Desenvolvimento do sentido espacial através do uso de representações múltiplas no contexto da dança tradicional: uma experiência de ensino no 1.º ciclo de escolaridade

Development of spatial sense through the use of multiple representations in the context of traditional dance: one teaching experience in primary school

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
apc@uevora.pt

Mercedes Prieto
Universidade de Évora, Portugal
merce.prieto@sapo.pt

Abstract. This study is developed within the framework of a project that explored the connections between Mathematics and Dance, materializing in a teaching experience in one 8 years old class, and analyzes how the students developed their spatial sense through the use of multiple representations when solving challenging math tasks associated with traditional dance performance. Data analysis took the written productions of the students in response to three tasks that exploit a traditional dance. Students used diverse representations, consistently associating actively represented ideas, while dancing, and elaborate schemes and verbal explanations, evidencing a strong presence of contextual representation. They were able to schematize the spatial formations and the figures danced, but they manifested difficulties in representing the movements of the dancers. They have developed several aspects of the spatial sense, being generalized the understanding of the identified geometric objects and their properties and relations. However, they did not show the same ease of identification of the reflection and rotation symmetries present in the dance, although they have recognized the geometric transformation rotation. Localization and spatial orientation are other abilities that have been shown. This experience was an opportunity for the development with meaning and purpose, in an informal and integrated way, of their spatial sense, which has also mobilized issues associated with the measure.
Keywords: spatial sense; multiple representations; connections between mathematics and dance.

Resumo. Este estudo desenvolve-se no quadro de um projeto que explorou as conexões entre a Matemática e a Dança, concretizando-se numa experiência de ensino em turma de 3.º ano, e analisa em que medida os alunos desenvolveram o sentido espacial através do uso de representações múltiplas emergentes na resolução de tarefas matemáticas desafiantes, associadas à execução de dança tradicional. Analisam-se dados correspondentes a produções escritas dos alunos como resposta a três tarefas que exploram um vira. Os alunos usaram representações diversas, associando de forma consistente ideias representadas ativamente, ao dançar, e esquemas elaborados e explicações verbais, evidenciando-se forte presença da representação contextual. Conseguiram esquematizar as formações espaciais e as figuras dançadas, mas manifestaram dificuldades em representar os movimentos dos dançarinos. Desenvolveram diversos aspetos do sentido espacial, sendo generalizada a compreensão dos objetos geométricos identificados e das suas propriedades e relações. No entanto, não evidenciaram a mesma facilidade de identificação das simetrias de reflexão e de rotação presentes na dança, embora tenham reconhecido a transformação geométrica rotação. A localização e a orientação espacial são outras capacidades que evidenciaram, tendo sido notório o desenvolvimento com sentido e propósito, de forma informal e integrada, do seu sentido espacial, que mobilizou também questões associadas à medida.
Palavras-chave: sentido espacial; representações múltiplas; conexões entre a Matemática e a Dança.

(Recebido em junho de 2018, aceite para publicação em outubro de 2018)

Introdução

A Geometria é tradicionalmente considerada como um domínio especialmente difícil da Matemática. Vista por muitos como terreno de definições e demonstrações, expoente máximo do rigor e da dedução, é suscetível de ser abordada de modo árido e formal nos diversos níveis de escolaridade (Clements, 2003). Nos primeiros anos, onde é frequentemente ignorada ou subvalorizada (Clements & Sarama, 2011), a ênfase é muitas vezes posta na classificação das formas bi e tridimensionais e na execução de transformações geométricas. No entanto, visões alternativas sobre a Geometria perspetivam-na desde há alguns anos como a possibilidade de compreensão do espaço físico em nosso redor, no qual vivemos, respiramos e nos movemos (Freudenthal, 1973). Nesta perspetiva, o foco coloca-se em conhecer, analisar e explicar o espaço que habitamos, preenchido com as suas formas, e a nossa relação com esse espaço e formas, como nele nos situamos, deslocamos e orientamos, ganhando relevo a ideia de sentido espacial (Freudenthal, 1973; Mulligan, 2015; Nes & De Lange, 2007).

Paralelamente, a relação com o espaço, a posição que nele ocupamos, o movimento que nele descrevemos, são ideias essenciais na Dança. Laban (1978) refere-se à Dança considerando-a "como a poesia das acções corporais no espaço" (p. 43), ações estas desenvolvidas pelos dançarinos, individualmente ou em grupo, orientados pela música que marca os ritmos e a velocidade dos movimentos que fazem e trajetórias que descrevem.

Entre a Dança e a Geometria está o facto de ambas lidarem com o espaço, formas, posições, movimentos e trajetórias, mas também ambas recorrem a representações diversas para raciocinar e comunicar. Na Geometria, um quadrado pode ser ilustrado com um recorte de papel, com um desenho numa folha, com a notação [ABCD]; na Dança, figuras podem ser usadas para ilustrar esquemas dançados, pode dançar-se efetivamente ou recorrer-se a explicações verbais para instruir sobre como dançar determinada dança.

A investigação em educação matemática sobre representações múltiplas tem revelado o potencial que estas comportam enquanto apoio ao raciocínio em resolução de problemas e à possibilidade de compreensão dos objetos matemáticos (Goldenberg, 1999; NCTM, 2017). Proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que explorem o uso de diversas representações e suas conexões é uma estratégia de promoção da compreensão (NCTM, 2017) que poderá tirar partido da proximidade entre a Dança e a Geometria, entendida numa lógica de desenvolvimento de raciocínio espacial. No entanto, muitas interrogações se podem colocar nesta abordagem, que é interdisciplinar e em que os sujeitos da representação ativa são os próprios alunos, que se deslocam no espaço de acordo com as coreografias e em sintonia com a música.

Este estudo desenvolve-se no quadro de um projeto que explorou precisamente as conexões entre a Matemática e Dança, concretizando-se numa experiência de ensino com crianças de 3.º ano de escolaridade. Neste artigo é nosso objetivo analisar em que medida estas crianças desenvolveram o seu sentido espacial através do uso de representações múltiplas emergentes na resolução de tarefas de conexões entre a Matemática e a dança tradicional. Para tal, procuramos responder às questões seguintes:

- Como usaram as crianças as diferentes representações para lidar com os objetos geométricos convocados nas tarefas de conexões com a Dança?
- Que aspetos do sentido espacial revelaram as crianças nas resoluções de tarefas de conexões com a Dança?

Este estudo pode contribuir para o aprofundamento do nosso entendimento sobre o modo como as crianças relacionam representações e as interconectam na Geometria, em particular com a atenção centrada no desenvolvimento do "sentido espacial", processo ao qual tem sido continuadamente reconhecida importância mas ainda sem correspondente investimento por parte da investigação (Mulligan, 2015).

Ao associar a Matemática e a Dança, o estudo reveste-se também de relevância curricular pois explora uma abordagem interdisciplinar e integrada do conhecimento, ainda com pouca expressão em Portugal, considerando duas áreas muito distintas, a Matemática, ciência com lugar privilegiado no currículo do ensino básico, e a Dança, área frequentemente subvalorizada das expressões artísticas (Prieto, 2018). Note-se que em Portugal, ao nível do 1.º ciclo, a Dança não consta da matriz curricular como disciplina independente com um programa específico, estando apenas incluída na componente curricular de Expressões Artísticas e Físico-Motora, correspondendo ao 6.º bloco deste programa, sob a designação de Atividades Rítmicas Expressivas (Dança) (Decreto-Lei n.º 176/2014, de 12 de dezembro). Num momento em que a promoção do sucesso escolar das diversas crianças constitui uma preocupação dominante, é importante considerar projetos onde as diferentes inteligências tenham lugar e se possam evidenciar — como é o caso da inteligência corporal-cinestésica na Dança (Gardner, 2000). Além disso, a Dança tem potencialidades fundamentais no desenvolvimento das aptidões físicas, sociais e culturais das crianças (Alves, 2013; Mbusi, 2011), pelo que merece ser valorizada e ser perspetivada como um contributo para o desenvolvimento de um perfil de aluno mais integrado e adequado às atuais exigências (Ministério da Educação, 2017).

A Geometria, a Dança, e as suas conexões em projetos educativos

O desenvolvimento do sentido espacial (Freudenthal, 1973; Mulligan, 2015) surge como uma ideia importante e abrangente na aprendizagem da Geometria. Nes e De Lange (2007) referem que no sentido espacial, para além da compreensão de formas e figuras geométricas, suas propriedades e relações, importam a visualização, a orientação espacial e o pensamento geométrico. Mais recentemente, a ideia de sentido espacial, ou raciocínio espacial, é abordada por Mulligan (2015), que recorre aos trabalhos do *Spatial Reasoning Study Group* (SRSG), um grupo de vinte investigadores de áreas diversas, para caracterizar o raciocínio espacial "como a capacidade para reconhecer e manipular (mentalmente) as propriedades espaciais de objetos e as relações espaciais entre objetos. Exemplos de raciocínio espacial incluem: localizar, orientar, compor/decompor, equilibrar, esquematizar, lidar com simetria, navegar, comparar, usar escalas e visualizar" (p. 513).

Estes aspetos do sentido espacial estão presentes em muitos documentos com orientações curriculares relativas à Geometria com indicações desde os primeiros anos em diversos países (Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008; NCTM, 2000; Ontario Ministry of Education, 2008). Por exemplo, o *National Council of Teachers of Mathematics*, frisando que "Geometria é mais do que definições; é acerca da descrição de relações e raciocínio" (NCTM, 2000, p. 41), tem quatro indicações concretas sobre o que os alunos de todos os níveis de ensino, incluindo a educação pré-escolar, devem ser capazes de conseguir em Geometria:

1. Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
2. Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
3. Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
4. Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas. (NCTM, 2000)

A Dança surge como um domínio especialmente interessante para o estabelecimento de conexões externas com a Matemática. Watson (1990) dá conta de quatro características gerais da Dança que a relacionam diretamente com conteúdos da Matemática: a) exploração espacial: faculta a compreensão da geometria e as suas transformações, como são as simetrias de reflexão, a translação e a rotação; b) o ritmo: permite explorar os números e as frações a partir da sensibilização cinestésica e musical; c) a estrutura: contribui no entendimento de combinações, permutações, teoria de grafos e teoria de grupos; e d) a simbolização: presente nos processos de sistematização em notação de coreografias.

No que diz respeito ao contexto português, as orientações curriculares para o ensino da Dança são muito breves. No entanto, a nível internacional existem em alguns países orientações desenvolvidas e exigentes. Por exemplo, os *Standards for Learning and Teaching Dance in Art: 5-18*, da associação norte-americana *National Dance Education Organization* (NDEO, 2005), explicitam um conjunto vasto de elementos que devem ser tidos em conta no ensino da Dança:

1. Direção – identifica e movimenta-se nas seguintes direções: frente e trás, de lado, cima e baixo, diagonais e rotações.
2. Trajetórias – dança através do espaço descrevendo linhas retas, curvas, circulares, diagonal, ziguezagues e combinação de trajetórias.
3. Níveis – dança nos níveis alto, meio e baixo com um foco e transições.
4. Formas – descreve formas e cria desenhos com o corpo: reto, curvo, redondo, plano, curvado (angulado), torcido, horizontal, vertical, simétrico e assimétrico.
5. Espaço Pessoal – define o seu espaço pessoal em relação ao espaço pessoal de outros bailarinos.
6. Relações interpessoais – dança numa relação espacial definida com os outros: ao lado, longe, perto, atrás, na frente de, para, longe de, acima, abaixo, sobre, sob, ao redor, através e entre. (NDEO, 2005, pp.13-14)

Neste elenco encontram-se muitos elementos do domínio do sentido espacial, que estão presentes nos diversos tipos de dança. No entanto, *a dança tradicional*, definida como "prática cultural que pressupõe um conjunto de ritos e mitos que pertencem a um determinado património cultural" (Batalha, 2004, p. 214), é especialmente fértil nas conexões com a geometria. Esta dança consiste na execução de diferentes padrões de movimento, compostos por figuras várias, de forma a produzir-se uma deslocação pelo espaço em diferentes orientações (Alves, 2013). O sentido espacial também é destacado por Moura (2007) na dança tradicional, que descreve a estrutura espacial desta dança como "a configuração de um jogo de linhas, um conjunto de formas vivas e significantes do corpo em movimento" (p. 109).

Na dança tradicional é necessário dominar um conjunto de gestos técnicos, que correspondem aos movimentos realizados pelos membros inferiores e os movimentos realizados pelos membros superiores e a cabeça do dançarino (Moura, 2007). Dentre estes gestos técnicos, importa considerar aqui as formações espaciais e as figuras dançadas, atributos que favorecem a exploração do sentido espacial, medida, figuras geométricas, simetrias, entre outros (Mbusi, 2011; Rosenfeld, 2013; Watson, 2005). As formações espaciais expressam-se nas inter-relações que se estabelecem a nível da organização espacial dos bailarinos. Este conjunto de posições constituem estruturas lineares, circulares ou em quadrado (Batalha, 2004). Moura (2007) sistematiza as formações espaciais possíveis presentes nas danças tradicionais como as rodas simples, rodas duplas ou triplas, quadrilhas, colunas, filas, pares e trios. As figuras dançadas correspondem às trajetórias que os dançarinos realizam de forma dinâmica com determinadas orientações espaciais. Alves (2013) classifica-as com os termos sugestivos de moinho, cadeia, avançar e recuar, arcos, passeio e ponte. Importa também na dança tradicional atender aos princípios da composição coreográfica, que envolvem a mudança de par, repetição de figuras, alternância de figuras, acumulação de movimentos (Alves, 2013).

A literatura dá conta do desenvolvimento de alguns projetos que exploram as conexões entre a Matemática e a Dança nos últimos anos, embora com expressão muito reduzida em Portugal (Prieto, 2018). Em alguns destes projectos, a Dança surge quase sempre como um contexto ao serviço da aprendizagem da Matemática, embora também se conheçam situações inversas, em que a Matemática foi perspetivada como uma possibilidade para dançar melhor, seja ampliando a compreensão sobre coreografias existentes ou como ferramenta para criar novas coreografias (Prieto, 2018).

Em geral, valorizam-se as potencialidades das conexões matemáticas como promotores de atitudes favoráveis que predispõem para a aprendizagem da Matemática e como promotores do desenvolvimento de capacidades múltiplas, que abrangem competências associadas a diversos domínios (Prieto, 2018). Em alguns casos, afirmam-se as potencialidades da Dança para a aprendizagem de conteúdos específicos da geometria, como reta, quadrado, rectângulo e triângulo (Kalpana, 2015) ou congruência, simetria, transformações, ângulos e graus, atributos, reconhecimento de padrões, símbolos, e mapeamento em grelhas coordenadas (Rosenfeld, 2013). Em outros sublinha-se o desenvolvimento de processos como a comunicação matemática (Moore & Linder, 2012; Wood, 2008), a representação (Spanghero, 2014) e a resolução de problemas (Mbusi, 2011).

Alguns projetos educativos exploraram as conexões da Dança Tradicional com a Matemática. Aqui referimos três deles no que diz respeito à Geometria que envolvem e por serem inspiradores para a experiência de ensino subjacente a este estudo.

Mbusi (2011), professor de Matemática, realizou um estudo sobre as potencialidades do uso da dança tradicional Xhosa, da África do Sul, para o ensino da Matemática com alunos de 7.º ano. Na sua investigação utilizou as filmagens dos alunos dançando diferentes coreografias das danças tradicionais para fazer sobressair diferentes conceitos matemáticos, dando ênfase à resolução de problemas. Concluiu que a Xhosa permitiu a aprendizagem significativa de muitos conceitos do currículo de Matemática, num contexto de grande envolvimento dos alunos, favorecendo uma melhor atitude em relação à disciplina de Matemática.

Moore e Linder (2012) realizaram uma experiência com uma turma do 3.º ano a partir de um trabalho colaborativo entre as disciplinas por eles lecionadas: Dança e Matemática. Trabalharam diferentes conteúdos da Matemática, que exploram e avaliaram, como os ângulos retos, agudos e obtusos, os triângulos, os quadrados, as figuras fechadas com mais de quatro lados e os eixos de simetria. A resolução de problemas, a comunicação matemática, a representação das diferentes figuras e formações espaciais, a conexão entre as duas disciplinas e o raciocínio fizeram parte do processo desde o início até ao fim da experiência. Os alunos eram solicitados a criar coreografias em grupo que incluíssem as figuras geométricas, distâncias, ângulos, etc. Moore e Linder (2012) concluíram que a aprendizagem da geometria através da dança e a cooperação entre os pares tinha sido muito motivante para os alunos. Destacaram também que os alunos, realizando diferentes formas geométricas com os seus corpos, conseguiam uma aprendizagem mais profunda comparativamente com a do ensino tradicional.

Rosenfeld (2013), autora do projeto "Math in your feet", destaca-se por dar relevo aos processos matemáticos que os alunos desenvolvem quando lhes é pedido que criem coreografias, utilizando os movimentos e ritmos dados pela professora. Esta investigadora sublinha que as conexões realmente interessantes são as que os alunos realizam quando analisam diferentes padrões de movimento, comparando ritmos, percebendo estruturas, representando com esquemas as trajetórias, pensando matematicamente enquanto experimentam, criam e reformulam o seu trabalho e avaliam as coreografias dos outros.

Representações na Matemática e na Dança

O conceito de representação tem vindo a ser profusamente utilizado em educação matemática. Recorrendo a Goldin (2002), pode caracterizar-se como uma configuração que pode representar uma coisa de alguma forma. No domínio da Matemática, as representações têm o poder de reportar-se a entidades muito distintas como conceitos, relações, procedimentos, ideias essencialmente de natureza abstrata e dificilmente acessível sem recurso a uma representação externa (Goldin & Shteingold, 2001).

Jerome Bruner considera a representação verbal que se exprime através das palavras, em registo oral ou escrito, e distingue mais três tipos de representações: i) representações ativas, relativas ao conjunto de ações adequadas para referir ou alcançar certo resultado; ii) representações icónicas, relativas ao conjunto de imagens ou gráficos que sucintamente se referem a uma certa ideia ou processo; e iii) representações simbólicas, relativas ao conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições (Bruner, 1999).

Lesh, Post e Behr (1987) reportam-se a cinco diferentes representações que podem ser convocadas para cada objeto (figura 1). Esta proposta prevê um outro tipo de representação para além das referidas por Bruner, a representação contextual, que se reporta ao contexto ou situação em que está imerso o objeto representado. Por nos interessar a compreensão do uso das representações no contexto da Dança, consideramos também esta representação relevante no presente artigo. O esquema de Lesh, Post e Behr (1987) assinala também as relações ente as diferentes representações e este aspeto é de crucial importância (Figura 1).

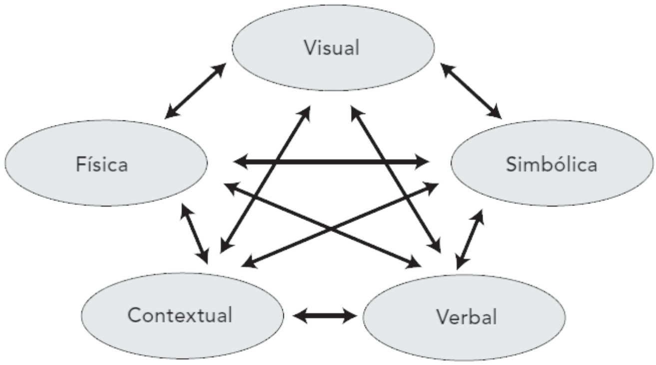

Figura 1. Representações matemáticas e suas conexões

A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as diversas representações relativas a uma ideia matemática, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essa ideia (NCTM, 2017). Cada representação funciona como uma lente e a sua conjugação proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito (Tripathi, 2008). Vários estudos mostram que a profundidade da compreensão está relacionada com a robustez das conexões entre as representações matemáticas que os alunos interiorizam. A translação entre representações, expressão usada para designar o processo que envolve passar de uma representação para outra (Lesh, Post, & Behr 1987; Marshall, Superfine, & Canty, 2010), é um processo complexo que requer conhecimento acerca dos diferentes tipos de representação de modo a que cada uma perserve a informação estrutural do objeto representado (Marshall, Superfine, & Canty, 2010). Este aspeto da competência representacional é necessário para que os alunos possam aprofundar as suas compreensões da Matemática, servindo como base para a compreensão o conhecimento construído no processo de translação (Marshall, Superfine, & Canty, 2010; NCTM, 2017).

A importância do uso de diferentes representações está presente em toda a Matemática (Goldin & Shteingold, 2001) mas é reforçada na Geometria. Quando se raciocina em Geometria, "raciocina-se *acerca* de objectos; raciocina-se *com* representações" (Battista, 2008, p. 342). Sublinha-se que, na geometria, adquirem especial relevo as representações icónicas, pois as figuras geométricas são suscetíveis de ser tomadas simultaneamente como conceitos e como representações espaciais (Kuzniak, Richard, & Michael-Chrysanthou, 2018). Enquanto que um conceito se caracteriza pela sua generalidade, abstração, ausência de substância material, e idealização, as figuras geométricas possuem propriedades espaciais como a forma, a posição e a dimensão (Deliyianni et al., 2011).

Ainda a sublinhar a importância das representações icónicas que Diezmann e English (2001) designam de diagramas (ou esquemas), que se caracterizam por uma disposição espacial que revela aspetos estruturais da situação representada e constituem ferramentas acessíveis a alunos muito jovens, através dos quais estes podem raciocinar e exprimir o seu pensamento.

Também na Dança são de grande importância as figuras. Por exemplo, Watson (2005) refere que os professores de Dança, no século XVIII, desenhavam no chão diagramas que continham signos relacionados com o ritmo e o tipo de movimento: "Estes esquemas combinam modos icónicos e simbólicos de representação em que os símbolos desenhados consistem em um diagrama de escala de posições" (Watson, 2005, p. 21).

Na dança tradicional, em que o ensino recorre geralmente à expressão verbal, com a explicação dos movimentos a realizar e sua sequência, acompanhada da representação ativa do dançarino que exemplifica os movimentos aos aprendizes, em contexto, mais recentemente tem sido feito o recurso às representações icónicas (Figura 2), que incluem imagens e símbolos relativos a movimentos ou posições específicas que os dançarinos devem executar (Moura, 2007), legando um registo escrito que contribui para perpetuar uma tradição que durante anos se transmitiu apenas pela oralidade e prática física.

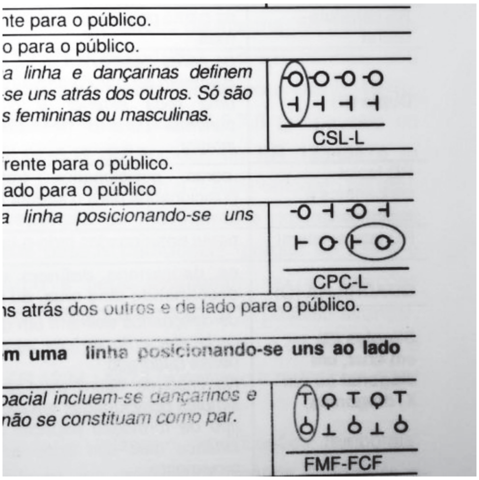
nte para o público.
o para o público.
a linha e dançarinas definem
se uns atrás dos outros. Só são
s femininas ou masculinas.
CSL-L
rente para o público.
ado para o público
a linha posicionando-se uns
CPC-L
ns atrás dos outros e de lado para o público.
m uma linha posicionando-se uns ao lado
pacial incluem-se dançarinos e
não se constituam como par.
FMF-FCF

Figura 2. Extrato de uma página do artigo "Da tradição dançada à tradição escrita" (Moura, 2007)

É ainda de notar que na Dança, para além das representações associadas ao movimento dos dançarinos, também são de importância as representações associadas às "notações coreográficas", que têm as funções de a) registar e imortalizar danças e movimentos, deixando rastros para novos processos artísticos; b) revelar procedimentos e processos coreográficos de danças em apreciação; e c) possibilitar processos educativos corporais (Spanghero, 2014).

Assim, a exploração das representações com os alunos tem um contexto natural nas conexões Matemática-Dança. Os processos matemáticos que os alunos têm de efetuar quando devem criar novas coreografias, utilizando os movimentos e ritmos dados pelo professor ou experimentados a partir da música ou outros estímulos, constituem problemas a resolver que implicam conexões entre ações motoras, representação das trajetórias e comunicação verbal ou corporal das ideias (Rosenfeld, 2013). Wood (2008) também refere diferentes modos de representação, dando o exemplo da atividade física na qual estavam envolvidos os seus alunos, constituindo o modo ativo, a posterior observação das formas em representações contextuais em 3D e, para finalizar, a realização de uma discussão oral utilizando a linguagem verbal.

Alguns autores reclamam que a possibilidade de ter experiências cinestésicas de ideias matemáticas abstratas pode ajudar os alunos a compreender melhor os conceitos matemáticos representados: "Foi encorajador observar os alunos a refinar as suas compreensões dos conceitos matemáticos requeridos na dança" (Moore & Linder, 2012, p. 107).

Kalpana (2015) refere que "a dança pode ser um meio envolvente e apropriado, para ajudar os alunos, especialmente os alunos que são aprendizes visuais e cinestésicos, a aprender formas geométricas básicas" (p.7). Uma abordagem do ensino da Matemática que integre o movimento inclui estudantes com estilos de aprendizagem diversos (Leandro, 2015; Mbusi, 2011; Rosenfeld, 2013).

Registam-se ainda outras experiências que apenas trabalham os conceitos matemáticos com o movimento do corpo sem passar para representações complementares, como é o caso de Gilbert (2002). Esta autora afirma que o facto da resolução dos problemas ser feita corporalmente, já é a prova necessária para que o professor compreenda se o aluno domina ou não os conteúdos envolvidos nessa resolução (Gilbert, 2002).

Metodologia

Contexto e participantes

O estudo reportado neste artigo consiste em parte de um estudo mais amplo (Canavarro & Prieto, 2017; Prieto, 2018) que se desenvolveu adotando uma modalidade de *Design Research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), com a concretização de uma experiência exploratória de ensino que se prolongou todo o ano letivo de 2015/16, numa escola de 1.º ciclo de uma cidade do interior de Portugal. Envolveu uma turma de 3.º ano de escolaridade, composta por 24 alunos, o seu professor titular, e as duas autoras deste artigo. No contexto escolar, os alunos nunca tinham praticado dança e as suas atividades motoras eram bastante reduzidas, pois a escola nem tinha espaço próprio para prática desportiva.

As autoras deste artigo produziram as tarefas relativas ao projeto, focadas nos conteúdos matemáticos solicitados pelo professor, o qual era também ouvido acerca da adequação das tarefas concebidas para os seus alunos. O desenvolvimento das tarefas com a turma era acompanhado por todos, estando as atividades da dança a cargo da segunda autora deste artigo e as discussões das respostas às tarefas matemáticas a cargo do professor titular da turma.

O projeto desenrolou-se em duas fases. A primeira teve por base a realização de atividades de dança no espaço da Biblioteca, a que se seguiam a exploração de tarefas matemáticas correspondentes na sala de aula normal. Estas sessões tinham periodicidade semanal e duravam duas horas, sendo o tempo equilibradamente dividido entre as duas partes. As danças eram escolhidas e adaptadas de modo a poderem fazer emergir os conceitos matemáticos desejados. Na parte da Dança, os alunos aprendiam efetivamente a dançar, após os períodos de aquecimento em que, entre outras coisas, aprendiam alguns passos básicos requeridos nas danças a abordar.

De seguida, os alunos seguiam para a sala de aula normal na qual trabalhavam em tarefas matemáticas sobre a dança acabada de dançar. Tratavam-se de tarefas desafiantes, com apelo a representações múltiplas e suas conexões, que eram resolvidas a pares ou pequenos grupos, sendo posteriormente discutidas em plenário na turma, numa prática que se pretendia de ensino exploratório da Matemática (Canavarro, 2011). Esta fase durou três meses, desde Outubro a Dezembro, concretizando-se nela doze sessões nas quais os alunos aprenderam diversas danças tradicionais e executaram outras danças espontâneas, que serviram de contexto à abordagem de temas diversos da Matemática, nomeadamente da área da Geometria. Em simultâneo, a resolução das tarefas implicava o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais, como a resolução de problemas que se colocaram em diferentes danças e a representação matemática de coreografias, exigindo relacionar as representações ativas (relativas aos movimentos dos corpos dos alunos) com as representações icónicas (que traduziam por imagens posições-chave e deslocações efetuados nas danças).

A segunda fase do projeto realizou-se entre Abril e Junho e foi composta por sete sessões, também com a duração de duas horas cada. Nesta fase procurámos reforçar a integração da Matemática e da Dança. Todo o trabalho era desenvolvido na Biblioteca, e as tarefas matemáticas surgiam entrelaçadas com as de Dança. A Matemática era chamada em duas situações. Uma delas consistia em caracterizar estruturas, formas e padrões rítmicos presentes nas danças, dando resposta a problemas concretos que se colocavam ao dançar. A outra situação convidava a reproduzir ou recriar novas danças, apelando à criatividade dos alunos, o que requeria a uma representação escrita de forma precisa com vista à dança poder ser entendida, partilhada e reproduzida de forma ativa posteriormente com outras pessoas.

Nesta fase, as danças continuaram a ser escolhidas e adaptadas com os mesmos critérios e as tarefas matemáticas mantiveram a sua natureza desafiante, embora optássemos por incluir textos menos longos nos enunciados e pedíssemos registos escritos mais completos, prescindindo de discussões coletivas muito extensas. Os alunos aprenderam quatro novas danças e foi possível explorar conteúdos diversos como as isometrias, no plano e no espaço, bem como os volumes, o m^3 e seus submúltiplos. Em simultâneo, os alunos tiveram oportunidade de resolver mais problemas, como por exemplo, um problema que se coloca efetivamente na Dança a nível profissional, relativo à feitura de marcações escritas no chão com vista a servirem de referências das posições corretas que os dançarinos devem assumir com vista a obterem uma coreografia tão perfeita quanto possível.

Recolha e análise de dados

Para efeitos deste artigo, consideramos como dados as produções escritas dos alunos relativas às respostas às tarefas em que foi explorada dança tradicional. Focamo-nos nas respostas escritas a uma sequência de tarefas que se desenrolou em torno da dança tradicional Vira da Elvira, que decorreu entre 14 de abril e 19 de Maio de 2016. Escolhemos esta sequência por diversos motivos: por um lado, na fase da sua realização os alunos já se sentiam maioritariamente à vontade a dançar, sendo assim os dados em apreciação são menos influenciados por motivos alheios à aprendizagem da Matemática; por outro lado, nesta sequência existem tarefas de natureza distinta, desde problemas abertos a tarefas mais dirigidas mas que apelam à compreensão e com ênfase na exploração de representações múltiplas. Desta forma, parecem-nos traduzir evidências consistentes das aprendizagens e compreensões dos alunos.

A análise de dados foi concretizada por análise de conteúdo das produções dos alunos, tendo em conta categorias prévias com inspiração teórica. Assim, para responder a questão 1, relativa ao uso das representações múltiplas, considerámos o tipo de representações usadas: verbais, ativas, contextuais, icónicas, simbólicas (Bruner, 1999; Lesh, Post, & Behr, 1987) e o objeto sobre o qual as representações incidiam: formações espaciais (Batalha, 2004) correspondentes às posições ocupadas pelos dançarinos, e figuras dançadas (Moura, 2007), que abarcam os movimentos que cada dançarino individualmente executa numa dada posição e as trajetórias descritas pelos dançarinos, correspondentes a efetivas deslocações no espaço.

Relativamente à questão 2, sobre os aspetos do sentido espacial revelados, consideramos como relevantes neste estudo a compreensão dos objetos geométricos convocados nas danças, suas propriedades e relações, a localização, a orientação espacial, e lidar com simetria (Nes & De Lange, 2007; Mulligan, 2015).

Nas evidências selecionadas para este artigo, reportamos as autorias das produções dos alunos usando nomes fictícios de modo a preservar a sua identidade.

Resultados

O Vira da Elvira é um vira português que adaptámos para ser dançado com esta turma de 3.º ano, com inspiração nas coreografias dos viras minhotos. Antes das aulas que se reportam de seguida, os alunos já tinham tido oportunidade de aprender esta dança num dia anterior. Por ser uma dança realizada em "quadrilhas" (formações de quatro dançarinos), a turma organizou-se em seis grupos de quatro alunos, devendo os alunos de cada grupo posicionar-se de modo a definir um quadrado, com cada aluno num vértice.

Como posicionar a turma para dançar bem o Vira da Elvira?

Após o aquecimento prévio das crianças, retomámos a dança do Vira da Elvira. Os alunos organizaram-se segundo as quadrilhas e cada um recebeu um dorsal com uma letra (A, B, C, D) para facilidade de identificação das posições de cada um na quadrilha. Ao fim de alguns minutos de retoma da dança, observámos que, no seu global, a turma estava espacialmente desorganizada, focada apenas na sua própria quadrilha, descurando as posições relativas entre quadrilhas. Questionámos, inspiradas em Watson (2005): "Acham que a dança está a sair bem para quem está a ver de fora? Acham que estão organizados? Parece-vos que as posições estão corretas?".

Perante este problema, uma aluna sugeriu a hipótese de se fazerem no chão marcações que servissem de referência às posições que todos os alunos deviam ocupar, recuperando uma estratégia já adotada anteriormente em outra dança. No entanto, outros alunos referiram outras dificuldades que experimentavam, relacionadas com os movimentos e sentidos das trajetórias a executar dentro das quadrilhas e com o ritmo em que deviam ser feitos os passos.

Os alunos trabalharam nos grupos que já estavam constituídos, cabendo a cada grupo fazer uma proposta. Sentados no chão, discutiram e registaram em folhas A3 os esquemas relativos às respetivas propostas a serem discutidas em plenário.

A análise das propostas permite identificar que quatro grupos apresentaram respostas mais simples e dois mais sofisticadas. As respostas mais simples consideraram seis quadrados organizados em disposição retangular 2 x 3. A forma escolhida do quadrado é adequada e o seu posicionamento também, embora o grupo da proposta da figura 3 não tenham previsto espaço entre os quadrados, parecendo esquecer o contexto de dança que requer espaço para os movimentos dos dançarinos. A figura 4, representativa da proposta de três grupos, considera claramente este aspeto, concedendo bastante espaço entre quadrados contíguos, convocando aqui ideias relacionadas com as dimensões relativas da distribuição espacial dos dançarinos.

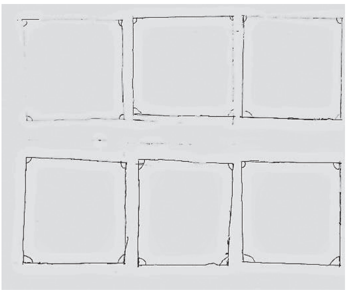

Figura 3. Proposta de Alda, Tiago, Graça, e Rui

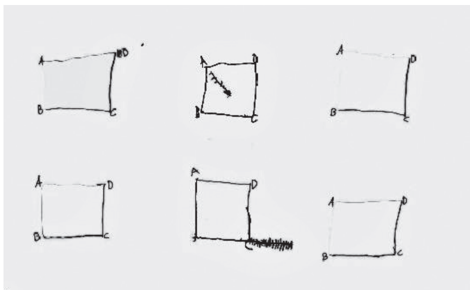

Figura 4. Proposta de Sebastião, Márcia, Gabriela, e Bruno

As respostas mais sofisticadas atenderam simultaneamente à formação espacial global que envolvia todos os alunos mas também aos requisitos da dança dentro de cada quadrilha (Figuras 5 e 6), satisfazendo assim simultaneamente o problema global da formação completa e os problemas particulares sentidos nas quadrilhas.

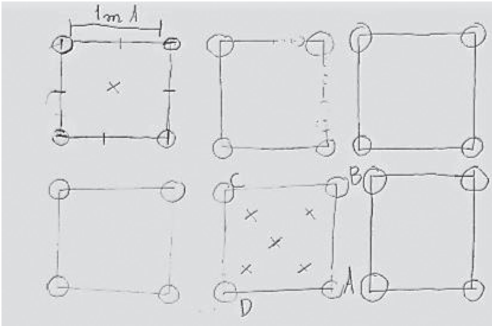

Figura 5. Proposta de Luísa, Fernando, Gina, Nuno

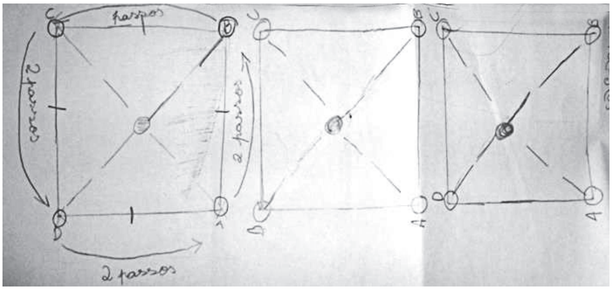

Figura 6. Proposta de Beatriz, Pedro,
Carlos, Susana

Na figura 5 observa-se a atribuição da medida de 1 metro ao lado do quadrado, bem como a sua divisão em duas partes iguais, com clara associação ao número de passos que devia ser realizado em cada lado do quadrado de modo a se conciliar as posições com o ritmo da música (havia que cumprir 16 passos em duas voltas). De notar também que em outro quadrado surge a identificação do seu centro, bem como dos pontos médios das semi-diagonais, que servem também de orientação à execução das vénias cruzadas numa parte da dança.

A proposta representada na figura 6 contém apenas três quadrados, mas na apresentação oral o grupo explicou que os outros três quadrados adotariam a mesma marcação, ficando ao lado dos três primeiros. Este grupo também inclui detalhes métricos relativos à dança em cada quadrilha, com a divisão ao meio dos lados do quadrado de modo a que caibam dois passos, e com a definição das diagonais, sendo cada semi-diagonal interrompida atendendo aos dois passos das vénias, e claramente identificado o centro, ponto de referência importante na dança.

Nas propostas de cada grupo, no que diz respeito às figuras usadas, existe uma boa escolha da forma (quadrado), uma boa perceção da sua localização relativa, embora não exista aparentemente a provisão de espaço suficiente entre os quadrados, e são considerados elementos associados à dimensão adequada para os quadrados.

A representação icónica foi usada com desenvoltura para esquematizar, associada quer às posições, quer às trajetórias ativas dos dançarinos, sendo usados pequenos círculos para assinalar os dançarinos e as letras dos dorsais (Figuras 5 e 6) e outros símbolos idiossincráticos para assinalar posições especificas relevantes ao dançar. Isto denota a presença da representação contextual, certamente associada ao facto de os grupos estarem ainda preocupados com a execução da dança dentro da quadrilha e não só, ou não tanto, com a formação global dos seis grupos num palco.

Após a discussão e eleição da proposta da figura 6, considerada globalmente mais eficaz, seguiu-se a sua marcação propriamente dita no chão. Isto constituiu um desafio acrescido, obrigando a uma definição prévia de uma estratégia global que relacionasse a posição dos seis quadrados, antes da marcação de cada um deles. Foi então combinado começar por dividir o chão ao meio, o que obrigou a medições diversas para localizar a posição da reta divisora adequada. Identificado o local aproximado, pois o mobiliário que ocupava a sala dificultava o rigore, foi colada uma fita adesiva verde clara no chão (esta cor é dificilmente percebida no chão de madeira nas fotografias) com a colaboração de todos (Figura 7). De seguida, surgiu em diálogo a ideia de que seria necessário marcar três quadrados simétricos do lado esquerdo e do lado direito da reta divisora, concordando-se em 50 cm como distância do quadrado à reta. Cada grupo definiu a posição do seu quadrado e fez a respetiva marcação (Figura 8), dispondo de uma fita métrica com o comprimento de um metro e um rolo de fita adesiva.

Figura 7. Alunos marcando o centro da sala

Figura 8. Alunos marcando no chão as quadrilhas

Dois grupos marcaram efetivamente o quadrado com preocupações de rigor com as medidas, usando a fita métrica e guiando-se por folha A4 como referência para o ângulo reto do quadrado. No entanto, quatro grupos adotaram uma postura mais pragmática e usaram medidas como os seus pés ou passos para determinar as dimensões dos quadrados respetivos, supostamente influenciados pelo contexto da dança, no qual procuravam uma referência para as posições, sem lhes importar o detalhe milimétrico. Foi também interessante observar que alguns grupos optaram não por definir o quadrado inteiro com a fita adesiva mas apenas definiram a posição dos vértices e do centro/diagonais do quadrado, acomodando assim a representação icónica ao contexto da dança e denotando compreensão total do que era relevante como referência para se posicionarem. A figura 9 mostra a marcação completada por um grupo (reforçada a branco por nós para melhor visualização).

Figura 9. Grupo completa a sua marcação

Figura 10. Alunos observam as marcas finais

Por fim, realizou-se uma discussão coletiva do que ficou marcado no chão, verificando-se que as distâncias entre os quadrados variavam, estando implícito que as distâncias ao eixo deveriam ser exatamente iguais para todos os quadrados, assim como as medidas dos lados dos quadrados e dos espaços entre eles. A ideia de simetria de reflexão em relação à reta divisora da sala foi várias vezes evocada pelo professor, recebendo a anuição dos alunos, embora na realidade pareçam não lhe ter atribuído grande relevância. De qualquer modo, foi apreciada a vantagem de o chão ter este modelo de referência para a dança e, para o testar, os alunos voltaram a dançar o Vira da Elvira sobre a marcação. A observação do vídeo permitiu confirmar a sua melhor distribuição e organização espacial. As marcas ajudaram também a melhorar a coordenação com os pares em cada quadrilha e também a sincronização com o ritmo da dança.

Representar a dança por escrito para memória futura

Tendo em conta que o Vira da Elvira era composto por três partes, solicitámos aos alunos representações elucidativas sobre cada uma delas de modo a podermos preservar a dança para recuperação futura, inspiradas em Spanghero (2004).

A realização desta tarefa foi feita sequencialmente. À vez, os elementos de duas das quadrilhas (oito alunos) observavam os colegas a dançar uma parte da dança e representavam individualmente essa parte numa folha A4.

Relativamente à primeira parte da dança, na qual os dançarinos deviam dar 16 passos no sentido contrário aos ponteiros do relógio e repetir o movimento mudando o sentido para chegar ao lugar de partida após os outros 16 passos, os oito alunos desenharam esquemas nos quais representaram as posições dos dançarinos com símbolos idiossincráticos (cruzinhas, bolinhas, ...) e as trajetórias relativas ao movimento de rotação com setas, mobilizando o dinamismo deste símbolo, como já haviam feito em outras vezes.

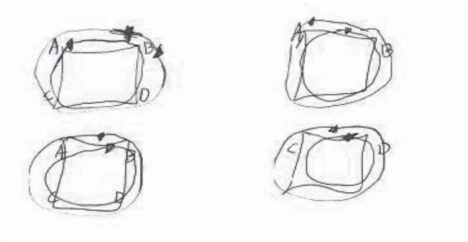

Figura 11. Representação de Bruno

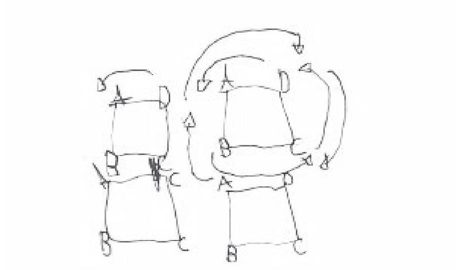

Figura 12. Representação de Sebastião

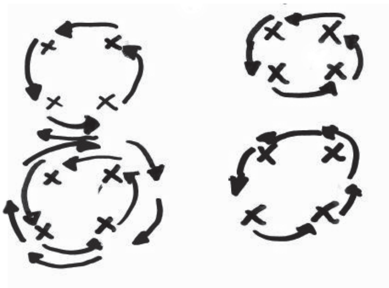

Figura 13. Representação de Graça

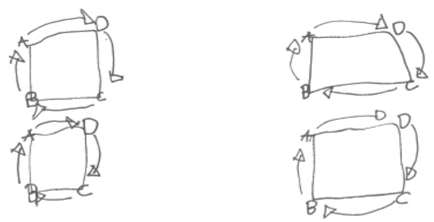

Figura 14. Representação de Américo

O movimento de ida e volta de todas as quadrilhas apenas está presente na representação de Bruno (Figura 11), que optou por representar as trajetórias circulares efetivamente por circunferências. Sebastião e Graça optaram (Figuras 12 e 13), como os restantes alunos à exceção de Américo (Figura 14), por representar os dois sentidos da rotação apenas em uma das quadrilhas, possivelmente por economia de esforço e por considerarem não necessário. Nestas representações não foram incluídos elementos métricos associados ao número de passos que o ritmo da música obriga para que os dançarinos se situem no sítio certo no momento certo, o que sugere que os alunos se focaram mais nos aspetos de orientação espacial durante as trajetórias.

De qualquer modo, todos desenharam rotações centradas no centro do quadrado, aplicaram-lhe um ou dois sentidos, e lidaram também com a amplitude da rotação, vendo-a de forma contínua ou de forma segmentada em quartos de volta. Notamos que a não inclusão explícita do centro de rotação nos esquemas nos faz interrogar se os alunos estariam a percecionar as suas trajetórias como uma efetiva rotação ou antes como a descrição dum movimento de trajetória circular.

A segunda parte da dança consistia na mudança de posições dos pares, que se encontravam na diagonal do quadrado. Cada mudança era realizada em quatro passos de forma que os pares se cruzavam lado a lado no centro do quadrado (Figura 15). Para fazer este movimento deviam afastar-se um pouco do centro sem o pisar, para evitar tropeçar no par.

Figura 15. Trocas na diagonal na 2.ª parte

Figura 16. Vénias com o par na 3.ª parte

As respostas mostram diversidade embora com elementos comuns. Os alunos assinalaram as posições dos dançarinos, alguns recorrendo a símbolos idiossincráticos e outros às letras respetivas dos dorsais. Todos indicaram o centro do quadrado, como ponto de cruzamento das diagonais, como é o caso de Américo (Figura 17) ou como ponto para onde convergem as semi-diagonais percorridas pelos dançarinos ao cruzar-se, como indica Sílvia (Figura 18), que assim incluiu representação associada ao movimento dos dançarinos. A utilização dos símbolos x 4 foi eficazmente adotada para indicar a repetição do movimento, o que nunca tinha acontecido em vezes anteriores.

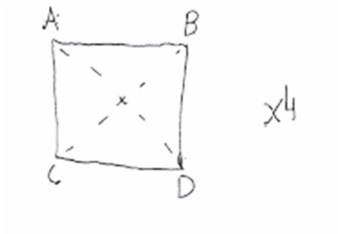

Figura 17. Representação da 2.ª parte de Américo

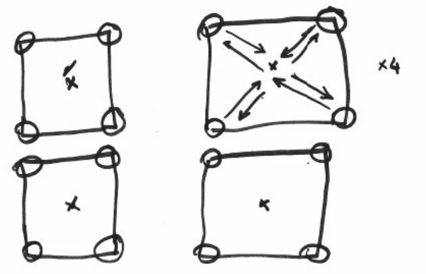

Figura 18. Representação da 2.ª parte de Sílvia

A terceira parte do Vira de Elvira (Figura 16) consistia em fazer duas vénias para o par em frente e para o do lado, o contra par, combinando este gesto com deslocações de avanço e recuo e rodando quartos de volta para mudar de orientação para o par/contra par.

Os alunos mostraram diferentes tipos de representações icónicas, havendo uma aluna, Fernanda, que, surpreendentemente, em vez de usar um esquema, como vinha acontecendo, decidiu desenhar um dançarino e ilustrar o movimento, colocando uma explicação verbal escrita (Figura19). Isto denota a preocupação da aluna com o movimento a executar e não tanto com as trajetórias a descrever. A aluna Beatriz (Figura 21) marca os pontos de referência das posições das vénias. Note-se que estas setas são retas e são refletidas umas das outras e têm o comprimento de meio lado do quadrado, modelando de forma adequada os movimentos de ir e vir e vincando corretamente a posição da reflexão que os dançarinos executam na vénia. Acrescenta setas pequenas para definir os movimentos das vénias. A Susana (Figura 22) adota setas curvas para indicar uma trajetória retilínea — porém os sentidos das setas indicam de forma correta que há movimento em dois sentidos opostos. Já Luísa (Figura 20) fez uma representação em que combina números com os passos, pretendendo dar conta de que um movimento se faz primeiro em direção a um par (com os passos 1 e 2) e depois em relação a outro par (com os passos 3 e 4). Criou assim uma forma inovadora de representar que lhe permite ultrapassar a dificuldade de registar a sequência dançada. O lugar da vénia é indicado por dois círculos, indicativos do lugar a ocupar pelo dançarino, tal como usou para os vértices.

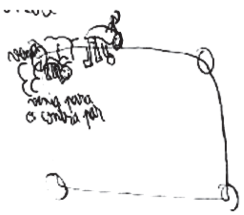

Figura 19. Representação de Fernanda

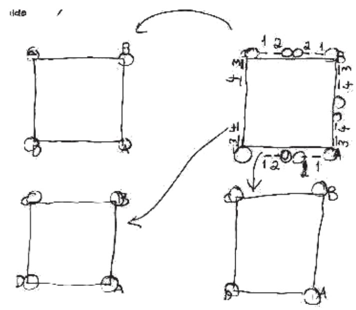

Figura 20. Representação de Luísa

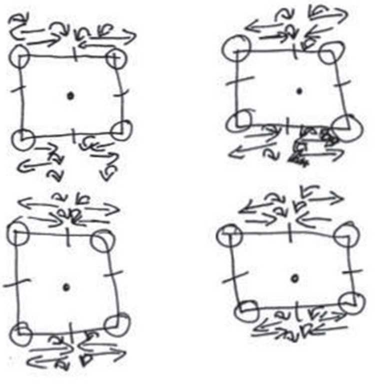

Figura 21. Representação de Beatriz

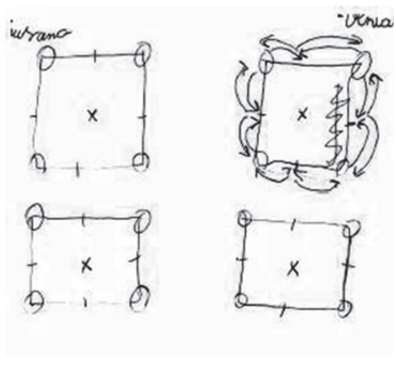

Figura 22. Representação de Susana

Nesta tarefa evidencia-se o uso de representações icónicas condicionadas à representação contextual relativa à dança. As representações icónicas são complementadas de forma criativa com representações simbólicas, que as crianças convocam por sua iniciativa. As ideias de rotação e de reflexão estão presentes nas representações, nem sempre de forma completamente explícita, sendo as características destas transformações geométricas patentes nos esquemas das crianças.

Identificar reflexões e rotações no Vira da Elvira

A terceira tarefa, inspirada em Rosenfeld (2013), solicitava diretamente aos alunos a identificação de rotações e reflexões que reconhecessem no Vira da Elvira. Os alunos conheciam os conceitos de simetria de reflexão e de rotação desde o final do 1.º período e estes foram sendo convocados, em diversos exercícios corporais como o jogo dos espelhos entre outros (Figuras 23 e 24), ao longo da experiência de ensino.

Figura 23. Aluna no chão assinala o centro da simetria de rotação relativa à cruz composta pelas quatro colegas

Figura 24. Alunas assumem posições refletidas que são verificadas por duas colegas

Os alunos trabalharam em quatro grandes grupos organizados nas quatro mesas redondas na Biblioteca, produzindo uma resposta por cada grupo, que era registada por escrito e apresentada oralmente.

A primeira questão colocada foi: "Acabaste de dançar o Vira de Elvira! Será que existem reflexões nesta dança? Se sim, em que parte(s) da dança? Podes desenhar ou explicar por palavras".

Os alunos optaram por combinar representações icónicas, simbólicas e verbais nas suas respostas, contextualizadas nas diferentes partes da dança. Reconhecem reflexões tanto relativas a posições assumidas em dados momentos pelos dançarinos, representadas por símbolos idiossincráticos, como a trajetórias que descrevem ao dançar, representadas por setas.

Três dos grupos assinalam nos seus esquemas os eixos que permitem identificar a simetria de reflexão, como pode observar-se nas figuras 26, 27 e 28. O grupo 4 (Figura 25) não exibe eixos de reflexão mas desenha figuras simétricas, dando uma justificação verbal adequada: "porque passamos pelo centro e fazemos os mesmos movimentos".

Note-se que, na resposta do grupo 1 (Figura 27), os alunos referem-se em concreto a alunos que estão "em simetria" uns com os outros, ilustrando eixos de reflexão "horizontal e vertical" e ainda às trocas "com o aluno que está no vértice oposto", assinalando aqui um "eixo na diagonal".

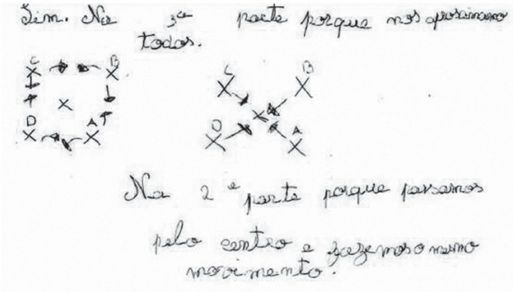

Figura 25. Resposta do grupo 4

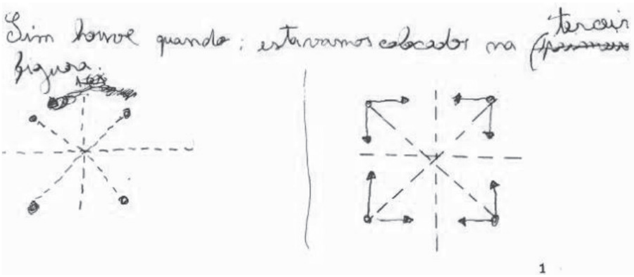

Figura 26. Resposta do grupo 2

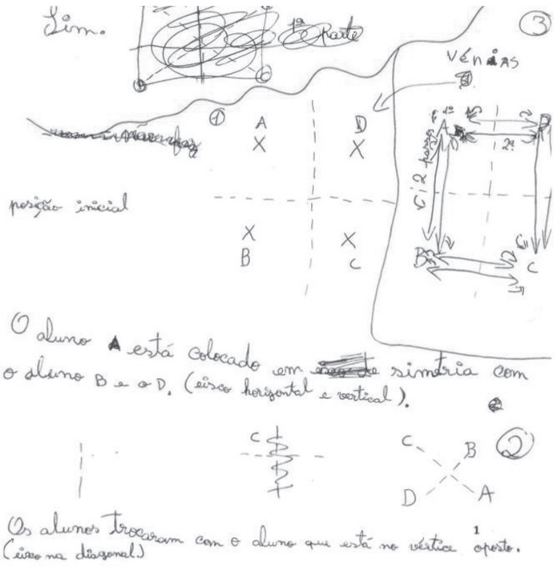

Figura 27. Resposta do grupo 1

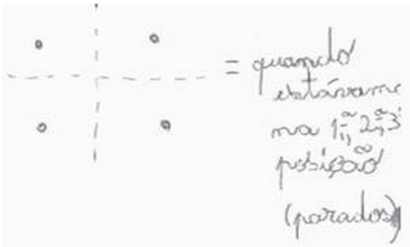

Figura 28. Resposta do grupo 3

Paralelamente, colocámos uma segunda questão requerendo a identificação de rotações: "Acabaste de dançar o Vira de Elvira! Será que existem rotações nesta dança? Se sim, em que parte(s) da dança? Podes desenhar ou explicar por palavras?".

À semelhança do que aconteceu na questão anterior, os alunos usaram diversas representações para produzir as suas respostas, com destaque para a icónica, complementada com a verbal, sempre contextualizadas. As rotações que são identificadas pelos grupos 1, 2 e 3 (Figuras 29, 30 e 31) correspondem tanto a trajetórias dos dançarinos, como a movimentos que executam na mesma posição, referindo-se o grupo 4 apenas a trajetórias. As trajetórias são ilustradas com setas curvilíneas, nas quais está inscrito um sentido, correspondendo ao sentido da deslocação dos dançarinos. Os movimentos de rotação, ilustrados com setas com curvas apertadas, estão associados ao rodar sobre si mesmo que se executa em alguns momentos da dança. O grupo 1 (Figura 29) acrescenta elementos métricos perfeitamente contextualizados, referindo-se a "rotação de duas voltas (16 passos) no sentido contrário aos ponteiros do relógio" ou a "rotação sobre si próprio de ¼ ou ¾ de volta".

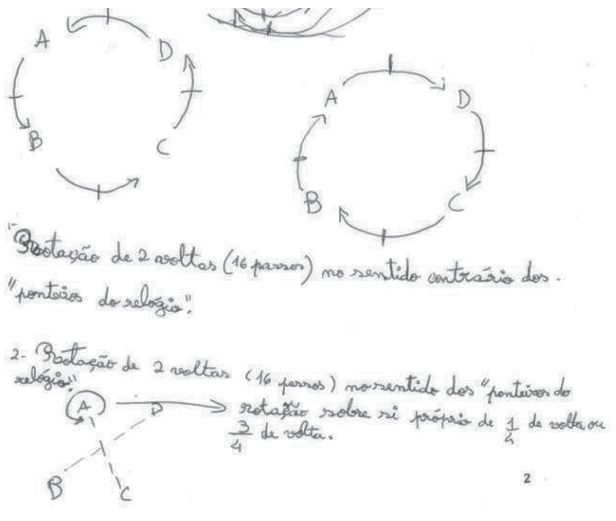

Figura 29. Resposta do grupo 1

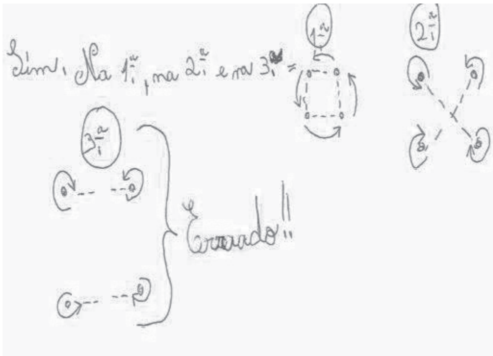

Figura 30. Resposta do grupo 3

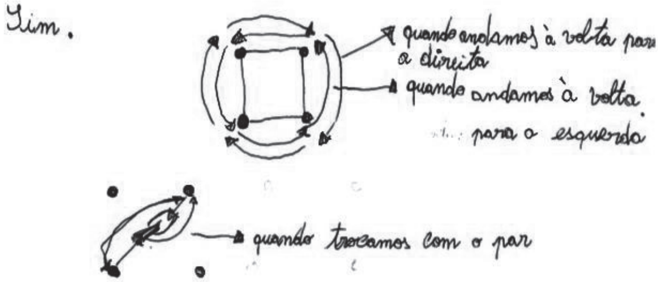

Figura 31. Resposta do grupo 2

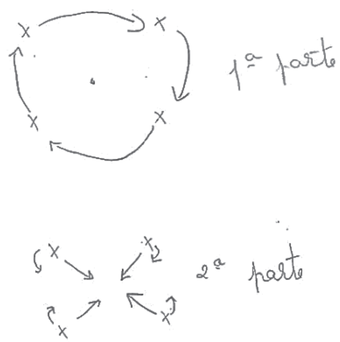

Figura 32. Resposta do grupo 4

Note-se que as respostas dos grupos não elucidam sobre se os alunos se referem exatamente a simetrias de rotação ou se consideram a rotação como uma isometria que modela as suas trajetórias. Se na figura 31 o grupo mostra um esquema de troca de par que na realidade se refere a uma simetria de reflexão, o mesmo não acontece em outros casos.

Síntese dos resultados

Nas três tarefas analisadas evidenciam-se ideias fortes que de seguida se sintetizam no quadro 1 relativas, quer ao uso de representações múltiplas pelos alunos, quer aos aspetos do sentido espacial que os alunos revelaram nas suas resoluções.

Quadro 1. Tabela síntese dos resultados mais relevantes

Tarefa	Representações	Aspetos do sentido espacial
Tarefa 1: Posicionar a turma para dançar bem	Experiência cinestésica incluindo posições, movimentos e trajetórias Esquemas relativo à formação espacial de toda a turma e de cada quadrilha, com foco nas trajetórias e posições-chave de movimentos específicos Símbolos idiossincráticos para dançarinos (ex., pequenos círculos) e para trajetórias (ex., setas) Quadrados separados acautelam possibilidade de dançar com espaço; elementos métricos previstos (1 m; 2 passos) Explicações verbais dos esquemas, conectando aspetos contextuais da dança e objetos geométricos usados.	Quadrado, diagonais, vértices, pontos médios das semi-diagonais, ... Formação de 2 x 3 quadrados, simétrica em relação a eixo no meio do chão da sala Posição relativa dos seis quadrados Medições com fita métrica e com unidades de medida diversa (pés, passos, ...) Localização Orientação espacial
Tarefa 2: Representar a dança por escrito	Experiência cinestésica incluindo posições, movimentos e trajetórias Esquemas relativos às formações espaciais e trajetórias em cada parte da dança Símbolos idiossincráticos para dançarinos (pex, pequenos círculos, letras), para trajetórias (pex, setas) e símbolos convencionais (pex, x 4) Setas adaptadas ao contexto (curvas ou retilíneas), com diferentes comprimentos e orientações consoante as trajetórias Explicações verbais dos esquemas, conectando aspetos contextuais da dança e objetos geométricos usados.	Quadrado, centro do quadrado, diagonais do quadrado Circunferência, centro da circunferência Orientação espacial Rotações com explicitação de amplitude e sentido, centro omisso mas implícito Reflexões axiais com eixo implícito

Tarefa 3: Identificar reflexões e rotações no Vira da Elvira	Experiência cinestésica incluindo posições, movimentos e trajetórias Esquemas relativos às formações espaciais e trajetórias em cada parte da dança Símbolos idiossincráticos para dançarinos (pex, pequenos círculos), para trajetórias (pex, setas) Setas adaptadas ao contexto, com diferentes comprimentos e orientações consoante trajetórias Explicações verbais dos esquemas, conectando aspetos contextuais da dança e objetos geométricos usados.	Simetria de reflexão, figuras simétricas Reflexões, incluindo eixos horizontal, vertical e diagonal Rotações, incluindo sentido e amplitude Rotação como trajetória circular, com amplitude identificada Rotação como movimento giratório sobre si mesmo, com amplitude identificada Orientação espacial

Conclusões

Este artigo tem por objetivo analisar em que medida estes alunos revelaram desenvolver o seu sentido espacial através do uso de representações múltiplas em tarefas matemáticas que tiram partido das conexões com a dança tradicional.

Uma primeira conclusão recai sobre o uso das representações múltiplas pelos alunos. A representação ativa, correspondente aos movimentos e trajetórias descritas pelos alunos foi muito bem percecionada por estes, que conseguiram, em geral, cumprir com o que lhe era pedido de forma mais ou menos perfeita. No que diz respeito à representação icónica, foi uma presença constante nas produções escritas dos alunos. Os alunos conseguiram esquematizar de forma muito adequada as formações espaciais, tanto da formação global das seis quadrilhas no Vira da Elvira, como das partes específicas da dança que envolviam diferentes figuras dançadas. Sendo a capacidade de esquematizar um aspeto essencial do sentido espacial (Mulligan, 2015), valorizamos a oportunidade que estas conexões constituíram a este propósito.

Os esquemas incluíram símbolos idiossincráticos que foram mobilizados para traduzir intuitivamente o que acontecia na dança — por exemplo, aproveitando o dinamismo que a forma das setas sugere para assinalar trajetórias percorridas. Incluíram também símbolos matemáticos convencionais de forma criativa, quer como códigos posicionais, quer como indicações de repetições de figuras dançadas, evidenciando-se a dança como contexto que convida à simbolização (Watson, 1990). Os esquemas evidenciavam corretamente aspetos estruturais da dança, o que revela o seu valor para a compreensão matemática da situação representada (Diezmann & English, 2001).

Ainda relativamente à representação icónica, que diz respeito às formações espaciais da dança, os alunos corresponderam de forma muito adequada. Já no que diz respeito às figuras dançadas, focaram-se mais nas trajetórias do que nos movimentos, embora assinalassem com correção nos esquemas as posições-chave onde movimentos específicos deveriam ocorrer. Não é de estranhar esta dificuldade em representar os movimentos pessoais de cada dançarino, o que requereria eventualmente um outro tipo de abordagem (como tentou uma aluna ao desenhar um dançarino) que permitisse isolar da formação espacial global o movimento específico de cada dançarino.

Para além da associação correta entre a representação ativa e a representação icónica, evidenciou-se o uso da representação verbal como complemento dos esquemas. Sempre que os alunos acrescentaram frases, produziram explicações percetíveis dos seus esquemas e, por vezes, nomearam os objetos geométricos a que se reportavam.

Destacamos também o papel da representação contextual que demonstrou uma presença explícita da dança nas respostas dos alunos. Este contexto ocasionou que surgissem elementos métricos nos esquemas dos alunos que não tínhamos previsto antecipadamente, elementos esses que os alunos consideraram como relevantes para poderem resolver os problemas com que se depararam ao dançar, relacionados com a conciliação das posições a ocupar na coreografia com o *timing* correto dessa ocupação. Na realidade, dançar envolve mais do que movimentar e deslocar o corpo — há que o fazer respeitando o ritmo da música e isto envolve diretamente questões de medida associadas às dimensões relativas das figuras, como bem ficou patente neste estudo. Esta ideia está em sintonia com Battista (2007) que sublinha o papel central da medida no raciocínio sobre os diversos aspetos do ambiente espacial. Constatamos assim que as conexões Matemática-Dança surgem como um contexto natural de exploração integrada de conexões internas da própria Matemática, indo ao encontro de outros estudos (Rosenfeld, 2013).

Assim, sintetizamos que nesta experiência, para além do uso de cada uma das distintas representações, os alunos evidenciaram consistência global no uso de representações de diferente tipo, o que interpretamos como terem sido bem-sucedidos na translação entre representações (Lesh, Post, & Behr 1987; Marshall, Superfine, & Canty, 2010) e nos reforça a ideia de que este contexto promoveu a compreensão das situações espaciais e dos objetos envolvidos (NCTM, 2017; Tripathi, 2008). A associação das diferentes representações tem uma importância fundamental e é através dela que se revela a compreensão dos alunos.

A este propósito, fazemos ainda uma observação sobre o papel da representação ativa. Apesar desta representação, correspondente à experiência cinestésica do dançarino, ser perspetivada com um valor absoluto por alguns autores (Gilbert, 2002), este estudo sugere que ela não é suficiente nem para garantir que os alunos se apropriam das ideias matemáticas em presença, nem da forma como elas são perspetivadas pelo professor. Não realidade, não basta dançar. A perceção dos movimentos e trajetórias dos alunos pode ser influenciada por fatores diversos e, além disso, na expressão cinestésica muitos detalhes surgem difusos nos movimentos dos dançarinos — e esses detalhes poderão ser decisivos para uma abordagem mais rigorosa e menos impressionista dos objetos geométricos envolvidos.

No que diz respeito ao sentido espacial, esta experiência de ensino permitiu o desenvolvimento de diversos seus aspetos. Os alunos revelaram globalmente a compreensão dos objetos geométricos convocados e das suas propriedades e relações (Nes & De Lange, 2007). Isto pode observar-se claramente relativamente ao quadrado e suas composições, com a adequação das formas, posições e dimensões relativas representadas nas diferentes tarefas, e ainda com a determinação do centro do quadrado através do cruzamento das suas diagonais. Os alunos revelaram também compreensão das rotações e reflexões, mas com diferenças a assinalar nestas duas transformações. No que diz respeito às reflexões, os alunos identificaram a existência desta transformação corretamente em esquemas representados, assinalando os eixos de reflexão, quer quando existia um eixo, quer quando existiam dois, registando-o na posição correta nos esquemas e referindo-se verbalmente a simetrias de reflexão associados a formações espaciais. No que diz respeito às rotações, os alunos parecem ter valorizado o seu papel enquanto trajetória percorrida, indicando com setas o movimento de deslocar-se sobre uma circunferência. Aperceberam-se também da rotação enquanto movimento individual de girar sobre si próprios, evidenciando-se a natureza das figuras geométricas como representações espaciais de si mesmos (Kuzniak, Richard, Michael-Chrysanthou, 2018). No entanto, não é seguro que a ideia de simetria de rotação ligada a formações espaciais tenha sido percecionada pelos alunos. A mesma dúvida parece encontrar-se em Moore e Linder (2012).

Relativamente a outros aspetos do sentido espacial detetados nas produções dos alunos (Mulligan, 2015), evidenciou-se a localização, entendida enquanto identificação da posição relativa dos quadrados e, nestes, dos dançarinos. Evidenciou-se também a orientação espacial, entendida de duas formas: enquanto indicação de posições relativas dos dançarinos ocasionadas pelas formações espaciais, e enquanto direção e sentido das trajetórias descritas nas figuras dançadas. O lidar com a simetria foi, como já afirmámos, parcialmente conseguido, apesar da dança oferecer mais oportunidades do que as que foram exploradas. Em contexto de conexões entre a Matemática e um domínio que lhe é estranha, importará que o professor acautele a desocultação das ideias matemáticas relevantes presentes na situação contextualizada de modo a poder retirar dela o melhor partido. Não é pelo facto de se trabalhar no contexto de conexões que os alunos se apercebem de todas as ideias matemáticas em presença ou delas se apropriam (Canavarro, 2017; Gojak, 2013).

Para terminar, e sem esquecer o carácter exploratório desta experiência de ensino, assinalamos as potencialidades das conexões matemáticas com a dança tradicional para o desenvolvimento do sentido espacial. Acentuamos o valor da atividade de esquematizar, que revelou as intuições espaciais dos alunos em situação, fundamentais no desenvolvimento do sentido espacial (Del Grande, 1990, Mulligan, 2015). Mais importante do que fazer construções rigorosas de papel, régua e compasso, parece-nos ser a esquematização informal de situações em que os alunos têm oportunidade de dar sentido ao espaço em seu redor e a si mesmos dentro desse espaço e em relação uns com os outros — e nisto foi fértil esta experiência de ensino.

Referências

Alves, M. (2013). Fundamentals of traditional dance: similarities and differences from international folk dances. In S. Lira, R. Amoeda, & C. Pinheiro (Eds.), *Sharing Cultures 2013 – Proceedings of the 3rd International Conference on Intangible Heritage.* (pp. 325-335). Aveiro: Greenlines Institute for Sustainable Development.

Batalha, A. P. (2004). *Metodologia do ensino da dança*. Cruz Quebrada: Edições FMH.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 2: Cases and Perspectives* (pp. 341-362). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação Matemática, 115,* 11-17.

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação Matemática, 144-145*, 38-42.

Canavarro, A. P., & Prieto, M. (2017). O projeto MatDance – ou as conexões matemática-dança como contexto para uma aprendizagem da matemática com sentido. *Libro de Actas do Congresso VIII CIBEM, Congresso Iberoamericano de Educação Matemática* (pp. 177-185). Jaén: FESPM.

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 133-148.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*, 9-13.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(2), 14-20.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Monoyiou, A., Michael, P., Kalogirou, P. & Kuzniak, A. (2011). Towards a comprehensive theoretical model of students' geometrical figure understanding and its relation with proof. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *CERME 7, Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598-607). Rzeszów: ERME.

Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in School Mathematics – 2001 Yearbook* (pp. 77–89). Reston, VA: NCTM.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gardner, H. (2000). *Inteligências múltiplas, a teoria na prática*. Rio de Janeiro: Artmed.

Gilbert, A. (2002). *Teaching the three Rs througt moviment experience.* Maryland: Silver Spring.

Gojak, L. (2013). *Making mathematical connections.* Disponível em: http://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Making-Mathematical-Connections/

Goldenberg, P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (35-49). Lisboa: APM.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197–218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 1–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (Eds.) (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Kalpana, I. (2015). Bharatanatyam and mathematics: Teaching geometry through dance. *Journal of Fine and Studio Art, 5*(2), 6-16.

Kuzniak, A., Richard, P., Michael-Chrysanthou, P. (2018). From geometrical thinking to geometrical working competencies. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education – Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 8-22). Oxon: Routledge.

Laban, R. (1978). *Danza educativa moderna*. Buenos Aires: Paidós.

Leandro, C. (2015). *A dança criativa e a aprendizagem no 1º ciclo do ensino básico: contributos de uma abordagem interdisciplinar no estudo do meio, no português, na matemática e na atitude criativa* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa)

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marshall, A., Superfine, A., & Canty, R. (2010). Discover strategies to engage young math students in competently using multiple representations. *Teaching children mathematics, August 2010*, 39-47.

Mbusi, N. (2011). *An investigation into the use of traditional Xhosa dance to teach mathematics: A case study in a Grade 7 class* (Doctoral dissertation). Rhodes University, Rhodes, South Africa.

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos alunos para o século XXI. Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Disponível em: https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Moore, C., & Linder, S. (2012) Using dance to deepen student understanding of geometry. *Journal of Dance Education*, *(12)*3, 104-108.

Moura, M. (2007). Da tradição dançada à tradição escrita. In E. Monteiro & M. Moura (Eds), *Dança em contextos educativos* (pp. 107 -121). Cruz Quebrada: Edições FMH.

Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education, 47*, 511–517.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2017). *Princípios para a a*ção: assegurar a todos o sucesso em matemática. Lisboa: APM. (original em inglês, publicado em 2014)

NDEO (2005). *Standards for learning and teaching dance in the arts: ages 5 – 18.* Disponível em: https://www.ndeo.org/content.aspx?page_id=22&club_id=893257&module_id=55412

Nes, F., & De Lange, J. (2007). Mathematics education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(2), 210-229.

Ontario Ministry of Education (2008). *Geometry and spatial s*ense, *Grades 4 to 6: A Guide to effective instruction in mathematics, kindergarten to grade 6.* Ontário: Ministry of Education.

Prieto, M. (2018). *A dança como contexto para aprendizagem da matemática.* Tese de doutoramento, Universidade de Évora, Évora.

Rosenfeld, M. (2013). Making math and making dance: A closer look at integration. *Teaching Artist Journal, 11*(4), 205-214.

Spanghero, M. (2014). Dançando números, formas e padrões. *Curitiba, 11*, 123-144.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8)*,* 438-444.

Watson, A. (1990). Dance and mathematics: power of novelty in the teaching of mathematics. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.206.258

Watson, A. (2005). Dance and mathematics: engaging senses in learning. *Australian Senior Mathematics Journal, 19*(1), 16-23.

Wood, K. (2008). Mathematics through movement: An investigation of the links between kinaesthetic and conceptual learning. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(1), 18-22.