo intitulado “Interpretaciones de niños de 4.º de primaria relativas al ángulo”. Partindo de uma perspectiva semiótica de aprendizagem, e destacando a construção de significado de ângulo, os participantes deste estudo foram alunos do 4.º ano do 1.º ciclo (9 e 10 anos) a quem foi aplicada uma sequência intencional de tarefas. Da experiência de ensino desenvolvida, sujeita a uma fase de planificação, de experimentação e de análise, ressalta a importância de promover espaços de interação discursiva onde os alunos tenham oportunidade para apresentar os seus significados pessoais, bem como

desenvolver coletivamente significados próximos dos da comunidade matemática de referência.

Samuel Antonini é o autor do artigo intitulado “Conceitos figurativos na prova por redução ao absurdo”, que estuda os processos envolvidos no tratamento das figuras geométricas na prova por redução ao absurdo. Neste artigo, o autor parte de dois quadros teóricos – o da Unidade Cognitiva e o do Conceito Figurativo – e toma por base diversos estudos que envolvem alunos dos 12.º e 13.º anos e do ensino superior. Os resultados evidenciam que os alunos lidam com o absurdo através de diferentes formas, identificando-se diferenças entre uma prova por redução ao absurdo e a argumentação indireta. No primeiro caso, perante o absurdo, a contradição, as figuras geométricas são rejeitadas de forma a eliminá-lo. No segundo, as figuras são modificadas, restaurando-se a harmonia do raciocínio.

No contexto de uma unidade curricular de geometria do 2.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica, envolvendo uma experiência de formação que respeita um ensino de natureza exploratória, Lina Brunheira e João Pedro da Ponte apresentam-nos um artigo, intitulado “Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras”, que relata um estudo sobre a construção de definições. Em particular, procurou-se saber quais as características sobre a definição de figuras geométricas a que os futuros professores atendem quando selecionam e constroem definições e como se relaciona a estruturação espacial e geométrica das figuras com o processo de definir. Os resultados obtidos apontam para que no início da unidade, as participantes consideravam uma definição válida sempre que a condição fosse necessária, sem ter em conta que esta deveria ser também suficiente. A construção de definições revelou-se significativamente desafiante para as futuras professoras e educadoras, que manifestaram algumas dificuldades na aceitação do carácter inclusivo das definições e, principalmente, na construção de definições inclusivas e económicas. Foi verificada uma influência mútua entre a estruturação espacial e geométrica e o processo de definir, tendo-se registado uma evolução mútua de ambas. A construção de definições das figuras promoveu a articulação entre as definições e a sua classificação.

Referências

- Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA, USA: NCTM.
- Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers..
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 109-149). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Sträesser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: a survey of recent research. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 277-287). Cham, Switzerland: Springer.
- Sinclair, N., Cirillo, M., & De Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 457-488). Reston, VA, USA: NCTM.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford, UK: Oxford U. P.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. London, UK: Academic Press.