A aprendizagem de conceitos probabilísticos: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra com alunos do 10.º ano da Costa Rica

The learning of probabilistic concepts: a teaching experiment using GeoGebra with 10th grade students in Costa Rica

Guillermo Ramírez-Montes
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
grm1905@gmail.com

Ana Henriques
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
achenriques@ie.ulisboa.pt

Resumo. Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que visa compreender as aprendizagens de conceitos básicos de Probabilidade, de alunos costarriquenhos do 10.º ano, no quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, e os contributos deste *software* para essas aprendizagens. O estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, tem por base os dados recolhidos através de observação participante das aulas da experiência, recolha documental das resoluções dos alunos das tarefas propostas e questionário. Os resultados evidenciam que as tarefas exploratórias com apoio de simulação permitiram aos alunos aprofundar conceitos básicos de Probabilidade e inferir propriedades associadas, promovendo a sua aprendizagem. No entanto, algumas dificuldades evidenciadas sugerem a necessidade de dar atenção às crenças prévias dos alunos resultantes de experiências do seu quotidiano sobre termos relacionados com o conceito de probabilidade. O GeoGebra desempenhou um papel importante nestas aprendizagens, facilitando a visualização de representações dos conceitos probabilísticos e a sua exploração dinâmica.
Palavras chave: Probabilidade; tarefas exploratórias; simulação; GeoGebra; experiência de ensino.

Abstract. In this paper, we present the results of a study aiming at understanding the learning of 10th grade Costa Rican students regarding basic concepts of Probability, in the context of a teaching experiment supported on exploratory tasks using GeoGebra. The study also aims at understanding the contributions of this software to support students' learning. This qualitative and interpretative study is based on data collected from participant observation of the lessons taught during the experiment, the students' work on the proposed tasks and a questionnaire. The results show that the exploratory tasks with simulation support allowed the students to deepen basic concepts of Probability and infer associated properties, promoting their learning. However, some evidenced difficulties suggest the need to pay attention to

students' prior beliefs resulting from their daily experiences, about terms related to the concept of probability. The GeoGebra played an important role in these students' learning, facilitating the visualization of probabilistic concepts representations and their dynamic exploration.
Keywords: Probability; exploratory tasks; simulation; GeoGebra; teaching experience.

Recebido em março de 2019
Aceite para publicação em junho de 2019

Introdução

Na sociedade atual, os cidadãos deparam-se frequentemente com situações do seu quotidiano que requerem uma correta interpretação de dados estocásticos para a tomada de decisões. Nesse sentido, o conhecimento probabilístico é essencial para interpretar informação que envolva conceitos de Estatística e Probabilidade, veiculada por diferentes meios de comunicação, relativa a assuntos tão diversos como a política, a meteorologia, os jogos e o desporto, entre outros.

Os alunos confrontam-se frequentemente com fenómenos aleatórios, cuja ocorrência é atribuída ao acaso por falta de explicação ou causa únicas (Carvalho & Fernandes, 2005), não só na aula de Matemática, mas também em outros contextos e atividades sociais. A Probabilidade torna-se, assim, uma área de conhecimento matemático que não só tem um papel instrumental em diversas disciplinas académicas, mas também é útil para o dia-a-dia dos alunos, permitindo quantificar a incerteza associada a estes fenómenos (Batanero, 2006). Estas razões justificam porque a Probabilidade tem vindo a ganhar relevância nas orientações curriculares (e.g. Franklin et al., 2007), incluindo na Costa Rica que, na última reforma curricular proposta pelo Ministério de Educação Pública (MEP, 2012), outorga um espaço mais relevante à aprendizagem da Probabilidade, quer no Ensino Primário (1.º ao 6.º ano), quer no Ensino Secundário (7.º ao 11.º ano). Assim, na Costa Rica, a Probabilidade é um tema que deve ser ensinado desde os primeiros anos de escolaridade e, junto com a Estatística, é vista como "parte obrigatória dos conhecimentos que o cidadão deve ter" (MEP, 2012, p. 15).

Na prática de sala de aula, estas orientações curriculares tendem a permanecer influenciadas por metodologias de ensino e aprendizagem focadas na memorização ou aplicação de fórmulas e procedimentos, o que não permite o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos para fazerem inferências e dar sentido aos conceitos que estão a aprender em contextos reais (Chaves, 2016; NCTM, 2014). Como resultado da adoção destas metodologias, os alunos revelam diversas dificuldades referidas na literatura, como a incompreensão de conceitos básicos e da linguagem e notação formal utilizada na Probabilidade (Nacarato & Grando, 2014), a interpretação incorreta de dados e cálculos probabilísticos e a limitada capacidade para mobilizar os conhecimentos e cálculos probabilísticos em outros contextos diferentes dos trabalhados na sala de aula (Munisamy & Doraisamy, 1998). Estas dificuldades repercutem-se no facto de grande parte dos alunos não gostar da Probabilidade ou considerá-la um tópico difícil (Batanero, 2005; Chaves, 2016).

A experiência do primeiro autor na lecionação da unidade de Probabilidade a alunos costarriquenhos do 10.º ano permite constatar dificuldades semelhantes às mencionadas, fazendo emergir a necessidade de adotar novas metodologias de ensino e aprendizagem que ajudem os alunos a ultrapassá-las. Uma possível abordagem pedagógica da Probabilidade é optar por estratégias de ensino que estimulem a autonomia e participação ativa dos alunos no seu processo de aprendizagem, a partir de tarefas exploratórias com recurso à tecnologia (NCTM, 2014). Esta abordagem deve permitir trabalhar de modo interativo, aprofundar e dar sentido a conceitos e procedimentos e usá-los na resolução de problemas e tomada de decisões (Chaves, 2016; NCTM, 2014), considerando os distintos significados associados à Probabilidade para o aluno ter uma compreensão global do conceito (Batanero, 2006). O uso de *software* educacional dinâmico, como o GeoGebra, reveste-se de particular importância para introduzir e aprofundar distintos conceitos probabilísticos de forma dinâmica através da simulação de fenómenos aleatórios, com recurso à folha de cálculo ou à janela gráfica que este *software* disponibiliza, complementando as definições e cálculos formais, e favorecendo a construção do conhecimento envolvido no ensino e aprendizagem da Probabilidade (Inzunza, 2014).

Este artigo pretende contribuir para o conhecimento no campo da educação probabilística, reportando os resultados de um estudo que objetiva compreender as aprendizagens de conceitos básicos de Probabilidade, de alunos costarriquenhos do 10.º ano, no quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, e os contributos deste *software* para essas aprendizagens.

Na secção seguinte apresentamos o quadro teórico que suporta o estudo, abordando aspetos do ensino e aprendizagem da Probabilidade e o papel dos recursos tecnológicos nesse processo. Depois descrevemos a metodologia adotada, incluindo a experiência de ensino que está na base do estudo. Finalmente, depois da apresentação dos resultados empíricos referentes ao trabalho dos alunos na resolução das tarefas, apresentamos as principais conclusões do estudo e algumas considerações pedagógicas.

Orientações curriculares no ensino e aprendizagem da Probabilidade

Embora a Probabilidade esteja fortemente associada aos jogos de azar, os quais estiveram na sua origem como ramo da Matemática, a sua atual aplicação em outras disciplinas e em muitos fenómenos do quotidiano envolvendo a incerteza e a previsão de acontecimentos justifica a importância que tem vindo a adquirir no campo da Educação Matemática (Batanero, 2005, 2006). Essa importância pode observar-se nas orientações curriculares de diversos países que incluem a Probabilidade nos conteúdos a serem ensinados ao longo da escolaridade obrigatória, sugerindo que o seu ensino não se reduza a situações de jogo mas promova um aprofundamento do conhecimento e do raciocínio probabilístico dos alunos, permitindo uma tomada de decisões informada e a compreensão da Estatística inferencial em níveis superiores (e.g. Franklin et al., 2007; MEC, 2013; MEP, 2012; NCTM, 2000, 2014). Estas orientações perspetivam mudanças no ensino da Probabilidade, em diversos níveis de ensino, que dizem respeito ao uso de uma abordagem orientada para os dados, onde os alunos deverão realizar experiências ou simulações, formular questões ou previsões, recolher e analisar dados dessas experiências e propor e justificar conclusões e previsões baseadas nos dados. Nesta linha, a utilização da simulação é de particular importância no ensino da Probabilidade, permitindo uma abordagem de experiências aleatórias através de modelos visuais que apoiam o aluno na interpretação de conceitos, podendo observar-se caraterísticas que dificilmente se podem identificar a partir de cálculos (Franklin et al., 2007; NCTM, 2014).

No Programa de Matemática da Costa Rica (MEP, 2012), o ensino da Estatística e da Probabilidade é valorizado ao longo de todo o percurso escolar dos alunos, embora com um maior foco no 8.º e 10.º anos, atendendo à reconhecida necessidade dos alunos, futuros cidadãos, serem capazes de compreender, interpretar e comunicar dados estocásticos. Para além disso, este programa atribui um papel de relevo à Probabilidade, mencionando que esta deve ser abordada continuamente desde os primeiros níveis de ensino, partindo de uma base intuitiva nos níveis mais baixos até chegar a uma formalização nos níveis superiores, e recorrendo à tecnologia para trabalhar visualmente as propriedades de conceitos que se revelam difíceis para os alunos.

Ortiz, Batanero e Serrano (2001), numa análise de manuais escolares espanhóis para o ensino secundário, identificaram grande diversidade de conceitos usados no processo de ensino-aprendizagem da Probabilidade, tais como: acaso, aleatoriedade, incerteza e provável. Estes e outros conceitos, como casos totais e favoráveis, acontecimento e tipos de acontecimentos (complementares, disjuntos, equiprováveis, elementares, compostos, provável, impossível e certo), para além de constarem nos programas de Matemática espanhóis, são também indicados como aprendizagens comuns em programas de Matemática do ensino básico e secundário de países como a Costa Rica (MEP, 2012) e Portugal (MEC, 2013).

Batanero (2005) refere-se a diversos significados históricos associados à Probabilidade, sendo de grande importância os significados clássico, frequencista e axiomático por estarem atualmente, considerados nas orientações curriculares (Franklin et al., 2007; NCTM, 2000, 2014; MEC, 2013; MEP, 2012).

O significado intuitivo, que emergiu em civilizações antigas, está maioritariamente associado aos jogos de azar e a ideias intuitivas dos alunos que ainda não estudaram probabilidades, pelo que usam expressões e frases coloquiais para quantificar a incerteza de uma situação e o seu grau de crença nessa situação. A crença pessoal sobre a possibilidade de sucesso de um acontecimento depende também de um certo conhecimento resultante da experiência, que não é o mesmo para todos, resultando num significado subjetivo de probabilidade, associado à abordagem Bayesiana, mas que se mantém controverso em relação ao seu estatuto científico. Com o passar dos anos surgiram outros significados, como o frequencista, que permite atribuir probabilidades a acontecimentos aleatórios a partir da frequência relativa observada numa grande quantidade de ensaios de uma experiência, realizados nas mesmas condições. Outros mais teóricos, como os significados clássico (ou de Laplace) e axiomático, definem probabilidade, respetivamente, como uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis associados a um acontecimento e o denominador é o número de casos possíveis associados à experiência e como um valor que satisfaz um conjunto de axiomas associados a um modelo matemático. Será importante que o ensino da Probabilidade considere os significados intuitivo e subjetivo, mas sem substituir o seu ensino formal (Batanero, 2005; Batanero & Díaz, 2012; Wilhelmi, Lasa, Abaurrea, & Belletich, 2019).

Quando os alunos iniciam o estudo formal da Probabilidade, maioritariamente já vivenciaram alguns dos conceitos probabilísticos referidos, a partir de situações do seu quotidiano, tendo-lhes frequentemente atribuído significados distintos dos que se considera no seu ensino formal. Assim, a aprendizagem da Probabilidade, por vezes, é influenciada pelas crenças ou experiências quotidianas dos alunos, dando origem aos significados intuitivo e subjetivo de probabilidade, e como consequência podem emergir dificuldades na compreensão de conceitos probabilísticos quando os abordam formalmente na sala de aula (Batanero, 2005; Ireland & Watson, 2009). Será então importante para a compreensão do conceito de probabilidade, visto como um processo de construção contínuo, que os alunos aprendam de modo progressivo os seus diferentes significados. Nesse sentido, o ensino da Probabilidade deverá considerar os significados intuitivo e subjetivo, mas sem perder o foco no formalismo ou axiomática do conceito e sem limitar a aprendizagem a um só significado (Batanero, 2005; Wilhelmi, Lasa, Abaurrea, & Belletich, 2019).

Resumindo, o ensino e aprendizagem da Probabilidade é um processo complexo, sendo necessário procurar estratégias para ajudar os alunos a desenvolver intuições corretas neste tópico (Batanero & Díaz, 2012) e a compreender diferentes aspetos de acontecimentos, como as quatro "exigências cognitivas" referidas por Bryan e Nunes (2012): compreender aleatoriedade; trabalhar espaço amostral; comparar e quantificar probabilidades; e compreender relações entre acontecimentos. A Teoria de Conjuntos tem vindo a ser usada para abordar os significados de probabilidade clássica e formal ou axiomática, partindo da riqueza das operações e representações que esta teoria fornece. Um caso particular dessas representações, de muita relevância, são os diagramas de Venn, pois permitem representar acontecimentos e simplificar a análise probabilística, reduzindo a dependência de fórmulas e facilitando a visualização dos elementos amostrais dos acontecimentos e a relação existente entre vários conceitos (MEP, 2012).

Vários autores também enfatizam o uso da simulação, entendida como um processo artificial que permite reproduzir o comportamento de um fenómeno aleatório (Martins, 2011), destacando as suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da Probabilidade. Fernandes, Batanero, Contreras e Díaz (2009) salientam o potencial desta abordagem para introduzir linguagem e conceitos probabilísticos e para proporcionar experiências probabilísticas aos alunos que, por limitação de tempo e recursos, não seriam possíveis usando métodos analíticos. Por exemplo, a simulação com recurso à tecnologia promove métodos exploratórios de aprendizagem, permitindo realizar, em pouco tempo, um grande número de experiências aleatórias, variando condições e observando os resultados. Os alunos têm, assim, oportunidade para identificarem a diferença entre probabilidade experimental e probabilidade teórica ou para aprofundarem representações e propriedades ligadas a conceitos que comumente são abstratos, desenvolvendo uma correta intuição probabilística e motivação para a aprendizagem da Probabilidade (Fernandes et al., 2009; Munisamy & Doraisamy, 1998). A importância da simulação para promover a aprendizagem também resulta da sua relação com a modelação, pois permite construir um modelo matemático a partir de inferências que os alunos possam formular com base nas experiências simuladas, especificando hipóteses matemáticas sobre o fenómeno em estudo (Fernandes et al., 2009; MEP, 2012).

Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Probabilidade

Na literatura são referidas diversas dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos probabilísticos e possíveis causas associadas. Por exemplo, Oliveira (1990) salienta que limitar o ensino da Probabilidade a uma abordagem clássica, sem refletir sobre a natureza dos acontecimentos, pode trazer dificuldades aos alunos quando trabalham com contextos onde não existe equiprobabilidade dos acontecimentos elementares. Por seu lado, Nacarato e Grando (2014) identificaram dificuldades dos alunos do ensino secundário na interpretação do enunciado de tarefas, por desconhecimento da linguagem formal ou de termos usados no enunciado que dificultam essa interpretação. No mesmo sentido, Groth, Butler e Nelson (2016) enfatizam que alunos deste nível de ensino, frequentemente, fazem interpretações erradas de termos probabilísticos comummente utilizados no seu quotidiano, tais como acontecimento impossível, certo, improvável, e menos provável.

No estudo de Munisamy e Doraisamy (1998), com alunos de idades entre 12 e 15 anos, os autores observaram dificuldades na compreensão dos conceitos de acontecimentos complementares e no cálculo da probabilidade da reunião de acontecimentos. Para além disso, estes autores enfatizam que embora os alunos sejam capazes de calcular frequências relativas, não são capazes de aprofundar o significado matemático atribuído ao conceito, apresentando dificuldades para calcular a probabilidade de um acontecimento a partir do significado frequencista. Esta dificuldade pode ter origem no facto de o aluno centrar a sua aprendizagem na realização de cálculos de probabilidade, onde a interpretação dos resultados desses cálculos não é fomentada, sendo necessário contrariar esta tendência (Chaves, 2016).

O GeoGebra na aprendizagem da Probabilidade

A presença de dificuldades na aprendizagem da Probabilidade e a existência de recomendações curriculares no âmbito da Educação Matemática (MEP, 2012; NCTM, 2000) têm conduzido os professores e investigadores a propor abordagens de ensino com recurso à tecnologia, procurando superar essas dificuldades dos alunos. A tecnologia surge assim como um recurso alternativo na aula de Matemática, promovendo novas práticas educativas e aprendizagens através: do envolvimento do aluno para que se concentre na exploração e interpretação de dados; da possibilidade de ter diversas representações disponíveis para resolver uma tarefa e visualizar conceitos abstratos; da automatização de cálculos; o trabalho com simulações; da investigação de problemas da vida real; e da promoção da colaboração e participação de todos os alunos (Chance, Ben-Zvi, Garfield, & Medina, 2007).

No contexto educativo descrito nas secções anteriores, é essencial ter em conta as potencialidades do uso dos recursos tecnológicos, em particular para a simulação, de forma a explorar ideias matemáticas e testar conjeturas sobre relações matemáticas associadas ao conceito, utilizando modelos visuais que ajudem o aluno no aprofundamento do conceito e fomentem o seu raciocínio matemático (NCTM, 2014). Neste sentido, o *software* educacional, sobretudo o de natureza dinâmica, tem vindo a ser um recurso valorizado para a sala de aula de Matemática, em particular o GeoGebra, devido às caraterísticas que dispõe para trabalhar experiências aleatórias, nomeadamente permitindo simulá-las, observando diversas representações do conceito probabilístico, incluindo identificar relações entre os resultados associados ao conceito (Inzunza, 2014; MEP, 2012).

No que se refere à simulação com o GeoGebra, Erickson (2006) menciona que o *software* permite realizar muitas repetições de uma experiência aleatória, simples e compostas, num curto espaço de tempo, ajudando o aluno a focar-se na interpretação dos resultados em vez dos cálculos que realiza para os obter. Por seu lado, Inzunza (2014) destaca a simulação com o GeoGebra como um meio para promover a inferência de propriedades probabilísticas e para estabelecer relações que o aluno possa observar a partir das representações associadas ao conceito em estudo, tal como procura ilustrar a Figura 1. Nesta figura, apresenta-se uma simulação da experiência de lançamento de um dado, uma *grande* quantidade de vezes, permitindo simultaneamente a visualização gráfica (lado esquerdo) e numérica na folha de cálculo (lado direito) das frequências obtidas para cada resultado possível do lançamento do dado. Esta simulação procura mostrar ao aluno que o valor da probabilidade para qualquer acontecimento elementar (sair uma face específica) pode obter-se observando a frequência relativa e o valor teórico para que esta tende a aproximar-se, sinalizado na representação gráfica com a linha horizontal que intersecta algumas das barras. A autora destaca, igualmente, a utilidade desta simulação com o GeoGebra para trabalhar o conceito intuitivo da lei dos grandes números e estabelecer a relação entre probabilidade clássica e probabilidade frequencista.

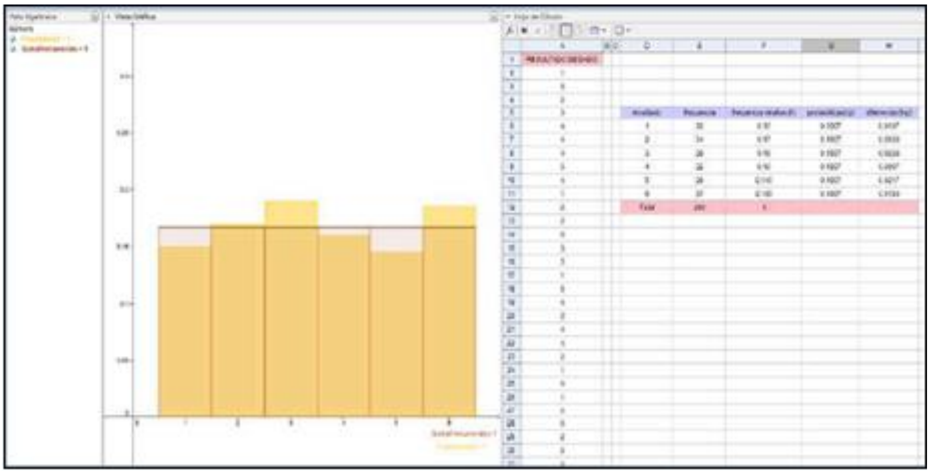


Figura 1. Simulação do lançamento de um dado para inferir a probabilidade a partir da noção frequencista, no GeoGebra (Inzunza, 2014, p. 8)

Mercado (2013) sugere ainda o uso didático do GeoGebra para o ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos no ensino secundário, salientando a sua potencialidade para explorar diversos conceitos básicos e regras probabilísticas, como por exemplo a regra para o cálculo da probabilidade da reunião de acontecimentos e de acontecimentos complementares, aspetos em que os alunos sentem dificuldade como foi referido antes (Munisamy & Doraisamy, 1998). O autor também utiliza diagramas de Venn para trabalhar a exploração de propriedades probabilísticas. Neste caso, a partir de variações nos dados de entrada, $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$, ao deslocar os seletores que representam os valores de probabilidade, ajustam-se imediatamente os valores das outras probabilidades.

No entanto, será necessário considerar que as dificuldades derivadas da falta de familiarização com o *software* ou a utilização do computador podem gerar uma certa resistência do aluno a usar a tecnologia para resolver problemas cujo cálculo seja fácil de realizar manualmente (Coutinho, 2011), pelo que devem ser consideradas estas variáveis quando o aluno trabalha pela primeira vez com estes recursos.

Contexto e metodologia

Este estudo tem como base uma experiência de ensino apoiada numa sequência de cinco tarefas exploratórias (T1 a T5) com recurso ao GeoGebra, visando a aprendizagem de conceitos básicos de Probabilidade presentes no programa de Matemática da Costa Rica (MEP, 2012), como se sintetiza no Quadro 1.

A experiência de ensino foi realizada com 28 alunos de uma turma de 10.º ano (14 raparigas e 14 rapazes com idades entre 15 e 16 anos), numa escola secundária localizada perto de San José, capital da Costa Rica. Estes alunos têm revelado um bom desempenho académico em Matemática ao longo do seu percurso escolar, marcado por metodologias de ensino expositivas e trabalho individual com pouco contacto com *software* educativo, sendo também considerados disciplinados e trabalhadores, envolvendo-se nas atividades propostas em sala de aula. O investigador (primeiro autor) assumiu igualmente o papel de professor da turma nas cinco aulas de 90 minutos da experiência de ensino, após negociação com a professora titular da turma, o que lhe permitiu uma observação participante.

Quadro 1. Tópicos e objetivos de aprendizagem por tarefa da experiência de ensino

Tópicos da Tarefa	Objetivos
T1: Experiências aleatórias, casos favoráveis, casos possíveis, acontecimento.	Identificar caraterísticas associadas à aleatoriedade, casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos.
T2: Acontecimentos equiprováveis.	Inferir o conceito de equiprobabilidade.
T3: Regra de Laplace, acontecimentos certos, impossíveis, mais prováveis.	Inferir a regra de Laplace, determinar a probabilidade teórica de acontecimentos, classificar acontecimentos como equiprováveis, certos e impossíveis a partir do valor de probabilidade.
T4: União e complemento de acontecimentos.	Inferir propriedades da probabilidade para acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, e utilizá-las na resolução de tarefas.
T5: Lei dos grandes números.	Inferir o conceito de probabilidade frequencista, e utilizá-lo para estimar áreas geométricas.

Numa primeira aula, prévia à intervenção, o investigador apresentou-se à turma, fez uma observação geral para conhecer os alunos e aplicou um teste diagnóstico (TD) que permitiu evidenciar os conhecimentos conceptuais prévios dos alunos em tópicos de Probabilidade, necessários ao trabalho nas tarefas da experiência de ensino. Na última aula da experiência foi aplicado um teste de avaliação (TA) das aprendizagens dos alunos e um questionário final para conhecer as suas opiniões sobre a experiência de ensino.

As aulas da intervenção seguiram uma estrutura comum, cumprindo as três fases do ensino exploratório (Canavarro, 2011). O professor apresenta a tarefa aos alunos, dando-lhes as indicações gerais necessárias para que iniciassem a sua resolução, mas sem os orientar para uma estratégia. A seguir, os alunos trabalham autonomamente a pares na resolução da tarefa, com recurso ao GeoGebra, tendo o professor acompanhado esse trabalho para os apoiar nas suas dificuldades através de questionamento, sem lhes dar respostas diretas. Finalmente, realiza-se um momento de discussão coletiva guiado pelo professor para partilhar resoluções, aprofundar as aprendizagens e, paralelamente, fazer uma síntese e formalização dos conceitos trabalhados na tarefa.

O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986). A recolha de dados teve por base: (i) as resoluções escritas dos alunos do teste diagnóstico, do teste de avaliação final e das tarefas trabalhadas com apoio do GeoGebra; (ii) os registos digitais das suas resoluções no GeoGebra; (iii) as gravações áudio dos momentos de discussão em sala de aula; e (iv) as respostas ao questionário final. A análise dos dados, descritiva-interpretativa (Wolcott, 2009), é focada nas aprendizagens reveladas pelos alunos dos conceitos probabilísticos, tendo-se estabelecido três categorias de análise dos conceitos que atendem aos objetivos de aprendizagem (MEP, 2012). A primeira categoria diz respeito a conceitos relacionados com aleatoriedade (probabilidade, variabilidade, incerteza, acaso), a segunda categoria considera conceitos associados ao espaço amostral (acontecimento, casos favoráveis, casos possíveis, acontecimentos disjuntos e complementares) e a última categoria inclui os significados clássico e frequencista de probabilidade. A análise dos contributos do GeoGebra para essas aprendizagens considera aspetos da teoria com foco na exploração e construção de conceitos (Inzunza, 2014), na inferência de propriedades probabilísticas a partir de diferentes representações de um conceito (Mercado, 2013) e no papel que o aluno reconhece ao *software* para trabalhar os conceitos probabilísticos, incluindo as suas dificuldades no trabalho com o GeoGebra.

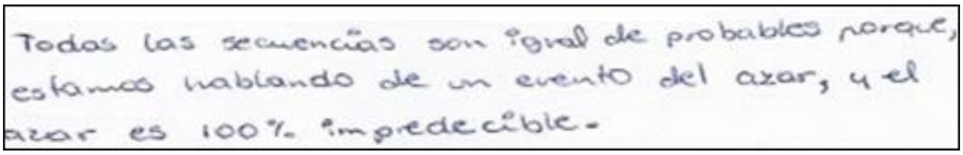
A seguir apresentamos os resultados organizados por estas categorias, apoiados em excertos representativos do trabalho dos alunos nas questões (Q#) das tarefas (T#), de modo a evidenciar a diversidade de resultados que emergiram da análise. Os alunos são referidos com nomes fictícios para proteger a sua identidade.

Resultados

Conceitos associados à aleatoriedade

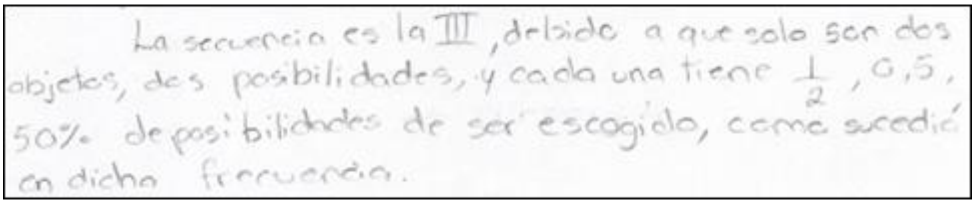
O conceito de aleatoriedade foi avaliado na Q4 do TD e na Q4a do TA, ambas referidas a extrações de bolas com reposição, e trabalhado com recurso ao GeoGebra na Q1b da T1 e na Q1 da T2, referidas a lançamentos de dois dados e um dado, respetivamente. Na Q4 do TD, os alunos são questionados sobre qual a sequência mais provável, de um conjunto de 3 sequências aleatórias fornecidas no enunciado, que resulta da extração cega de dez bolas, com reposição, de uma urna que contém uma bola vermelha e uma amarela, pretendendo-se observar a capacidade dos alunos identificarem a aleatoriedade em sequências de acontecimentos equiprováveis. Apenas 18% dos alunos, como a Margarida, evidenciou uma compreensão correta de aleatoriedade (Figura 2), associando "o acaso" a um fenómeno em que a ordem de extração das bolas não importa, uma caraterística associada ao conceito de aleatoriedade.

A restante percentagem dos alunos tem uma compreensão vaga da aleatoriedade. Por exemplo, Filipa afirma que a sequência mais provável é a que tem o mesmo número de bolas amarelas e de bolas vermelhas (Figura 3).


Todas las secuencias son igual de probables porque, estamos hablando de un evento del azar, y el azar es 100% impredecible.

[Todas as sequências são igualmente prováveis porque estamos a falar de um acontecimento do acaso, e o acaso é 100% imprevisível]

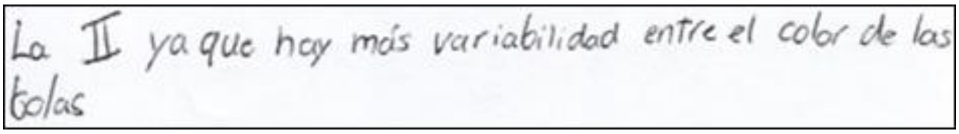
Figura 2. Resolução de Margarida (TD.Q4)


La secuencia es la III, debido a que solo son dos objetos, dos posibilidades, y cada una tiene $\frac{1}{2}$, 0,5, 50% de posibilidades de ser escogido, como sucedió en dicha frecuencia.

[A sequência é a III, dado que são só dois objetos, duas possibilidades, e cada possibilidade tem 1/2, 0.5, 50% de possibilidade de ser escolhido, como sucede com a referida frequência]

Figura 3. Resolução de Filipa (TD.Q4)

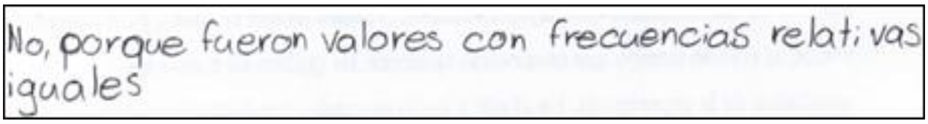
Filipa fundamenta a sua resposta no significado clássico de probabilidade, mesmo não tendo que ser utilizado dado o caráter aleatório da experiência. Outros alunos, apesar de considerarem a presença da aleatoriedade, utilizando termos como "variabilidade", associam-na incorretamente a um padrão de alternância, de que é exemplo a resposta de Tiago (Figura 4).


La II ya que hay más variabilidad entre el color de las bolas

[A sequência II, dado que tem mais variabilidade entre a cor das bolas]

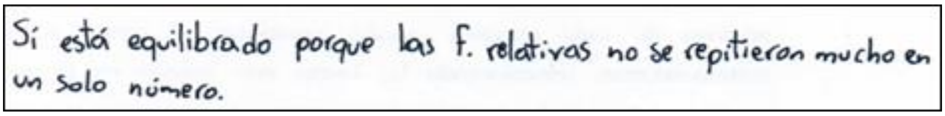
Figura 4. Resolução de Tiago (TD.Q4)

Ao explorarem as primeiras duas tarefas apoiadas pelo GeoGebra, os alunos simularam o lançamento de dois dados (T1) e de um dado (T2), realizando um número crescente de repetições da experiência. Todavia, a maioria dos alunos continuou a revelar dificuldades em identificar a aleatoriedade, característica que justifica a necessidade de repetir o lançamento de dados um número elevado de vezes para estabelecer um padrão sobre os acontecimentos do fenómeno em estudo. Por exemplo, Kévim e Pedro (Figura 5), após repetirem dez vezes a simulação do lançamento de dois dados, respondem que os resultados obtidos para a soma das pintas das faces dos dados não são as esperadas, pois obtiveram "valores com frequências relativas iguais" quando esperavam somas com maior frequência para acontecimentos com maior número de casos favoráveis. Também Rosa e Fábio (Figura 6), após simularem o lançamento de um dado com $n = 1$, $n = 5, n = 10$ repetições da experiência, respondem incorretamente que o dado está equilibrado com base nos resultados obtidos apenas com $n = 10$ repetições.



[Não, porque foram valores com frequências relativas iguais]

Figura 5. Resolução de Kévim e Pedro (T1.Q1b)



[Sim, está equilibrado porque as frequências relativas não se repetiram muito num só número]

Figura 6. Resolução de Rosa e Fábio (T2.Q1)

As respostas destes alunos evidenciam uma conceção errónea, ao assumirem antecipadamente os acontecimentos elementares como equiprováveis, não considerando a possibilidade de poder obter diferentes resultados na distribuição das frequências, fazendo uma outra simulação. Já a resolução de Vanuza e Charol (Figura 7), por exemplo, evidencia que as alunas, após simularem dez repetições do lançamento de um dado, obtêm frequências mais elevadas para um acontecimento, enquanto outros acontecimentos não ocorreram.

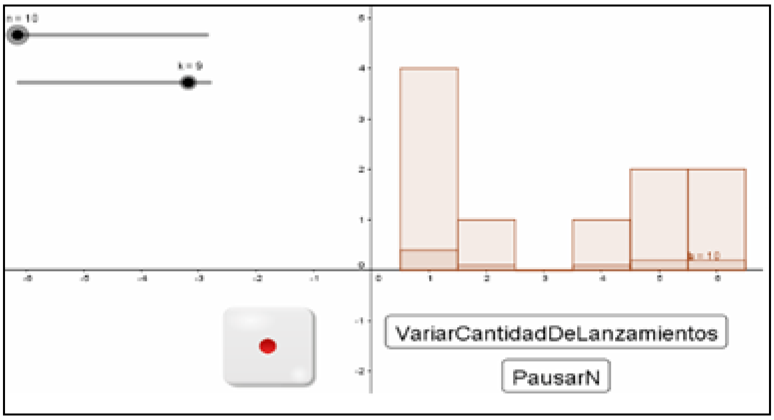


Figura 7. Simulação de Vanuza e Charol para $n = 10$ (T2)

Durante a discussão da T1 foram evidenciadas outras aprendizagens dos alunos, associadas ao conceito de aleatoriedade:

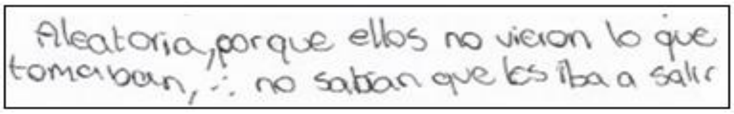
Investigador: Será que é o mesmo acaso e aleatoriedade?
João: É o mesmo.
Diogo: Aleatoriedade é uma caraterística de algo que tem probabilidade.
Investigador: Quando diz que tem probabilidade a que se refere?
Diogo: Tenho certa quantidade de casos delimitados, e é quando a experiência é aleatória que eu posso distinguir esses casos e, portanto, eu posso definir a probabilidade.

Diogo manifesta a ideia de a probabilidade ser uma consequência da aleatoriedade e, portanto, só poder definir a probabilidade para experiências aleatórias. Esta argumentação de Diogo, parcialmente incorreta, pode ser devida a já ter trabalhado o conceito de probabilidade clássica no 8.º ano (conforme o programa costarriquenho), focado em experiências aleatórias, não tendo percebido a possibilidade de calcular a probabilidade para experiências determinísticas.

A discussão da T2, por seu lado, permitiu observar que alunos como Dádiva, ainda que associem corretamente a aleatoriedade a uma caraterística de certo tipo de experiências em que não se pode saber antecipadamente o resultado, não reconhece que, numa experiência aleatória, obter sucessivamente dez mil vezes um mesmo resultado é uma situação não suportada pela lei dos grandes números:

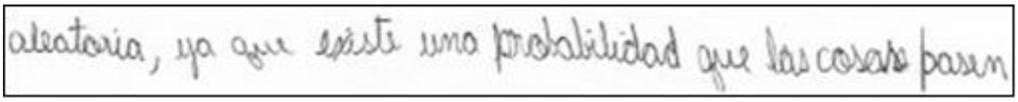
Tiago: Se sai o mesmo número, o dado não está equilibrado.
Dádiva: Seria isso algo aleatório?
Investigador: A experiência de lançar um dado é aleatória, turma?
Dádiva: Pode ser possível que eu atire o dado dez mil vezes e saiam dois em todos os lançamentos, mas se calhar no lançamento dez mil e um saía outro número.

Embora se tenha feito uma formalização dos conceitos de experiência aleatória e determinística depois da discussão coletiva da T2, na TA foi possível observar que só 64% dos alunos aprendeu a diferenciá-los. Por exemplo, Laura, ao ser solicitada a classificar a experiência que consistia em cada um de dez estudantes extraírem, sem ver e com reposição, uma bola de uma urna que contém duas bolas (amarela e vermelha), reconhece a incerteza como propriedade da aleatoriedade, permitindo-lhe classificar a experiência como aleatória e distingui-la de uma determinística (Figura 8).

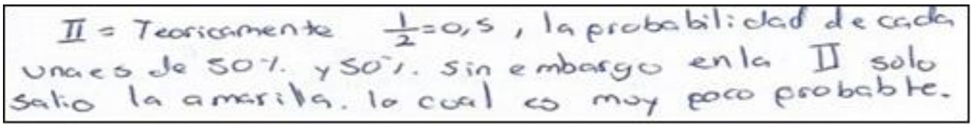

Aleatoria, porque ellos no vieron lo que tomaban, ∴ no saban que les iba a salir

[Aleatória, porque eles não viram o que tomavam, … Não sabiam o que lhes ia sair]
Figura 8. Resolução de Laura (TA.Q4a)

Os restantes 36% da turma ainda apresentam dificuldades para diferenciar experiências aleatórias de determinísticas, como Johan (Figura 9), que associa experiências aleatórias a situações que podem ocorrer e experiências determinísticas às que são impossíveis de acontecer. Para além disso, 79% da turma ainda revela dificuldades no uso do conceito de aleatoriedade na identificação de sequências equiprováveis. Por exemplo, Ana, quando confrontada com a mesma situação do TD.Q4, acima referida, e questionada sobre a sequência menos provável de ocorrer, responde incorretamente (Figura 10). O facto de as cores das bolas estarem distribuídas na sequência em percentagens muito distintas, leva Ana a dar uma resposta desligada do contexto e apoiada no significado de probabilidade clássica.


aleatoria, ya que existe uno probabilidad que las cosas pasen

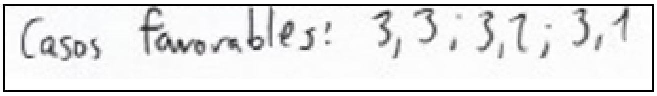
[aleatória, pois existe probabilidade que as coisas aconteçam]
Figura 9. Resolução de Johan (TA.Q4b)


II = Teoricamente $\frac{1}{2}$=0,5 , la probabilidad de cada unaes de 50% y 50%. sin embargo en la II solo salio la amarilla. lo cual es muy poco probable.

[a sequência II, teoricamente $1/2 = 0.5$, a probabilidade de cada uma é 50%. No entanto, na sequência II só saiu a amarela, o qual é muito pouco provável]
Figura 10. Resolução de Ana (TA.Q4b)

Espaço amostral e conceitos associados

Os conceitos associados ao espaço amostral foram abordados em todas as tarefas, com o GeoGebra. No TD, 82% dos alunos revelou não ter conhecimento dos termos 'casos favoráveis' e 'casos possíveis', e 7% dos restantes mostrou um conhecimento parcial destes termos. Por exemplo, quando na Q5 os alunos foram questionados sobre quais os casos favoráveis correspondentes ao acontecimento "obter três como número maior" no lançamento de dois dados equilibrados, Simão evidencia um conhecimento parcial deste conceito ao não considerar a ordem de lançamento dos dados, levando-o a identificar menos casos favoráveis do que os devidos (Figura 11). Especificamente, Simão não considera os casos favoráveis (2,3) e (1,3).


Casos favorables: 3,3 ; 3,2 ; 3,1

[Casos favoráveis: (3,3); (3,2); (3,1)]
Figura 11. Resolução do Simão (TD.Q5)

Após o trabalho na T1, de simulação do lançamento de dois dados para $n = 20$ repetições da experiência, todos os alunos foram capazes de identificar casos possíveis e casos favoráveis de acontecimentos simples e compostos, como se observou na sua discussão final:

Investigador: Simulando a experiência do lançamento de dois dados com n = 20 obtiveram todas as somas possíveis?
Patrícia: Sim.
Marta: Não, nós não.
Investigador: Qual acham ser a causa de alguns terem obtido e outros não?
Diogo: Cada número tem diferentes probabilidades de acontecer, aliás, não é o mesmo obter um sete e obter um dois [para a soma de pintas]. O dois você o pode obter só de uma forma, sair um no primeiro dado e sair um no segundo dado, enquanto que sete pode ser obtido com um dois e um cinco, quatro e três, etc.

Diogo evidencia reconhecer casos favoráveis quando justifica o porquê de Marta e Monica (Figura 12) não obterem a 'soma um', por ser um acontecimento impossível, e outras como a 'soma dois', 'soma três' e 'soma onze' por serem acontecimentos com menor ocorrência.

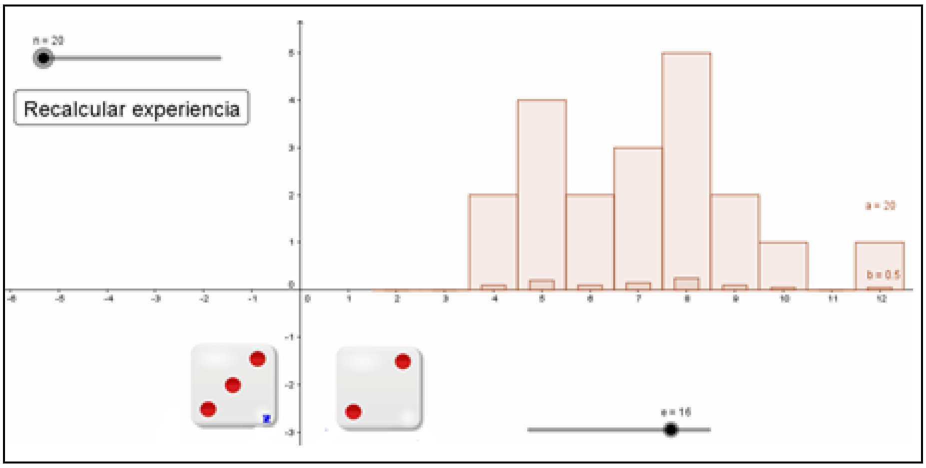
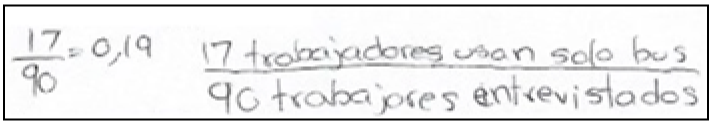


Figura 12. Simulação de Marta e Monica para $n = 20$ (T1)

Também na Q3 da TA, quando os alunos são questionados sobre a probabilidade dos trabalhadores de uma empresa usarem determinados meios de transporte, a partir das respostas destes a um inquérito, Filipa identifica corretamente casos favoráveis e casos possíveis associados ao acontecimento "o trabalhador utiliza só autocarro", e utiliza-os para calcular corretamente a probabilidade do mesmo (Figura 13).



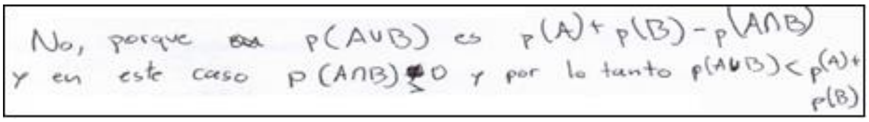
$$\left[\frac{17\ trabalhadores\ utilizam\ só\ autocarro}{90\ trabalhadores\ entrevistados}\right]$$

Figura 13. Resolução de Filipa (TA.Q3)

Quanto aos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, cuja definição formal já era conhecida dos alunos, na T4 todos foram capazes de identificá-los e de inferir propriedades que lhes estão associadas, apoiando-se no cálculo de probabilidades obtidas ao simularem, no GeoGebra, diagramas de Venn com diferentes posições entre dois acontecimentos (A e B). Na tabela da Figura 14 observamos os dados registados por António e Marcos, que no lado esquerdo apresenta os valores de probabilidade de acontecimentos disjuntos e, no lado direito, os valores para acontecimentos não disjuntos.

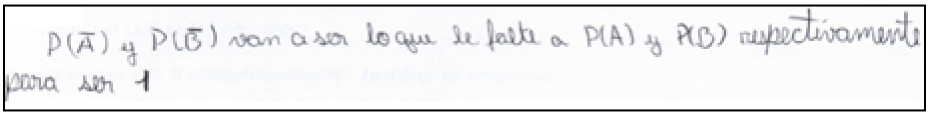
Figura 14. Resolução de António e Marcos (Tabela de registo de dados. T4)

Depois, ao serem questionados se as relações entre $P(A \cup B)$ e $P(A) + P(B)$ encontradas para acontecimentos disjuntos se verificam também para acontecimentos não disjuntos, fazem cinco simulações com diagramas de Venn e observam os diferentes valores de probabilidade dos acontecimentos A e B. A resposta dada por estes alunos (Figura 15) revela que tiraram partido desse trabalho, identificando que no caso de $P(A \cap B) = 0$ (acontecimentos disjuntos) obtém-se a igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, enquanto que no caso $P(A \cap B) > 0$ a igualdade que se verifica é $P(A \cup B)$ = $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tendo corretamente inferido propriedades para acontecimentos disjuntos e não disjuntos.



[não, porque $P(A \cup B)$ é $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e neste caso $P(A \cap B) > 0$ e portanto $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$]
Figura 15. Resolução de António e Marcos (T4.Q3b)

Também no caso da exploração de acontecimentos complementares, na T4, todos os alunos inferiram corretamente a igualdade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, como é o caso de Laura e Johan (Figura 16). Após simularem valores distintos de $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ (Figura 17), foram questionados sobre a relação entre $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(B)$ e $P(\bar{B})$, inferindo que $P(\bar{A})$ deve ser igual a $1 - P(A)$, segundo se interpreta quando referem que "o que falta a $P(A)$ para ser 1", o que equivale à igualdade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.



[$P(\bar{A})$ e $P(\bar{B})$ vão ser o que falta a $P(A)$ e $P(B)$, respetivamente, para ser 1]
Figura 16. Resolução de Laura e Johan (T4.Q3c)

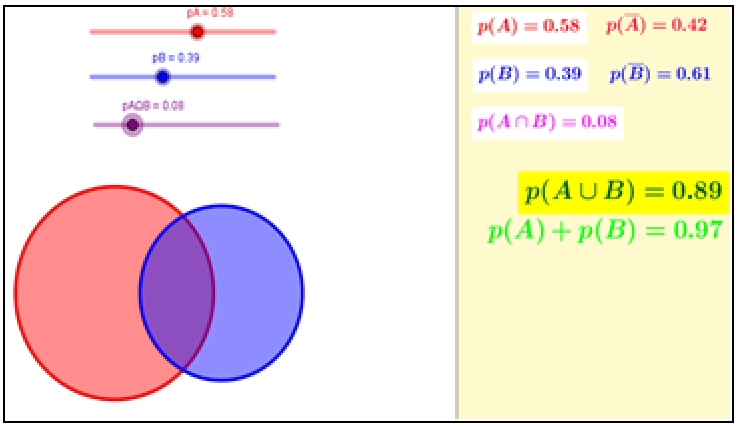


Figura 17. Simulação de Laura e Johan para acontecimentos complementares (T4)

Apesar de identificarem e inferirem propriedades, corretamente, alguns alunos terminaram a experiência de ensino acreditando que qualquer conjunto Z e outro conjunto A que contenha Z são complementares, como é o caso de Pedro na TA (Figura 18).

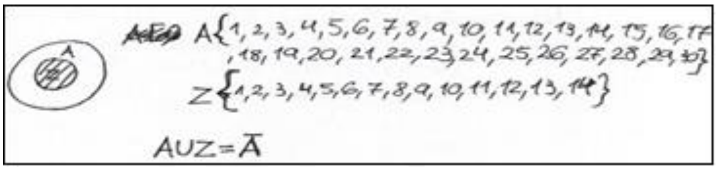


Figura 18. Resolução de Pedro (TA.Q1)

Para Pedro, o significado de acontecimentos complementares está associado a um conceito intuitivo de que qualquer subconjunto (as partes) complementa o conjunto que o contém (o todo).

Significado clássico e frequencista de probabilidade

O conceito de probabilidade clássica foi trabalhado com o GeoGebra na T3, que tem por base o jogo da Batalha Naval e utiliza o conceito de fração para inferir a regra de Laplace, e também na T5, através da simulação do lançamento de uma moeda calculando probabilidades do acontecimento 'obter a face escudo'. O conceito de probabilidade frequencista também foi trabalhado na T5 recorrendo ao conceito de frequência e ao cálculo de áreas por meio de probabilidade. Na primeira parte da tarefa T3, os alunos foram solicitados a escrever frações que representam probabilidades associadas a diferentes 'barcos' representados por quadrículas, em referência a um 'mar' apresentado numa grelha dividida em quadrículas de igual dimensão (Figura 19), tendo todos os alunos sido capazes de inferir a regra de Laplace. No diálogo seguinte, observa-se que os alunos reconhecem que para calcular a probabilidade de um acontecimento, precisam que os 'quadradinhos' (acontecimentos elementares) sejam equiprováveis.

Investigador: Em geral, para um barco A de dimensão n, o qual está no mar/água de dimensão N, como calculas a probabilidade do teu adversário acertar no barco A, sendo n e N números inteiros?
A turma toda: n a dividir por N.
Investigador: Concordam todos?
A turma toda: Sim.
Investigador: E o que acontecia se um dos quadradinhos fosse maior que os outros?
Pedro: Há que pôr uma unidade básica de medida, se houver algum maior do que outro deve-se obter a proporção que representa esse quadradinho maior em relação com outros da medida standard.

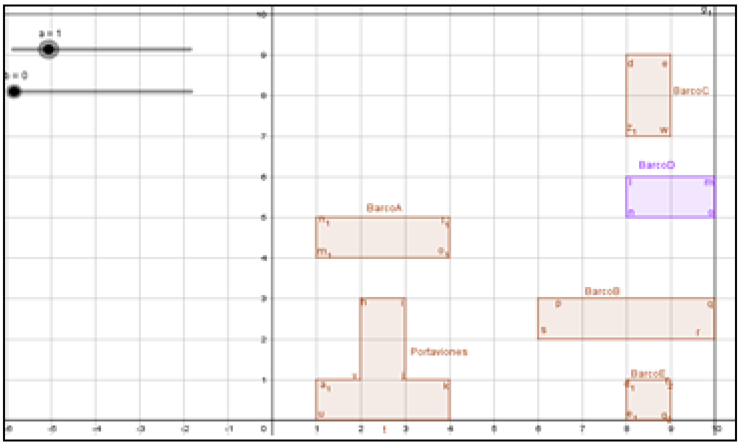


Figura 19. Imagem do arquivo GeoGebra usado para inferir a regra de Laplace (T3)

Posteriormente, os alunos utilizam a simulação de lançamento de dois dados (Figura 20), para consolidar a sua aprendizagem da regra de Laplace. Por exemplo, Kévim e Pedro (Figura 21), após a simulação, identificam que 'obter soma seis' e 'obter soma oito' são acontecimentos que têm o mesmo número de casos favoráveis e, portanto, têm a mesma probabilidade, pelo que reforçaram as aprendizagens de conceitos como casos favoráveis, casos possíveis e acontecimento, bem como o significado clássico de probabilidade.

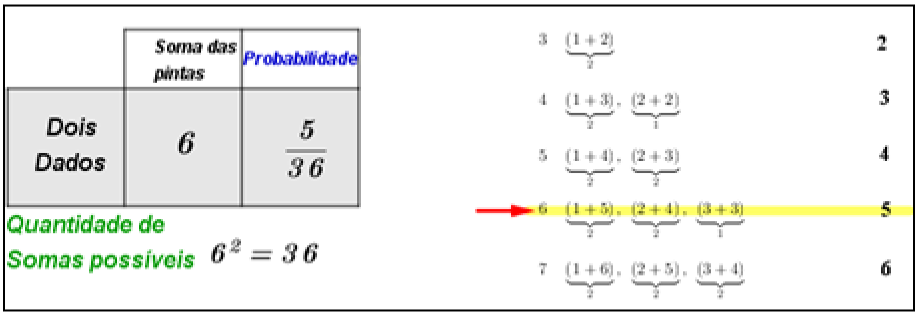
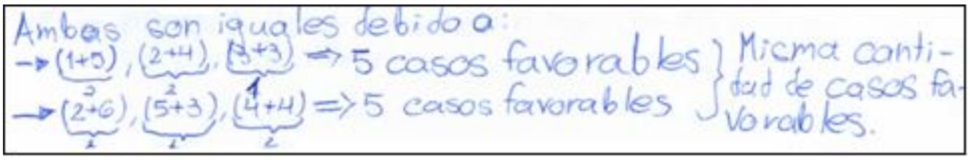
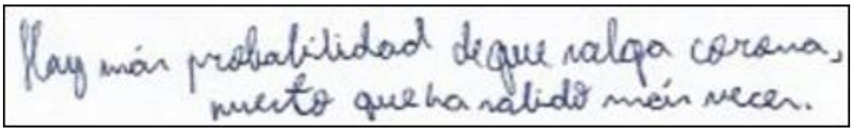


Figura 20. Simulação de lançamento de dois dados de Kévim e Pedro (T3)


Ambas son iguales debido a:
→ (1+5), (2+4), (3+3) ⇒ 5 casos favorables
→ (2+6), (5+3), (4+4) ⇒ 5 casos favorables
Misma cantidad de casos favorables.

[Ambas são iguais porque (…); mesma quantidade de casos favoráveis]
Figura 21. Resolução do Kévim e o Pedro (T3.Q12)

Quanto ao significado frequencista, o trabalho com as primeiras quatro tarefas evidencia que os alunos não o têm consolidado, associando-o ao conceito de percentagem. Por exemplo, Afonso (Figura 22), quando questionado no TD sobre a probabilidade do acontecimento 'sair face escudo', tem que observar duas tabelas. A primeira tabela mostra que tanto a face escudo como a face coroa saíram 4 vezes, após 8 lançamentos da moeda ao ar, enquanto a segunda tabela mostra que a face escudo saiu 460 vezes e a face coroa 890 vezes após 1350 lançamentos da moeda ao ar. Para Afonso, a probabilidade do acontecimento 'sair face escudo' deve ser identificado a partir da segunda tabela, após repetir a experiência 'muitas vezes', de onde infere que a face escudo apresenta menor frequência que a face coroa porque "tem saído menos vezes", embora não mencione como calcula esta probabilidade.


Hay más probabilidad de que salga corona, puesto que ha salido más veces.

[Há mais probabilidade de sair face coroa, pois tem saído mais vezes]
Figura 22. Resolução do Afonso (TD.Q8)

Após o trabalho na T5, já todos os alunos foram capazes de calcular a probabilidade frequencista, simulando várias repetições da experiência do lançamento de uma moeda (Figura 23), como evidencia a resposta de António e Marcos (Figura 24). António e Marcos experimentam vários valores de n (número de repetições da experiência), podendo observar corretamente que, para valores grandes de n, as probabilidades de obter face escudo e face coroa tendem a ser iguais, conforme o estabelecido pela regra de Laplace.

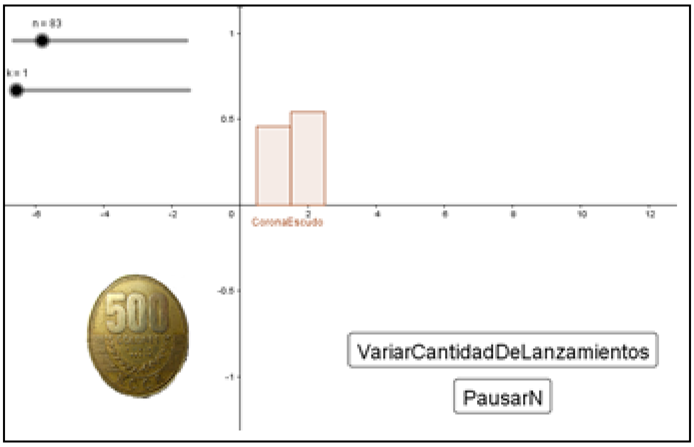
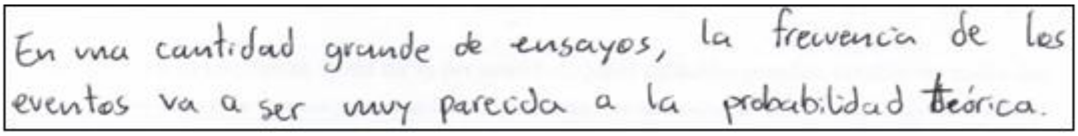


Figura 23. Imagem do arquivo GeoGebra para simular o lançamento da moeda (T5)


En una cantidad grande de ensayos, la frecuencia de los eventos va a ser muy parecida a la probabilidad teórica.

[Numa grande quantidade de ensaios, a frequência dos acontecimentos vai ser muito parecida à probabilidade teórica]

Figura 24. Resolução de António e Marcos (T5.Q3)

Posteriormente, os alunos utilizaram esta aprendizagem para calcular a medida aproximada da área de uma elipse, realizando uma simulação de lançamento de pontos dentro de uma elipse e de um quadrado (Figura 25). Por exemplo, Kévim e Pedro (Figura 26), determinaram o valor 0,4726 como a frequência relativa ou probabilidade de um ponto cair dentro da elipse, e posteriormente estabelecem que o dito valor é proporcional ao quociente das áreas da elipse e do quadrado, obtendo corretamente o valor 47,26.

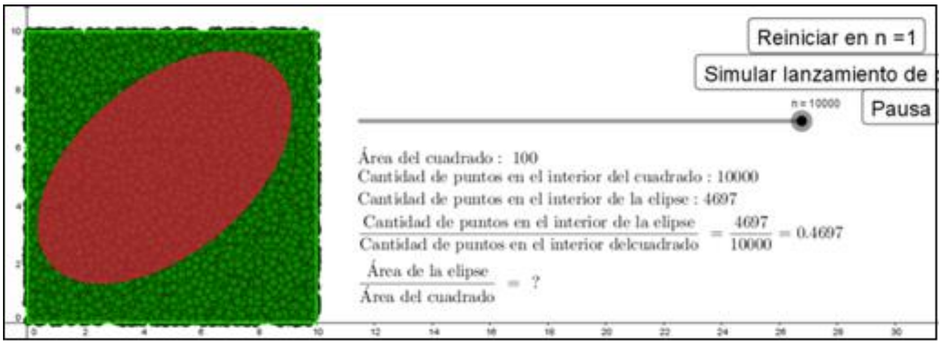
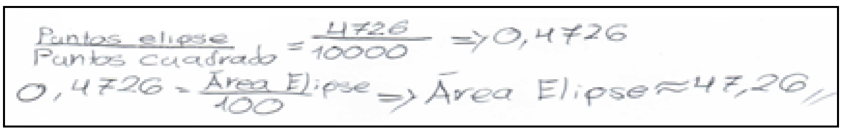


Figura 25. Cálculo aproximado de áreas por meio de probabilidades (T5)


$$\frac{\text{Puntos elipse}}{\text{Puntos cuadrado}} = \frac{4726}{10000} \Rightarrow 0{,}4726$$

$$0{,}4726 = \frac{\text{Área Elipse}}{100} \Rightarrow \text{Área Elipse} \approx 47{,}26$$

Figura 26. Resolução de Kévim e Pedro (T5. Q8)

Ainda assim, ao longo de toda a experiência de ensino, alguns alunos mantêm a crença de que a equiprobabilidade está sempre presente nos acontecimentos elementares. Tal é evidenciado quando, após observar os registos proporcionados pela experiência do lançamento de uma moeda (Figura 27), Leonardo é questionado na TA sobre a probabilidade de 'obter face escudo' e responde incorretamente (Figura 28). O aluno não reflete sobre o problema, recorrendo de forma mecânica e incorreta ao significado clássico de probabilidade, mesmo quando não existe equiprobabilidade dos acontecimentos elementares.

Tabela 1. Primer registro

Bola	Número de veces obtenida
1	4
2	4
3	3
4	4
5	3
6	4

Tabela 2. Segundo registro

Bola	Número de veces obtenida
1	189
2	178
3	185
4	194
5	426
6	191

Figura 27. Registos de resultados obtidos no lançamento de uma moeda, 22 e 1363 vezes (TA.Q2)

Se sigue teniendo la misma probabilidad en $\frac{1}{6}$, ya que siguen siendo 1 caso favorable y 6 posibles

[Segue tendo a mesma probabilidade de $\frac{1}{6}$, já que segue sendo 1 caso favorável e 6 possíveis]

Figura 28. Resolução de Leonardo (TA.Q2I)

Sobre o papel do GeoGebra

O trabalho com o GeoGebra desempenhou um papel importante nas aprendizagens dos conceitos probabilísticos, como foi sendo evidenciado acima, permitindo ao aluno explorar conceitos (Figuras 7, 12, 20), inferir leis a partir da exploração (Figuras 17, 19, 23-24) ou poupar tempo na consolidação de conceitos (Figuras 20-21, 25-26).

O questionário aplicado permitiu identificar outras vantagens e algumas dificuldades que os alunos referiram relativamente ao uso do GeoGebra, as quais estão sintetizadas no Quadro 2, na qual também apresentamos a percentagem de alunos que as referiram (entre parêntesis).

As vantagens referidas mostram que, em geral, os alunos valorizaram o GeoGebra, sendo a visualização de conceitos com base em representações que o *software* disponibiliza, através da simulação, a vantagem mais citada (43,8%). Comentários como "ajuda a visualizar melhor os conceitos de probabilidade" e "ajuda a visualizar e compreender os resultados de melhor forma", indiciam que a simulação proporcionada pelo Geogebra promoveu uma melhor compreensão dos conceitos e a inferência de propriedades ou leis de probabilidade. Outros alunos, também enfatizam que o GeoGebra ajuda "a realizar cálculos que implicam uma grande quantidade de dados", tornando a aprendizagem menos focada nos cálculos. Para além disso, há alunos que perspetivam alguns tópicos de Matemática "complicados e aborrecidos", possivelmente devido ao formalismo com que os trabalham na sala de aula, considerando o GeoGebra proporciona "uma maneira mais divertida e motivadora de aprender".

Quadro 2. Vantagens e dificuldades do uso do GeoGebra referidas pelos alunos no questionário (anónimo)

Quais pensas serem as vantagens do uso do GeoGebra na resolução de tarefas de Probabilidade?	**Quais as principais dificuldades que sentiste na resolução destas tarefas com o GeoGebra?**
Ajuda a visualizar representações do conceito, facilitando a sua compreensão (43,8%)	O tempo limitado para trabalhar com o *software* (7,2%)
Simplifica o trabalho de cálculo (21,9%)	Desconhecimento do GeoGebra antes de trabalhar a primeira tarefa (17,8%)
Facilita a aprendizagem em discussão (6,2%)	Interpretação dos dados gráficos (7,2%)
É dinâmico e motivador, permitindo a interação programa-aluno (12,5%)	Outras dificuldades não referentes ao Geogebra: ambiente de trabalho, compreensão dos enunciados, escrita de respostas às questões (39,2%)
Facilita a simulação da situação problema a trabalhar (15,6%)	

Quanto às dificuldades, alguns alunos (3,6%) não respondem e um quarto da turma (25%) menciona não ter tido dificuldade no trabalho com o GeoGebra. No entanto, 17,8% dos alunos manifestou não ter ainda trabalhado com o GeoGebra antes da experiência de ensino, quer seja pelo trabalho com tecnologia não ser promovido na sala de aula de Matemática, quer pela resistência do aluno a utilizar *software* na sua aprendizagem. Ainda assim, os resultados do questionário evidenciam que 92,8% dos alunos considerou o tempo de realização das tarefas como suficiente.

Por último, foram identificadas dificuldades na aplicação do conceito de probabilidade frequencista sem recorrer à simulação com o GeoGebra, tal como evidenciado na análise das aprendizagens na TD e TA (Figuras 22 e 28). Este resultado revela que a simulação com o GeoGebra ajuda os alunos a inferir e a trabalhar com o conceito de probabilidade frequencista, mas pode não ser suficiente para consolidar o dito conceito. Será então necessário apresentar ao aluno outras tarefas sem simulação, que integrem diferentes experiências aleatórias, onde este tenha que identificar quais podem ser trabalhadas com o significado clássico e quais com o significado frequencista.

Conclusões

Ao longo da experiência de ensino reportada neste artigo, os alunos foram desafiados a envolverem-se na resolução de uma sequência de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, o que constituiu uma inovação no contexto deste estudo. Esta atividade permitiu que os alunos trabalhassem diferentes significados de Probabilidade e conceitos associados, da forma que é recomendada na literatura e nas orientações curriculares (Batanero & Díaz, 2012; MEP, 2012).

No que respeita às aprendizagens de conceitos básicos de Probabilidade evidenciadas pelos alunos no decorrer da experiência de ensino, os resultados permitem concluir que foram capazes de inferir leis e propriedades associadas ao cálculo de Probabilidade, tendo as tarefas favorecido a capacidade de raciocínio indutivo, poucas vezes trabalhada na sala de aula, conforme salientado por Chaves (2006). No entanto, as crenças prévias dos alunos resultantes de experiências do seu quotidiano sobre termos relacionados com o conceito de probabilidade, nomeadamente, variabilidade, incerteza e aleatoriedade, bem como a tendência para uma aprendizagem baseada na mecanização de fórmulas, também mencionada por Batanero (2005) e Chaves (2016), influenciaram a aprendizagem de conceitos como aleatoriedade e probabilidade frequencista.

O significado clássico de probabilidade foi dominante nas resoluções dos alunos, por ser a primeira forma de cálculo de probabilidade aprendida, levando-os a assumir incorretamente a equiprobabilidade em experiências aleatórias onde ela não existe, ou a realizarem o cálculo de probabilidades sem terem em conta a aleatoriedade da experiência. Este aspeto, observado por Oliveira (1990), confirma a relevância de uma abordagem dos significados de probabilidade clássica e frequencista em paralelo e em etapas, isto é, baseada numa introdução exploratória, para só depois se envolverem na formalização de ambos os significados em simultâneo. Também se observaram, por parte dos alunos, dificuldades associadas aos acontecimentos complementares, como mencionado em Munisamy e Doraisamy (1998), assumindo qualquer subconjunto como complementar do conjunto que o contém e não considerando a condição de partes disjuntas requeridas no tratamento formal da probabilidade, possivelmente associadas a diferentes significados do termo quando se usa linguagem matemática ou quotidiana. Finalmente, os alunos identificaram e estabeleceram relações entre o número de casos possíveis, casos favoráveis e os acontecimentos que resultam da realização de uma experiência aleatória considerando a quantidade de vezes que a mesma se realiza.

Os resultados também evidenciam que os alunos ficam motivados com a exploração dos conceitos probabilísticos com o GeoGebra, que torna o trabalho mais rápido e permite concentrarem-se na interpretação da informação, conforme mencionado por Erickson (2006), resultando na construção autónoma do seu conhecimento tal como enfatizado por Inzunza (2014). Para além disso, a utilização do recurso de simulação no GeoGebra favoreceu a exploração de relações entre quantidades numéricas e de conceitos probabilísticos, facilitando a sua visualização para inferência de propriedades. Em particular, ajudou a inferir propriedades de acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, e na compreensão dos significados clássico e frequencista de probabilidade. Confirma-se, assim, que a utilização de simulação com o GeoGebra tem potencial para promover a interpretação dos dados e a inferência de resultados, como sugerido em Inzunza (2014) e MEP (2012).

Os resultados deste estudo salientam o potencial de metodologias inovadoras para o ensino e aprendizagem dos conceitos associados à Probabilidade que comumente geram dificuldades nos alunos. No entanto, existe a necessidade de mais estudos focados na utilização de tecnologia na sala de aula de Matemática, quer com o GeoGebra quer com outro *software* educacional, procurando compreender as suas vantagens e limitações para o tratamento de conceitos probabilísticos.

Agradecimentos

Este estudo foi financiado pela bolsa OAICE-CAB-08-125-2016, atribuída pela Universidade da Costa Rica ao primeiro autor para a realização do seu mestrado.

Referências

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. In P. Flores & J. Lupiañez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* [CD-ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C., & Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), 3-13.

Bryant, P., & Nunes T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. London, UK: Nuffield Foundation.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Carvalho, C., & Fernandes, J. A. (2005). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. *Quadrante, 14*(2), 71-88.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1). Recuperado de http://escholarship.org/uc/uclastat_cts_tise

Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *15*, 21-31.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 2-7). Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, 28*(1-2), 161-183.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Schaeffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Groth, R. E., Butler, J., & Nelson, D. (2016). Overcoming challenges in learning probability vocabulary. *Teaching Statistics*, *38*(3), 102-107.

Inzunza, S. (2014). GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. In J. Asenjo, O. Macías, & J. C. Toscano (Eds.), *Actas do Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 141-146). Buenos Aires: OEI.

Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 339–370.

Martins, M. E. G. (2011). Como estimar a probabilidade dum acontecimento por simulação. In *Atas do PROFMAT 2011* (pp. 1-16). Lisboa: APM.

MEC (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: Ministério de Educação e Ciência. Recuperado de http://www.dge.mec.pt/matematica

MEP (2012). *Programas de Estudio de Matemática.* San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Publica. Recuperado de http://www.mep.go.cr

Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con GeoGebra. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 309-317). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Munisamy, S., & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 39-45.

Nacarato, A. M., & Grando, R. C. (2014). The role of language in building probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 13*(2), 93-103.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, J. T. (1990). *Probabilidades e Estatística: Conceitos, métodos e aplicações*. Lisboa: McGraw-Hill.

Ortiz, J. J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38*, 5-14.

Wilhelmi, M. R., Lasa, A., Abaurrea, J., & Belletich, O. (2019). Conocimiento intuitivo y formal en el aprendizaje de la probabilidad. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Recuperado de www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.