Interpretaciones de niños de 4.º de primaria relativas al ángulo

Interpretations of 4^{th} grade students about angle

Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Sandra Jiménez Ardila
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
mdma_smjimeneza903@pedagogica.edu.co

Viviana Salazar Fino
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
Mdma_vpsalazarf298@pedagogica.edu.co

Abstract. In this article, we present the analysis of fragments of some grade 4 students' interactions over a class related to their interpretations of different aspects of angle (constitutive elements, conceptual image, representations, measurable attribute, and unit of measurement). We intend to point out the complexity of meaning making in the mathematics classroom. We express the need to devote class time to promote discursive interactions, to allow children express their personal meanings, to advance collectively towards meanings close to those established by the mathematical community, even though the number of teaching' contents might diminish.
Keywords: angle; interpretation; personal meaning; mathematical meaning; semiotic perspective.

Resumo. Neste artigo apresentamos a análise de excertos de interações em sala de aula relacionadas com interpretações de crianças do 4.º ano de escolaridade referentes ao objeto matemático ângulo (elementos constitutivos, imagem conceptual, representações, atributo mensurável e unidade de medida). Pretendemos assinalar a complexidade da construção de significado na sala de aula de matemática. Destacamos a necessidade de reservar tempo para promover espaços de interação discursiva que permita às crianças expressarem os seus significados pessoais e evoluírem coletivamente para significados próximos dos estabelecidos pela comunidade matemática de referência, ainda que em detrimento da quantidade dos conteúdos matemáticos a ensinar.
Palavras-chave: ângulo; interpretações; significado pessoal; significado matemático; perspetiva semiótica.

(Recebido em setembro de 2017, aceite para publicação em maio de 2018)

Introducción

El significado es una necesidad primordial de los seres humanos y se constituye en la fuerza conductora de su actividad intelectual (Sfard, 2001). Es entendido como el conjunto de ideas que se conciben respecto de algo y que permiten apreciarlo, juzgarlo y establecer vínculos de este con otros (ideas, cosas, personas). Se construye en el curso de la comunicación entre seres humanos y consigo mismo, a través de signos.

Al referirnos a los signos señalamos que "los significados que se pretende que los signos acarreen son construidos de manera conjunta por emisor y receptor a través de sus propios procesos de interpretación" (Sáenz-Ludlow & Kadunz, 2016, p. 2). Esto quiere decir que, en la comunicación, no hay un paso directo del mensaje emitido a través de un signo al mensaje recibido; tampoco lo hay del mensaje recibido al mensaje que se emite en respuesta. Es a través de la interpretación cuando cada uno construye y refina significados personales, como resultado de la producción y uso de signos, acerca de aquello que comunicamos.

Dado que en el aula de clase se llevan a cabo primordialmente actos comunicativos, el aprendizaje es un proceso de interpretación en el cual se espera, para el caso de las matemáticas, que los estudiantes construyan y reconstruyan conjuntamente significados de objetos matemáticos en el curso de la comunicación. Si ellos están motivados y son bien dirigidos, tales significados se refinan de manera progresiva para aproximarse a los significados objetivos de la comunidad de discurso que son el foco del intercambio matemático (Sáenz-Ludlow & Kadunz, 2016).

Infortunadamente, la comunicación en el aula no está exenta de problemas y, con mucha frecuencia, hay cortocircuitos, no siempre reconocidos por el profesor, que llevan a los estudiantes a construir significados diferentes a los significados pretendidos. Esto se debe entre otras razones a que: (1) en el aula conviven múltiples significados personales; (2) lo que un estudiante o el profesor dice respecto a un objeto matemático no necesariamente corresponde a la interpretación que tiene de este; y (3) lo que el profesor o los estudiantes interpretan no siempre coincide con lo que el hablante pretendía.

Esta problemática es señalada por diversos investigadores que, desde diferentes ópticas, han buscado promover la construcción de significados en el aula (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2010; Camargo et al., 2015; Godino & Llinares, 2000; Radford, 2000; Robles, Del Castillo, & Font, 2010; Sáenz-Ludlow & Kadunz, 2016). Para el caso específico del objeto geométrico ángulo, la investigación ha mostrado que la construcción de su significado requiere atender diferentes aspectos relacionados, entre otros asuntos, con el acercamiento conceptual, las representaciones y la medida (Casas & Luengo, 2005; Close, 1982; Dohrmann, 2017; Fyhn, 2007; Kieran, 1986; Millsaps, 2012; Mitchelmore & White, 1998, 2000, 2003; Munier & Merle, 2009; Rotaeche & Montiel, 2017; Tanguay & Venant, 2016).

Tomando en consideración los resultados investigativos señalados previamente, nos propusimos ahondar en la problemática de la construcción de significado de ángulo. Para ello, diseñamos e implementamos una secuencia de enseñanza para estudiantes de grado 4.° de primaria (9-11 años) y nos preguntamos cuáles serían las interpretaciones de los estudiantes, promovidas en la interacción comunicativa. En el presente artículo mostramos el análisis realizado a algunos fragmentos de diálogos, entre una profesora y un grupo de estudiantes, en los que ella intenta promover la construcción de significado de los objetos rayo y ángulo, a partir de los significados que los niños manifiestan en sus intervenciones. Como conclusión, presentamos algunos aspectos de la complejidad de esta misión y destacamos elementos de la construcción de significado de ambos objetos sobre los que hay que tener especial cuidado y dedicar suficiente tiempo para lograr una aproximación a los significados pretendidos.

Una perspectiva semiótica sobre el aprendizaje

Concebimos que la cognición humana está inevitablemente mediada por diferentes sistemas de signos socioculturales. Por tanto, la interacción social que tiene lugar en el aula para construir significado es actividad semiótica. Dada la importancia que tiene la mente que interpreta en el proceso de construcción de significado, para seguirle el rastro a dicho proceso en el aula es pertinente un acercamiento que destaque el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Recurrimos a la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basándose en la teoría del signo triádico de Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean y usan "signos" (Figura 1).

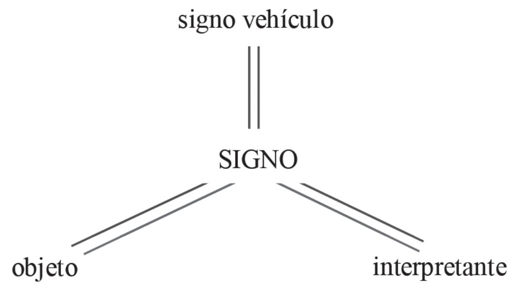


Figura 1. Diagrama de la estructura general del SIGNO

El "signo" de Peirce, denotado como SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger, refiere a una relación triádica, resultado de la integración de tres relaciones diádicas, en la que se articulan un *objeto*, una representación del objeto o *signo vehículo* (e. g., gesto, palabra, gráfico, etc.) y una interpretación (*interpretante*) del objeto que es lo que el signo vehículo produce en la mente de quien lo percibe e interpreta. El diagrama de la figura 1 es una representación icónica de la estructura general del SIGNO. La Y invertida permite capturar los tres componentes del SIGNO y sus tres relaciones diádicas representadas en diferente color.

En la perspectiva de Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) no solamente se involucra la idea de SIGNO sino también la diferenciación que hace Peirce de tres objetos:

- *Objeto Real* (*OR*): objeto que acepta la comunidad de discurso dentro del cual tiene lugar el acto semiótico. En el caso que nos ocupa, nos referimos al *Objeto Real Matemático* (*ORM*), de naturaleza social, cultural e histórica.

- *objeto dinámico* (*od*): interpretación idiosincrática del *OR*, generada en la mente del intérprete cuando recibe un signo vehículo y lo interpreta.

- *objeto inmediato* (*oi*): es un aspecto específico del *OR* que se codifica y se expresa en un signo vehículo.

El aporte distintivo de Peirce a la noción tradicional de signo está en la inclusión fundamental de la mente que interpreta, lo que destaca que la comunicación no es un proceso inmediato que permita pasar de manera directa un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente "objetivos" y asociados a aquellos objetos en los que se enfocan los signos vehículos que median la comunicación. En cambio, es un proceso mediado e indirecto en el que la construcción de interpretantes de las personas involucradas es imprescindible y desempeña un papel preponderante.

Según la perspectiva planteada, entendemos por *construcción de significado* el proceso de interpretación intra e interpersonal a través del cual se busca la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia objetos inmediatos pretendidos del profesor, convergencia de la cual se puede tener alguna noticia durante la comunicación con base en los objetos inmediatos que los estudiantes acarrean en sus signos vehículos. El *significado subjetivo o personal* que da un estudiante a un *ORM* es la integración de significados personales parciales y provisionales que continúa formando, reformando y precisando en la comunicación, gracias a los objetos dinámicos.

Construcción de significado de ángulo

El ángulo es uno de los *ORM* más multifacéticos. En la historia de las matemáticas y en las aproximaciones curriculares es posible reconocer diversas definiciones, algunas de las cuales enfatizan en aspectos estáticos del objeto y otras en aspectos dinámicos del mismo (Casas & Luengo, 2005; Close, 1982; Fyhn, 2007; Kieran, 1986; Mitchelmore & White, 2000; Munier & Merle, 2009; Rotaeche & Montiel, 2017). Su naturaleza multifacética hace del ángulo un objeto importante y central en matemáticas, pero difícil de aprender. Los estudiantes deben integrar en su interpretación a lo largo de su vida escolar las diversas facetas que están presentes en el currículo.

Usualmente, la faceta que predomina en los primeros años de escolaridad es la que considera un ángulo como la "cantidad de giro" de un rayo alrededor de su origen (Dohrmann, 2017; Rotaeche & Montiel, 2017). Se asume que esta faceta permite a los niños comenzar a construir el significado de ángulo asociado a experiencias cotidianas de movimiento corporal o de objetos como puertas y tijeras. Esta faceta se retoma en algunos cursos de secundaria cuando se trabajan movimientos en el plano y posteriormente en la enseñanza media al estudiar trigonometría. Simultáneamente en educación básica primaria y secundaria se aborda una faceta estática, acercamiento que se liga al trabajo en geometría euclidiana.

En nuestra investigación, adoptamos la aproximación estática de ángulo, no sólo porque Mitchelmore y White (2003) alertan sobre la dificultad que tienen los niños para identificar las partes de un ángulo en situaciones de giro, sino porque estamos interesadas en un acercamiento euclidiano que siente las bases para la enseñanza de figuras geométricas y sus componentes. Con esta aproximación, caracterizamos el *ORM* y los objetos inmediatos pretendidos del profesor, de la siguiente forma:

ORM: el ángulo, en una faceta estática como la figura geométrica conformada por dos rayos de origen común.

Objetos inmediatos pretendidos:
oi-1: elementos constitutivos del ángulo (rayo y vértice).
oi-2: representaciones del ángulo.
oi-3: atributo medible de un ángulo.
oi-4: unidad de medida de un ángulo.

El interés de enfocar el estudio en los elementos constitutivos se sustenta en la idea de Vergnaud (1990) quien señala que este es uno de los aspectos centrales de la conceptualización de un objeto matemático. Nos centramos también en las representaciones gráficas y simbólicas pues, como lo señalan D'Amore, Fandiño y Iori (2013) y Rotaeche y Montiel (2017) son esenciales para aproximar a los estudiantes al objeto matemático. Y también vimos pertinente dirigir la atención en el atributo medible del ángulo y en su unidad de medida, porque el reconocimiento de la amplitud, como atributo esencial, contribuye a su interpretación (Millsaps, 2012; Mitchelmore & White, 2000; Rotaeche & Montiel, 2017; Tanguay & Venant, 2016).

Metodología

El estudio hace parte de una investigación de diseño que apoya una innovación curricular en una institución educativa (Gravemeijer, 2016). Esta se desarrolló en tres fases: planeación, experimentación y análisis. A continuación, damos información sobre algunas de las actividades realizadas, aunque en el artículo nos centramos en el análisis de las interpretaciones que se hacen explícitas en los diálogos sostenidos en clase y no en la evaluación del aprendizaje o la validación de la secuencia de enseñanza. Consideramos importante enfocar la atención en las interpretaciones como elemento de reflexión y posible punto de partida de posteriores intervenciones en el aula.

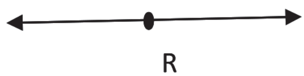
Fase de planeación

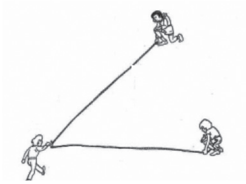
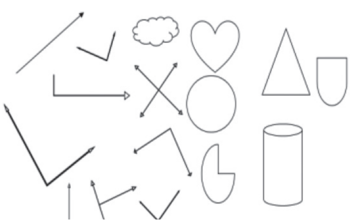
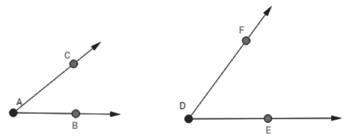
Como ya dijimos, optamos por basar la secuencia de enseñanza en un acercamiento estático al ángulo. Fundamentadas en la perspectiva semiótica que proponen Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) y en las propuestas para la construcción significativa de ángulo (Millsaps, 2012; Mitchelmore & White, 1998; Rotaeche & Montiel, 2017), diseñamos una ruta de enseñanza en la que conjeturamos que las tareas propuestas permitirían a los niños comunicar sus interpretaciones acerca de las partes constitutivas de un ángulo, algunas representaciones gráficas y simbólicas, el atributo medible y el grado como unidad de medida de amplitud. En la Tabla 1 presentamos algunas de las 14 tareas previstas. La secuencia completa se puede consultar en Jiménez y Salazar (2016).

Las tareas "Puntillismo" y "Rayo" buscan abrir el espacio para centrar la atención en el punto, como objeto geométrico a partir del cual se pueden representar figuras, y del rayo como subconjunto de la recta determinado por un punto de esta. Junto con una tarea intermedia entre estas dos, relacionada con la representación de rectas, pretende que los estudiantes expresen sus ideas acerca de lo que es un rayo y su caracterización en función de la dirección de la recta que lo contiene y el sentido determinado por el subconjunto de la recta elegido.

La tarea "Ángulo" invita a los niños a representar un ángulo con material concreto y con papel y lápiz. Se propone después de una discusión impulsada por la profesora en donde les pide a los niños que expliquen qué es para ellos un ángulo. Ella busca que asocien los rayos con lazos empleados en la representación concreta y el nudo con el que unieron los lazos, con el vértice. Las diferentes representaciones hechas por los niños se emplean para explicitar interpretaciones sobre cuáles objetos determinan un ángulo (dos rayos) y qué propiedad deben cumplir (origen común). Es el momento para enfatizar en el significado de la flecha con la que se representan los rayos constitutivos del ángulo. La tabla siguiente (Tabla 1) presenta algunas tareas de la secuencia de enseñanza sobre el ángulo, propuestas a les estudiantes.

Tabla 1. Algunas tareas de la secuencia de enseñanza sobre el ángulo, propuestas a estudiantes de grado 4°

Puntillismo	**Rayo**
Discute con tus compañeros la técnica empleada en dibujar el siguiente cuadro.  Usa la técnica para dibujar la inicial de tu nombre.	Propón lo que entiendes por rayo. Luego, observa la siguiente representación y destaca con un color los puntos que están al mismo lado de *R*.  Discute con tus compañeros cómo nos podemos referir a los puntos que están al mismo lado de *R*, qué significa que los puntos estén en la misma dirección y que estén en el mismo sentido.

Ángulo	**Representación figural**
Forma un grupo de tres niños y luego con ellos usa un lazo para representar un ángulo utilizando dos cuerdas que partan de un mismo lugar. Dibuja la figura y escribe sus características. 	Resalta con color azul figuras que son ángulos y con rojo figuras que no son ángulos. 
Representación simbólica	**Atributo medible**
Discute con tus compañeros diversas maneras de nombrar el ángulo representado. 	Discute con tus compañeros ¿Qué hace diferente a estos dos ángulos? 
El grado	**Ángulos de diversas medidas**
Imagina una circunferencia dividida en 360 partes iguales. Cada una de estas partes se llama grado. ¿Cómo hacemos para representar un ángulo de 10°?	[Se entrega a los niños cuñas de 10°, 30°, 45°, 60° y 90°] Usa las cuñas para representar ángulos de 40°, 100° 15° y 50°.

Las tareas "Representación figural" y "Representación simbólica" pretenden discutir posibles formas de representar un ángulo e identificar ángulos en configuraciones complejas, como el caso de dos rectas que se intersecan. La profesora introduce la representación simbólica y promueve una discusión sobre qué objeto se representa con $\angle A$, $\angle DAE$, $\angle EDA$, $\angle AED$ o $\angle ADE$.

Con la tarea "Atributo medible" la profesora impulsa un diálogo relacionado con la pregunta ¿qué se le mide a un ángulo? Se discute si el tamaño de los segmentos usados para representar los rayos es lo que determina si uno es más grande que otro, si lo es la distancia entre el origen y un punto resaltado en uno de los rayos o la distancia entre dos puntos, uno en cada rayo.

Las tareas "El grado" y "Ángulos de diversas medidas" son propuestas para lograr interpretaciones iniciales a la unidad de medida, buscando su relación con un sector circular. El uso de cuñas de cartón para representar diferentes ángulos, como sugieren Saa, Carrillo, Alarcón, Pelegrín, Sánchez y Carrillo (1990), permite la comparación de la amplitud, sin la dificultad inherente al uso del transportador, el cual se introduce posteriormente.

La preparación de la secuencia de enseñanza, la selección del grupo específico de niños con el cuál se trabajó, la fundamentación de la profesora (tercera autora) en la perspectiva semiótica y las previsiones para el registro de la información (videograbación de las clases y registro de notas de campo por parte de la profesora) constituyeron la fase de planeación.

Fase de experimentación

La secuencia de enseñanza se implementó en un grupo de 4.° grado cuyas matemáticas eran orientadas por la profesora miembro del equipo de investigación. Estaba conformado por 39 niños. Se desarrolló en cinco sesiones de 90 minutos, una vez por semana, en los meses de octubre y noviembre, finalizando el año escolar.

Al terminar cada sesión, el equipo de investigación (las tres autoras del artículo) revisábamos la videograbación, discutíamos aspectos relacionados con el funcionamiento de las tareas, preveíamos ajustes a las tareas de la siguiente sesión y discutíamos acerca de posibles interpretaciones sobre los *objetos inmediatos* pretendidos (rayo, ángulo, atributo medible, grado) y sobre los *objetos dinámicos* que inferíamos en los significados personales expresados por los niños y sus posibles acercamientos a los objetos inmediatos pretendidos.

Fase de análisis

Las videograbaciones fueron transcritas y enriquecidas con anotaciones procedentes de las observaciones hechas por la profesora al terminar cada sesión. También se incluyeron fotos del tablero y de producciones de los niños consignadas en sus cuadernos o en cartulinas.

La transcripción de cada video se dividió en fragmentos, según identificábamos la interpretación hecha por algún o algunos niños sobre los objetos geométricos involucrados. Cada fragmento constituyó una unidad temática, con sentido completo, en el que la interacción comunicativa aludía a la interpretación detectada. En algunos casos, segmentos de interacción hicieron parte de más de un fragmento pues aludían a la interpretación de más de un objeto.

Una vez constituidos los fragmentos, nos dimos a la tarea de analizar las interpretaciones, buscando llegar a un acuerdo sobre los objetos inmediatos pretendidos por el profesor, los objetos inmediatos enunciados en los signos vehículos (*oi*), los objetos dinámicos (*od*) de los estudiantes y la relación entre unos y otros (para referirnos a la interpretación de un estudiante, usamos tres letras del nombre, antecedidas del símbolo *od*-). En la siguiente sesión presentamos el análisis de algunos fragmentos.

Análisis

Organizamos la presentación en narraciones referidas a los cuatro objetos inmediatos pretendidos: rayo, representación, atributo medible y unidad de medida. Rompemos la secuencia temporal de las transcripciones para centrar la atención en la diversidad de interpretaciones detectadas a lo largo de la secuencia de enseñanza.

Rayo

Identificamos cuatro interpretaciones de rayo: (i) fenómeno eléctrico, (ii) subconjunto de la recta, (iii) subconjunto de la recta con comienzo, pero sin fin, y (iv) objeto geométrico cuya longitud no se puede determinar.

Fenómeno eléctrico

La primera mención al objeto rayo (*oi*-1) se hace en la primera clase, cuando la profesora propone tareas relacionadas con los elementos constitutivos del ángulo. Después de haber introducido el punto y la recta como una línea que se extiende en una sola dirección, la profesora pregunta a los niños si alguno sabe qué es un rayo. A pesar de estar en clase de matemáticas, los niños manifiestan los significados cotidianos del término: "un rayo es, por ejemplo, un rayo de luz" (Mateo), "los rayos son una tormenta que parece una [letra] z"[1] (Nicole).

Mateo interpreta el rayo como una forma lineal, quizás unidimensional, parecida a un haz de luz (*od-Mat-1*) mientras que Nicole asocia el término con una forma rectilínea que cambia de dirección a trozos, como un zig-zag (*od-Nic-1*). Ambos niños ejemplifican su idea de rayo con fenómenos de propagación de luz en los que subyace un sentido del movimiento, aunque en sus signos vehículos no aluden explícitamente a este.

Subconjunto de la recta

La profesora busca ubicar las interpretaciones en el discurso matemático: "Muy bien, todos esos ejemplos los utilizamos para nombrar fenómenos que denominamos rayo. Pero en matemáticas, vamos a denominar rayo a una figura geométrica, que es parte de una recta." Acompaña este signo vehículo con una representación en el tablero de una recta y un punto *R* (Figura 2).

Figura 2. Representación de una recta con un punto *R* que hace la profesora en el tablero

Se dirige a los niños: "Quiero señalar todos los puntos que estén en el mismo sentido sobre esta recta ¿Cómo hago para destacar los puntos de esa recta que van en un solo sentido?". La profesora pretende enfocar la atención de los estudiantes en uno de los subconjuntos de la recta determinados por el punto *R.* Sin embargo, con su signo vehículo no alude a cuál es uno de los dos subconjuntos sino al procedimiento para destacar ciertos puntos.

La interpretación del signo vehículo de la profesora lleva a Mateo a sugerirle: “Puedes poner un punto en la parte de allá (señala a la izquierda del punto *R*) y empezarlo a correr hacia la otra parte [hacia la derecha] y así solo formarías un solo sentido”. Suponemos que interpreta la pregunta de la profesora como la búsqueda de una forma para hacer que todos los puntos de la representación de la recta queden en un mismo sentido. La profesora le pide que explique su idea. Mateo pasa al tablero y ocurre la siguiente interacción entre él y Nicole:

Mateo:	Tienes la flecha y en vez de poner el punto [*R*] en la mitad, puedes ponerlo en esta parte (señala el extremo izquierdo de la representación de la recta). Y esta parte la puedes mover hasta allá (mueve la mano de izquierda a derecha sin resaltar los puntos) y así formarías un sentido.
Nicole:	(Se dirige a Mateo) No, porqué vas en un sentido desde la mitad.

Efectivamente, Mateo le sugiere a la profesora cambiar el lugar del punto *R* al extremo izquierdo de la representación de la recta para hacer que todos los puntos queden al mismo lado de *R*. Nicole considera que la idea de Mateo no responde la pregunta de la profesora. En su signo vehículo ella se refiere a la ubicación de todos los puntos “desde la mitad”, es decir a un lado u otro de *R*. Inferimos que la estudiante interpreta la pregunta como la profesora quería, es decir, aludiendo a que el punto *R* determina dos subconjuntos de la recta a lado y lado de *R* y que es posible seleccionar o destacar uno de ellos, aunque asigna a *R* la propiedad de dividir la recta “por la mitad”. En todo caso, para Nicole, un rayo comienza a ser un subconjunto de la recta (*od-Nic-2*). La profesora no asocia esta idea de la estudiante con la interpretación cotidiana de rayo, ni la niña tampoco la menciona. Puede ser que Nicole considere que con la misma palabra se hace alusión a dos objetos diferentes o entrevea alguna asociación. Desafortunadamente la profesora no indaga al respecto y no es factible saber si se produce una ruptura de significado o una “acomodación” de este al contexto matemático. En todo caso, el significado personal inicial de Mateo está más cercano a la interpretación de rayo como subconjunto de la recta, pero él comprende la pregunta de la profesora de una forma diferente a lo pretendido por ella.

Subconjunto de la recta con comienzo, pero sin fin

Quizás para aclarar su pregunta al interpretar lo que dice Mateo la profesora la reformula, fijando la posición de *R:* “Tengo ese punto (señala *R*). Estoy acá (…) y tengo que subrayar todos los puntos que están en un solo sentido. ¿Cómo hago para subrayar todos los puntos que están en el mismo sentido, desde el punto *R?”*. Nuevamente interviene Nicole: “Solamente con la línea profe, porque la línea tiene muchos puntos”.

En el signo vehículo de Nicole podemos identificar varios atributos del rayo. Primero, para la estudiante, el rayo está constituido por muchos puntos que pueden destacarse si se resaltan puntos de la recta que los contiene. Segundo, como previamente había tomado como referencia al punto *R*, es probable que para ella el rayo sea el subconjunto de todos los puntos de la recta determinados por *R*. Nicole parece enfocarse en el conjunto de puntos a los que alude la profesora. No ve la necesidad de cambiar la ubicación del punto *R* (como sí lo considera Mateo), ya que, sin importar que el punto esté ubicado en la "mitad" de la representación de la recta, los puntos que están del mismo lado del punto *R* son tantos que con ellos se pueden destacar todos los puntos que están en el mismo sentido.

La profesora complementa la representación (Figura 3): "Entonces, voy a subrayar todos los puntos que estén en un solo sentido y comienzan en el punto *R*, como dice Nicole. Esta nueva figura va en un sentido y además tiene un punto donde comenzó".

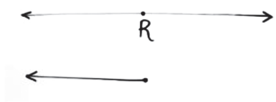


Figura 3. Representación de rayo que hace la profesora en el tablero

Con el signo vehículo constituido por la representación y la explicación que da, la profesora representa y describe las propiedades del rayo: tiene un sentido y un comienzo. En lugar de subrayar los puntos, como dice que hará, decide hacer una representación independiente, aunque supone que con la ubicación ilustra la propiedad de ser subconjunto de esta, además de tener origen, propiedad que dice explícitamente.

Nicole expresa espontáneamente: "Un comienzo sin fin" (*od-Ni-3*). Ella relaciona el punto *R* con un origen y la flecha más la frase "ir en un sentido" como no tener final, es decir, ser un subconjunto de la recta determinado por el punto *R*. La profesora aprovecha lo dicho por Nicole para preguntar por la diferencia entre recta y rayo.

Profesora: Tiene comienzo, pero no tiene fin. Esa nueva figura se llama rayo. (…) ¿Cuál es la diferencia entre recta y rayo?

Nicole: La recta no tiene comienzo ni fin, pero el rayo si tiene comienzo, pero no fin.

La interlocución ha sido principalmente entre la profesora y Nicole. No sabemos si los demás estudiantes relacionan las dos representaciones (de recta y rayo), si han identificado los atributos del rayo mencionados por la profesora y si Nicole atribuye a *R* alguna característica especial, (como estar en "la mitad de la representación") para poder ser origen de un rayo.

La profesora introduce la notación simbólica de rayo y la asocia con la representación figural, incluyendo un nuevo punto H en la representación para referirse al rayo $\overrightarrow{HS}$ (Figura 4).

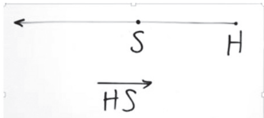


Figura 4. Representaciones figural y simbólica de rayo, hechas por la profesora

Luego, pregunta a los estudiantes "¿Será que es lo mismo el rayo $\overrightarrow{HS}$ que el [rayo] $\overrightarrow{SH}$?" (escribe los respectivos símbolos en tablero). Varios niños exclaman que no y Mateo y Nicole toman la palabra:

Mateo: No. Porque se cambia la posición de los puntos.

Nicole: Porque se tienen que cambiar la posición de las letras (señala el símbolo $\overrightarrow{SH}$), para que quede así (señala el $\overrightarrow{HS}$) (…). Ahí (señala el símbolo $\overrightarrow{SH}$) estás diciendo que tiene fin, pero no comienzo.

Los niños parecen asociar correctamente el orden de las letras en la representación simbólica asignando a la primera letra el origen del rayo. Nicole argumenta que la representación figural del rayo $\overrightarrow{HS}$ debe simbolizarse con $\overrightarrow{HS}$ porque en el orden contrario, $\overrightarrow{SH}$, enviaría un mensaje equivocado sobre las características del rayo. Ella no alude a que esta notación representaría el rayo opuesto, por lo que nos queda la duda de si Nicole ha olvidado, en su interpretación, la idea de que el rayo es subconjunto de la recta.

La notación de rayo es compleja. Tiene implícitos tres atributos del rayo, que no son expresados verbalmente por la profesora pero que se ponen en juego al determinar un orden específico en la escritura de las letras asociadas a los puntos. Primero, el hecho de ser subconjunto de la recta, lo que obliga a determinar dos puntos para nombrarlo. Segundo, el tener un origen, el cual queda definido por la letra que se escribe primero. Tercero, tener un sentido específico, el cual queda determinado por el segundo punto usado en la notación. Podría haber sido interesante hacer que los niños hicieran explícitos estos atributos, para identificar si los reconocían en la representación.

Objeto geométrico cuya longitud no se puede determinar

En la tercera clase de la secuencia de enseñanza, cuando la profesora y los estudiantes sostenían una discusión sobre el atributo medible de un ángulo, Estefanía se refiere a que un ángulo es más grande que otro si los "palos eran más grandes", señalando los rayos correspondientes a dos ángulos que está comparando. Parece que la estudiante interpreta que los rayos tienen longitud determinada y no se extienden en forma indefinida (*od-Est-1*). Mabel le aclara: "La flecha significa que puedes poner más puntos (señalando la representación del rayo). Entonces tú no puedes definir exactamente cuál es el tamaño de los rayos." (*od-Mab-1*). Ni Estefanía ni Mabel aluden a que el rayo es subconjunto de la recta. Suponemos que este atributo se perdió de vista desde el momento en que la profesora hizo una representación independiente.

Representación figural y simbólica de ángulo

A lo largo de la secuencia de enseñanza identificamos las siguientes interpretaciones sobre el *oi* representación (figural y simbólica) de ángulo: (i) punta de una figura geométrica, (ii) esquina, (iii) figura geométrica conformada por rayos; y (iv) figura geométrica conformada por dos rayos de origen común.

Punta de una figura geométrica

En la segunda clase, la profesora pregunta a los niños qué es para ellos un ángulo. Se oyen varias interpretaciones: "una figura geométrica" (Mateo), "Triángulo" (Luis), "La punta de una figura" (Mabel), "Un ángulo tiene líneas rectas" (Alexandra), "Es cerrado" (Manuela). La profesora retoma la idea de Luis y pregunta: "¿Un ángulo es un triángulo?" Algunos niños dicen que sí, otros que no. Gabriel, Manuela y Alexandra toman la palabra: "Un triángulo es un ángulo porque tiene esquinas" (Gabriel), "Sí, porque cada una tiene un punto en una esquina, entonces sí es un ángulo" (Manuela), "Un triángulo no puede ser un ángulo, porque estamos hablando de la parte de un triángulo que es el ángulo" (Alexandra). La profesora dibuja, a mano alzada, un triángulo en el tablero. Andrés lo señala y dice "Tiene tres ángulos". Pasa al tablero y complementa la figura hecha por la profesora (Figura 5).

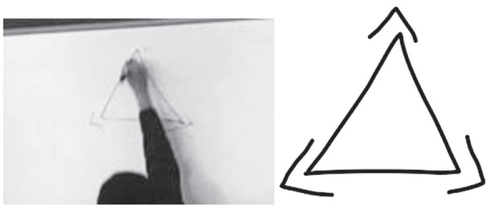


Figura 5. Representación figura de ángulos hecha por Andrés

Mateo interviene mientras Andrés hace la representación: "Profe, yo estaba pensando que un ángulo es una figura. Su forma es a partir del triángulo, pero es abierta. En cambio, el triángulo es cerrado. [El ángulo] no tiene principio ni fin". Para Andrés, Mateo y parece que, para Manuela, un ángulo es "la punta" de un triángulo (*od-And-Mat-Man-1*), es decir es una parte del triángulo conformada por el vértice y parte de los lados que lo contienen. Incluso Manuela parece referirse al vértice, al mencionar que "tiene un punto en cada esquina".

Esquina

Estefanía explica a Manuela que un ángulo no es triángulo como ha dicho ella:

> No Manuela, (…) porque recuerdas cuando la profesora (…) (hizo) algo de los lazos. […] el triángulo es otra cosa diferente al ángulo. No solamente tiene lo diferente en la (…). O sea, se parece. Pero al cerrarlo ya es un triángulo. Pero no importa que (…) por ejemplo, dice ¡triángulo!, (…) no importa que el título diga eso [ángulo]".

La estudiante evoca la representación concreta de ángulos mediante lazos, que habían realizado en la clase anterior. Además, parece querer aclarar que el nombre "triángulo" deriva precisamente de que esta figura tiene tres ángulos.

Cuando la profesora percibe que los niños admiten que un ángulo es diferente a un triángulo, retoma una idea de Manuela (*od-Man-1*) y les pregunta si un ángulo es una esquina. Mateo y Estefanía explican:

Estefanía: (…) Un ángulo no necesariamente es una esquina.

Profesora: No entiendo.

Estefanía: Profe, es que lo que te quiso decir Mateo es que no necesariamente un ángulo es una esquina. Por ejemplo, tú te haces allá (señalando con su mano derecha al tablero), otra persona se hace allá (señalando hacia la parte de atrás del salón) y otra persona se hace allá (mueve su brazo derecho señalando a su derecha) (Figura 6). Entonces, no necesariamente tiene que ser una esquina.

a b

Figura 6. Representaciones de ángulos con los brazos

Mateo: Es que no tiene que estar necesariamente en una esquina para hacer un ángulo, digamos tu (refiriéndose a la profesora) estas al frente mío, y dos compañeros están en diagonal. Ahí se está formando un ángulo, no necesariamente tienen que estar en una esquina.

Estefanía evoca la actividad de los lazos y hace una imitación con los brazos indicando en dónde estaría cada uno de los niños para explicar que el ángulo representado no necesariamente es una esquina del salón, sino que puede estar ubicado en cualquier espacio físico. Mateo apoya su idea. La mención a "esquina" como sinónimo quizás de vértice, que hace Manuela en relación con figuras como el triángulo, es interpretada por Estefanía y Mateo como un lugar específico de un recinto cerrado ya que ellos hablan de ubicación espacial (*od-Est-Mat-1*).

Figura geométrica conformada por dos rayos

La profesora decide poner en discusión la idea de Alexandra: "un ángulo tiene líneas rectas". La mayoría de los niños considera que sí, pero Mateo objeta: "Un ángulo no tiene líneas rectas porque lo que tiene de línea recta el ángulo se llama rayo" (Mateo). El estudiante afirma que un ángulo está compuesto por rayos (*od-Mat-3*). Quizás para el niño, los rayos son subconjuntos de líneas rectas, pero ni la profesora ni algún niño le piden aclarar la relación. En todo caso, el niño introduce los rayos como elementos constitutivos del ángulo, desprendiendo el ángulo del triángulo.

Figura geométrica conformada por dos rayos de origen común

La profesora hace una representación en el tablero (Figura 7) y pregunta si ha dibujado un ángulo. Varios niños afirman que no y ella les pide explicar qué hace falta.

Figura 7. Representación figural de un no-ejemplo de ángulo, hecha por la profesora

Profesora:	¿Qué le hace falta entonces?
Nicole:	El comienzo.
Profesora:	¿Qué quiere decir el comienzo?
Varios:	El punto.
Nicole:	El punto de referencia.
Mateo:	Profe, el punto donde comienza. (Realiza un gesto con las manos formando un ángulo, Figura 8).

Figura 8. Gesto para formar un ángulo con las manos

Profesora:	¿Pero cómo hago para decir eso? Dos rayos que tienen diferente dirección y (…) ¿y qué?
Mateo:	Y un punto de referencia donde se encuentran los dos rayos.
Profesora:	Pero quiero cambiar lo de “punto de referencia”. Lo quiero cambiar por algo que sea más (…).
Mateo:	El principio.
Karen:	Que tienen el mismo principio o comienzo.
Profesora:	(Anota en el tablero: Dos rayos que van en diferente dirección y tienen el mismo comienzo).

Aunque ya se había introducido las flechas como indicador gráfico de infinitud del rayo, la profesora no las dibuja y ningún niño hace la observación. En su signo vehículo, la profesora se refiere a la representación de dos líneas (asociada a rayos) con diferente dirección. La profesora considera que, al representarlos de esa manera (no intersecados), los estudiantes verán la importancia de mencionar el vértice. Nicole se refiere al vértice como el comienzo de los rayos que determinan un ángulo. Esta idea es compartida por Mateo y Karen. Sin embargo, Mateo y Nicole se refieren a “punto de referencia”. Así, consideramos que para Mateo, Nicole y Karen el ángulo es una figura conformada por dos rayos de origen común (*od-Mat-4; Nic-; Kar-1*). Esta interpretación prevalece en las clases posteriores. La profesora admite la definición y hace una representación en el tablero (Figura 9).

Figura 9. Representación figural de ángulo hecha por la profesora

Con el objetivo de reforzar esta interpretación, la profesora pide a los estudiantes analizar diversas representaciones y explicar si hay o no ángulos en ellas. Dos de las representaciones que mayor polémica ocasionan son las figuras 10a y 10b.

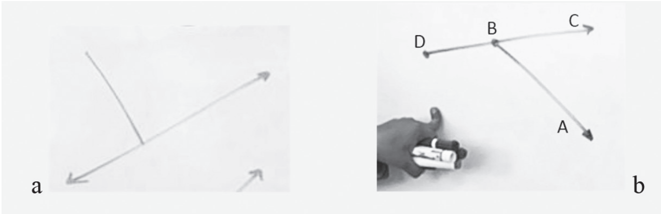


Figura 10. Representaciones figurales propuestas por la profesora para que los estudiantes identifiquen ángulos

Laura considera que en la Figura 10a no hay ángulos porque no identifica un "punto de referencia" "(…) [las líneas] no tienen comienzo". Aunque la intersección del segmento con la recta podría ser considerada el vértice de un ángulo "llano" al no estar resaltada, la niña no lo considera así. Por su parte Sara dice: "no tiene la forma"; ella no admite la posibilidad de que la recta sea vista como dos rayos opuestos por el vértice y que el segmento esté en su interior o que haya dos ángulos uno de cuyos lados esté mal dibujado por no estar la flecha. Parece que las dos niñas no identifican ángulos en configuraciones complejas e interpretan la configuración como un todo. Manuela, por su parte, considera que puede haber dos ángulos si el segmento fuera un rayo: "para mí el ángulo también está hecho de rayos. Pero ahí no está haciendo un rayo porque en esta partecita (señala el segmento) no está haciendo rayo, tocaría hacerlo como acá (señala la flecha)" (*od-Man-2*).

Con respecto a la Figura 10b, Nicole expresa: "La figura tiene un ángulo porque (…) pues (…) tiene los dos rayos y el mismo comienzo. Pero solamente es un ángulo si le quitas (…) […]. Si le quitas ese segmento [$\overline{BD}$] se forma un ángulo" (*od-Nic-2*). Su compañera Sara no está de acuerdo: "No, no. Porque tu (señala a la profesora) en una clase dijiste que de un punto pueden salir muchos rayos. Entonces de ahí (señala B) pueden salir tres o más [rayos]. Entonces sí, si es un ángulo." (Sara). En este caso, Sara reconoce el ángulo $\angle CBA$ (*od-Sar-1*).

La profesora pregunta por la parte izquierda de la figura (Figura 11a): "¿Este es un ángulo?". Varios niños dicen que no y Mateo se acerca al tablero para justificar: "Porque mira: la parte de acá (señala el interior del ángulo $\angle CBA$ sí es un ángulo porque tiene la forma que nos explicó la profe (señala una representación que está en el tablero, como la de la Figura 9). Tiene una forma como (…) una forma triangular. En cambio, acá (señala Figura 11b) (…) eso no tiene tanta referencia a un triángulo como el otro" (Mateo).

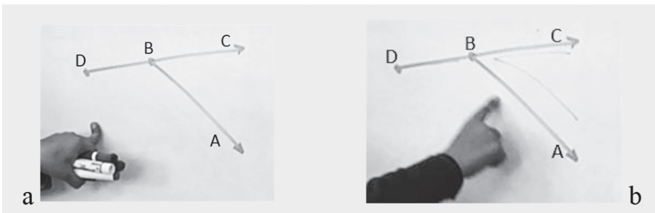


Figura 11. Representaciones figurales sobre las que los estudiantes discuten si hay ángulos o no

Mateo no se fija en que $\overline{BD}$ no es un rayo sino en la configuración de los dos rayos. Según su criterio, $\overline{BD}$ y $\overline{BA}$ no forman un ángulo porque la configuración no es la prototípica. Su interpretación de ángulo está restringida a la posición en la que la abertura es menor de 90°; es decir, el niño le impone al ángulo un atributo que este no tiene, al asumir que tiene que tener la forma estándar (*od-Mat-3*). Adicionalmente, Nicole afirma: "Además [en] un ángulo normalmente los rayos son (…) del mismo tamaño." (Nicole). A pesar de que la estudiante afirmó, en una clase anterior, que los rayos no tenían "fin", acá se refiere a su tamaño. Su ponemos que ella se fija en la longitud del trazo que lo representa e impone otra restricción a la interpretación de ángulo (*od-Nic-3*).

La profesora introduce el símbolo < de ángulo y explica a los niños la diferencia con el signo "menor que" (<). Después alude a diversas formas de nombrar un ángulo relacionando la representación figural con la representación simbólica (Figura 12).

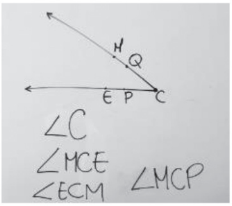


Figura 12. Representaciones figurales y simbólicas de ángulo

Atributo medible de un ángulo

Como señalan Millsaps (2012), Mitchelmore y White (2000), Rotaeche y Montiel (2017) y Tanguay y Venant (2016), la identificación del atributo medible de un ángulo es parte central de su interpretación y quizás lo que causa mayores dificultades. A lo largo de la secuencia, apreciamos las siguientes interpretaciones: (i) el tamaño; (ii) la longitud de las líneas que representan los rayos; y (iii) la abertura.

Dos ángulos se diferencian por su tamaño

En la cuarta sesión de la secuencia de enseñanza la profesora pregunta a los niños qué permite afirmar que un ángulo sea diferente de otro. Dibuja, a mano alzada, dos ángulos en el tablero (Figura 13) y les pregunta: "¿Estos ángulos son iguales? ¿Son diferentes? ¿En qué se diferencian o por qué son iguales?".

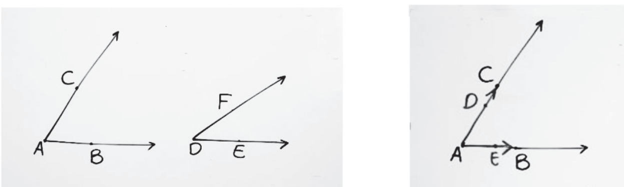
a  b

Figura 13. Representaciones figurales de dos ángulos para comparar su tamaño

Luis responde: “por el tamaño” muy probablemente con base en la percepción de espacio ocupado por la configuración global de cada ángulo, como un todo (*od-Lui-1*). No parece enfocarse en alguna dimensión específica. La profesora le pide que explique a qué se refiere, pero el sólo repite “el tamaño del ángulo”. Posiblemente es la misma interpretación que tienen otros estudiantes pues varios dicen al tiempo “hay uno más grande que otro”.

Dos ángulos se diferencian por la longitud de las líneas que representan los rayos

La profesora pregunta qué significa que un ángulo sea mayor que otro. Estefanía propone una idea: “(…) en el primero (señala el $\angle CAB$) puedes meter más letras que en el segundo (…) entre los puntos *A* y *C* caben más [puntos] porque es más grande”. La niña asocia el atributo medible con la longitud de las líneas que representan los rayos (*od-Est-1*) que a su vez relaciona con la “cantidad de puntos” que hay entre *A* y *C* probablemente en comparación con la “cantidad de puntos” entre *D* y *F*. Esta interpretación está asociada a una imagen conceptual de una recta o un segmento como constituidos por puntos alineados uno detrás de otro, de cantidad finita. Al escuchar a Estefanía, Manuela disiente: “Yo digo que ambos son iguales porque tienen rayos”. Aunque la idea es confusa y no podemos saber si la niña alude a que las dos figuras son similares porque están conformadas por rayos, también podría ser que para ella el atributo diferenciador de dos ángulos no es el tamaño de las líneas que representan los rayos.

La profesora opta por hacer una nueva representación en el tablero (Figura 13b): “Tengo este ángulo $\angle CAB$, de color negro y coloreé (…) e (…) hice otro ángulo $\angle DAE$ (lo dibuja con rojo). Estos dos ángulos, ¿son iguales?”. Varios niños dicen que sí e intentan explicar:

Mateo: Es que acá no estamos hablando de (…) acá [señala los rayos] tiene comienzo, pero no tiene fin, entonces no se puede decir que el tamaño del rayo (…) Porque no puedes confundir el tamaño de un rayo. Porque puede tener comienzo, pero no tiene fin.

Mabel: O sea, tú puedes tener así: esa flecha significa que puedes seguir (…) y no puedes decir exactamente cuál es el tamaño de los rayos.

Mateo y Mabel retoman el atributo asignado a los rayos en las primeras clases de la secuencia (*od-Mat-2; od-Mab-1*). Así, descartan que el atributo diferenciador de dos ángulos tenga que ver con la longitud de las líneas que representan los rayos.

Dos ángulos se diferencian por su abertura

Mabel hace una nueva propuesta. Ella introduce información sobre el transportador, que solo ella conoce porque es nueva en la institución y lo había estudiado: “A Luis y Estefanía les parece más grande (señala el ángulo $\angle CAB$, Figura 13a porque (…) como sí tu tuvieras un transportador y (…) lo pusieras en 70° y (representa $\overrightarrow{AC}$ con el brazo derecho) y el otro (señala el ángulo $\angle FDE$, Figura 13a) lo pusieran un poco más allá (mueve el brazo derecho para representar $\overrightarrow{DF}$).” (*od-Mab-1*). Los demás niños no conocen el transportador por lo que la profesora dice: “No entendimos”, pero Estefanía capta la idea: “¡Ah! Lo que pasa es que la diferencia no es esa [aludiendo a la propuesta anterior] (…) Mabel dice que la diferencia es que este señala el ángulo $\angle CAB$ está más abierto que este (señala el ángulo $\angle FDE$)” (*od-Est-2*). Independientemente de la mención al transportador, el movimiento del brazo, realizado por Mabel lleva a Estefanía a comparar los ángulos por su abertura.

La profesora aprovecha la intervención de Estefanía para introducir el atributo de “abertura” e impulsa una discusión sobre lo que quiere decir:

> Bueno, estos dos [ángulos de la Figura 13a] son diferentes porque uno es más abierto que otro. Eso es lo que los diferencia (…). Entonces, con esto de ‘abierto’ (representa los dos ángulos uniendo los codos y abriendo y cerrando los brazos (Figura 14), ¿qué quiere decir?

Mabel interpreta a su vez a Estefanía: “Pues lo que yo entiendo de [lo que dijo] Estefanía es que uno es más abierto que el otro. Porque este ($\angle FDE$) es digamos así (hace un gesto; Figura 14b) y el otro (señala $\angle CAB$) es más grande (…) digamos así (hace un gesto; Figura 14c).” (Mabel).

a  b  c 

Figura 14. Representaciones de abertura de un ángulo

La profesora insiste en no entender qué significa “abertura”. Mateo y Miguel explican: “Digamos aquí podemos tener un ejemplo. Digamos, coger a Pacman porque tiene la boca abierta y después (…) la diferencia con que queda cerrada.” (Mateo) (*od-Mat-1*). “Porque el mayor se puede decir que es más grande y el otro se puede decir que es más cerrado” (Miguel) (*od-Mig-1*). Con su signo vehículo, los niños se refieren a que el atributo medible está asociado a la posición de un rayo con respecto al otro; más abierto, más tamaño; más cerrado, menos tamaño.

Unidad de medida de ángulos

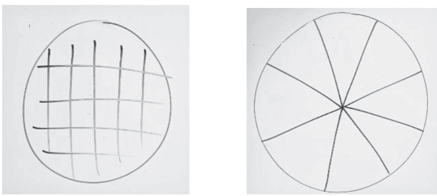
Una vez acordado que se mide la abertura, surge la necesidad de determinar la unidad de medida. Las interpretaciones favorecidas en la secuencia tienen que ver con: (i) 1/360 parte de la circunferencia; (ii) cantidad de magnitud medida con el transportador; y (iii) grado como unidad de medida que cumple la aditividad.

El grado es un ángulo de tamaño pequeño que corresponde a 1/360 parte de la circunferencia

La profesora acude a la imaginación de los niños para introducir la idea de grado:

> La abertura de los ángulos se mide en grados (…) no medimos en centímetros o en metros. El ángulo se mide en grados. Vamos a cerrar los ojos y nos vamos a imaginar un círculo. Vamos a dividir el círculo en 360 partes iguales. Cada una de esas partecitas que quedaron (…) o de abertura, es un grado.

Para ver qué interpretación hacen los estudiantes de la división que les propone, ella hace un dibujo en el tablero (Figura 15a) y les pregunta que si así está bien.



a b

Figura 15. Divisiones de la circunferencia propuestas por la profesora para discutir con los estudiantes cuál es la imagen figural de un grado

Varios estudiantes dicen que el dibujo quedó mal hecho porque los pedazos deben ser todos iguales. Mabel explica: "Como si estuvieras partiendo una pizza" (Pasa al tablero y hace un dibujo (Figura 15b). Mabel interpreta que la unidad de medida debe ser una entidad cuya forma es similar a aquello que se mide (*od-Mab-1*). Varios niños rechazan la representación aludiendo que las partes no son iguales, que son muy poquitas y que tienen que ser mucho más pequeñas. Nicole apoya a Mabel: "Yo digo que la que hizo Mabel está bien porque está formando como ángulos. Entonces como los ángulos se miden por grados entonces cada abertura puede medir un grado. Entonces, si yo lo parto en 360 partes tengo 360 grados" (*od-Nic-1*).

El grado como cantidad de magnitud medida con el transportador

Ante la imposibilidad de disponer de representaciones físicas de grados, la profesora proporciona a los niños cuñas de 10°, 30°, 45°, 60° y 90° hechas en cartón. El lado opuesto al ángulo a trabajar está cortado de forma irregular para que los estudiantes no lo consideren como uno de los lados del ángulo. Ella también tiene cuñas de las mismas medidas, pero de mayor tamaño para usarlas en el tablero.

Una de las actividades que propone a los niños tiene que ver con comparar si una cuña de 10° suya, es distinta a una de ellos. Varios niños dicen que no son distintas y Alexandra explica que tienen la misma medida. Álvaro pasa al tablero y ubica su cuña (amarilla) de tal forma que quede superpuesta y compartiendo el vértice con la que la profesora pegó en el tablero (negra) (Figura 16).

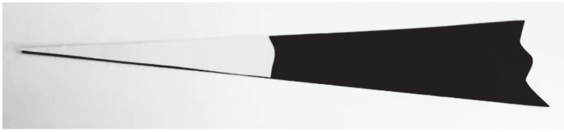


Figura 16. Comparación de cuñas de ángulos

El niño asocia la medida de la abertura con una cantidad de grados, sin importar el tamaño de la representación (*od-Alv-1*). Álvaro y Alexandra establecen la congruencia de todas las cuñas de 10°, con relación a la abertura.

En la última clase de la secuencia, Mabel explica a sus compañeros cómo usar el transportador. Construyen ángulos de diferentes medidas y adicionalmente, usan las cuñas para construir ángulos yuxtaponiendo o superponiendo dos cuñas para obtener la medida deseada. Así, aparece la idea de grado como unidad de medida que cumple la aditividad (Jiménez & Salazar, 2016).

Discusión

En la Tabla 2 sintetizamos las interpretaciones detectadas en el análisis y los estudiantes que las manifestaron. De los 39 niños del curso, intervinieron 13 en los fragmentos de interacción usados en este análisis.

Tabla 2. Interpretaciones de los estudiantes, manifestadas en las interacciones en los fragmentos seleccionados

Rayo		**Representación**		**Atributo medible de un ángulo**		**Unidad de medida**	
Fenómeno eléctrico	Nicole Mateo	Punta de una figura geométrica	Mateo Andrés Manuela	Tamaño	Luis	Ángulo pequeño que mide 1/360 de la circunferencia	Mabel Nicole

Subconjunto de recta	Nicole Estefanía	Esquina	Mateo Estefanía	Longitud de líneas que representan rayos	Estefanía	Cantidad de magnitud medida con el transportador	Álvaro Alexandra
Subconjunto de recta con principio pero sin fin	Nicole Mateo Mabel	Figura geométrica conformada por rayos	Mateo	Abertura	Estefanía Mabel Miguel Mateo		
Objeto geométrico de longitud indeterminada	Mabel	Figura geométrica conformada por rayos de origen común	Mateo Manuela Nicole Karen Sara				

El análisis sintetiza la dinámica interpretativa llevada a cabo a lo largo de la secuencia de enseñanza. Se puede apreciar que hay unos estudiantes como Mateo, Nicole, Estefanía y Mabel, que son expresivos y por lo tanto es posible identificar algunas de las interpretaciones que van construyendo. Otros tienen intervenciones esporádicas que contribuyen a corroborar los significados que inferimos.

Con respecto a las interpretaciones del objeto geométrico rayo, aunque la profesora intentó que los niños identificaran el rayo como subconjunto de la recta, fue notorio que algunos niños, como Mabel, ignoraron pronto este hecho y empezaron a considerarlo como un objeto independiente de esta. Esto hace que probablemente atributos como dirección y sentido pierdan relevancia para ellos.

En nuestro análisis encontramos que las situaciones planteadas favorecieron la identificación de los rayos como partes constitutivas de los ángulos y permitieron a los niños diferenciar y desligar los ángulos de otras figuras, como los triángulos. El seguimiento a las interpretaciones que explicitan Mateo y Manuela es una muestra de las posibilidades que tienen los niños de ir modificando sus interpretaciones gracias a las tareas propuestas.

Con respecto al atributo medible, en los análisis realizados confirmamos los hallazgos de otros investigadores: los estudiantes asignan como atributo medible del ángulo la longitud de las líneas con las que se representan los rayos del ángulo (Saa, et al., 1990). Con el fin de lograr una nueva interpretación, la profesora recurrió a tareas que suponía permitían centrar la atención en la abertura de los ángulos. Sin embargo, en esta oportunidad, la interpretación esperada surgió y fue expresada por Estefanía a raíz de la explicación dada por Mabel, una estudiante que había trabajado previamente con el transportador.

Con respecto a la unidad de medida, aunque parezca prematuro introducirla en grado 4°, un tratamiento básico es útil en la interpretación del ángulo. En nuestra secuencia de enseñanza, retomamos la propuesta de Tanguay y Venant (2016) quienes proponen la construcción de la idea de grado a partir de la división de la circunferencia en 360 partes iguales. Mabel y Nicole explicaron sus ideas sobre esta interpretación. Adicionalmente, para sortear el problema de la manipulación de representaciones de ángulos con medida 1°, aprovechamos la comparación de ángulos por medio de cuñas, antes de introducir el uso del transportador. Como afirman Millsaps (2012) y Saa et. al. (1990), esta comparación es útil para la construcción del significado de amplitud de un ángulo. Las tareas no se restringen a la suma de números, sino a la adición y sustracción de amplitudes, empleando los grados como unidad de medida. Este uso va calando en las interpretaciones que construyen los niños para, en una etapa posterior, favorecer la comprensión de la unidad de medida angular.

Conclusiones

Los análisis nos permiten corroborar la complejidad de la tarea de promover la construcción de significado de los objetos matemáticos, aun haciendo esfuerzos por identificar las interpretaciones que tienen los estudiantes y promoviendo la interacción comunicativa a partir de ellas. En objetos matemáticos como rayo o ángulo, ligados a prácticas sociales y culturales, las diferentes interpretaciones iniciales que tienen los niños tienen una fuerte repercusión en las discusiones y no es posible pretender una vía sencilla de construcción de significado. Si aceptamos que la interpretación de los signos se logra a través de actividades en las que los estudiantes interactúan con ellos y por lo tanto el significado es una función de su uso, se hace evidente la circularidad señalada por Sfard (2001): el significado surge sólo del uso de los signos, pero a la vez es requisito para el uso exitoso de estos. Sfard sugiere ver esta circularidad como la fuerza conductora detrás del crecimiento incesante del conocimiento; "la comprensión de un concepto y la habilidad para aplicarlo son como dos piernas que hacen posible moverse hacia adelante gracias al hecho de que nunca están exactamente en el mismo lugar" (p. 109).

El ejercicio investigativo nos condujo a centrar la atención en dos aspectos que merecen especial interés en la escuela si se busca la construcción de significado de ángulo. Uno, tiene que ver con la información que encapsulan la notación simbólica de rayo y de ángulo relacionada con la representación figural. Generalmente, cuando la notación simbólica se introduce en primaria, su tratamiento no va más allá de presentar a los estudiantes la notación, sin detenerse a revisar todo lo que ella conlleva. Otro, se refiere a la necesidad de enriquecer el universo de representaciones de los niños para evitar que ellos asignen atributos no relevantes a los objetos, derivados de las representaciones que conocen. Por ejemplo, suponer que un ángulo es siempre agudo porque esta es la representación prototípica (como le pasó a Sara), que las líneas que representan rayos son segmentos congruentes (como sugirió Nicole) o que los rayos siempre son horizontales y que el punto origen está a la derecha son interpretaciones que construyen los niños, fruto de sus experiencias. En particular, la última idea es problemática cuando se introduce el transportador.

Finalmente, hacemos una reflexión sobre la gestión de la profesora. Los fragmentos analizados dejan ver los esfuerzos de ella para que los estudiantes expresen sus ideas y los intentos por construir significado a partir de lo dicho por ellos. Visto en retrospectiva, la profesora hubiera podido insistir en que los estudiantes profundizaran más en lo que decían, o aprovechar más las ideas dichas por ellos para explorar más a fondo los significados. También hubiera podido hacer esfuerzos para involucrar a otros niños en las discusiones. No pretendemos afirmar que la gestión de la profesora fue perfecta. Sin embargo, su clase fue interactiva, los niños pudieron participar sin cohibirse, ella procuró no juzgar las ideas como buenas o malas y fue constante en pedir a los niños explicaciones y opiniones sobre lo dicho por otros. Todos estos son elementos esenciales de un clima favorable a la construcción de significado. En la enseñanza del objeto matemático ángulo, es un error centrarse únicamente en la memorización de su definición y en la representación de ejemplos, pues niega a los estudiantes la posibilidad de construir significado a partir de las modificaciones en las interpretaciones que ellos tienen. En la medida en la que el aula de matemáticas favorezca la generación de una comunidad de discurso matemático tomaremos en serio el hecho de que los estudiantes son constructores autónomos de significado y no receptores pasivos.

Nota

[1] Empleamos (…) para representar pausas, y […] cuando hemos eliminado parte de la intervención, que no viene al caso.

Referencias

Bartolini-Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2010). Mediación semiótica en el aula de matemáticas (traduccíón). In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Camargo, L., Perry, P., Samper, S., Molina, Ó., & Saénz-Ludlow, A. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33* (3)*,* 99-116.

Casas, L., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 201-216.

Close, G. S. (1982). *Children´s understanding of angle at the primary/secondary transfer stage.* Londres: Polytechnic of the South Bank.

D'Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Dohrmann, C. (2017). Tools. Measuring. Angles. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 188). Singapur: PME.

Fyhn, B. (2007). A climbing class' reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 19-35.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 70-92.

Gravemeijer, K. (2016). Design-research-based curriculum innovation. *Quadrante, XXV* (2), 7-23.

Jimenez, S., & Salazar, V. P. (2016). *Significados de ángulo desarrollados por estudiantes de cuarto grado de primaria* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Kieran, C. (1986). Turns and angles: What develops in Logo? In G. Lappan & R. Even (Eds.), *Proceedings of the 8th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 169-177). East Lansing: Michigan State University.

Millsaps, G. (2012). How wedge you teach the unit-angle concept? *Teaching Children Mathematics, 18*(6), 362-369.

Mitchelmore M. C., & White, P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics Education Research Journal, 10*(3), 4-27.

Mitchelmore M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 209-238.

Mitchelmore M. C., & White, P. (2003). Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. Paterman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 403-410). Honolulu, HI: PME.

Munier, V., & Merle, H. (2009). Interdisciplinary mathematics-physics approaches to teaching the concept of angle in elementary school. *International Journal of Science Education, 31*(14), 1857-1895.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática,12*(1), 51-69.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G., & Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida, España: SEIEM.

Rotaeche, R. A., & Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Revista Educación Matemática, 29*(1), 171-199.

Saa, M., Carrillo, D., Alarcón, J., Pelegrín, M., Sánchez, E., & Carrillo, E. (1990). *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Murcia, España: Ediciones de la Universidad de Murcia.

Sáenz-Ludlow, A., & Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. In A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A. & Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. In *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Seúl, Corea del Sur.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los Estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas (Trad.). *Revista EMA*, 6(2), 95-140.

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM Mathematics Education, 48,* 875-894.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10* (2-3), 133-170.