Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia

Preservice teachers' professional noticing about of students' algebraic thinking in the exploration of a multimedia case

Renata Viviane Raffa Rodrigues
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil
reraffa@gmail.com

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina, Brasil
marciacyrino@uel.br

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo. Com este estudo pretendemos compreender a percepção (noticing) acerca do pensamento algébrico dos alunos que futuros professores (FPs) desenvolvem a partir da consideração das ações de seleção e sequenciamento das resoluções de alunos para serem discutidas coletivamente. Num contexto de formação inicial no Brasil, assente num caso multimídia de uma aula desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório, foi realizada uma investigação qualitativa de cunho interpretativo incidindo sobre os momentos de discussão coletiva das sessões de formação os quais foram registados em áudio. Os resultados revelam que os FPs identificaram e interpretaram diferentes ideias matemáticas subjacentes aos processos de simbolização e generalização, passando, na sua maioria, da elaboração de comentários gerais sobre as estratégias dos alunos para a descrição dessas estratégias, a partir de seus elementos matemáticos, e para a construção de argumentos para justificar diferenças significativas entre as resoluções e o seu potencial para discussões coletivas que promovam o pensamento algébrico. Desse estudo emergem: i) a relevância da promoção da percepção profissional dos FPs, contribuindo para a sua aprendizagem profissional em diferentes dimensões e permitindo que estes se posicionem como professores em uma aula de Matemática; e ii) as potencialidades da exploração de casos multimídias pautados na perspectiva do ensino exploratório no desenvolvimento dessa percepção.
Palavras-chave: percepção profissional; formação inicial de professores; discussão coletiva; pensamento algébrico; caso multimídia.

Abstract. In this study, we intend to understand how pre-service teachers (PSTs) develop their noticing skills regarding students' algebraic thinking, based on how they select and sequence students' resolutions

to be discussed collectively. In a Brazilian teacher education context, based on a multimedia case of an inquiry-based lesson, a qualitative investigation was carried out. Data collection was focused on the moments of collective discussion of the teacher education sessions, which were recorded in audio. The results show that the PSTs were able to identify and interpret different mathematical ideas underlying the processes of symbolization and generalization, starting moving from general comments about students' strategies, to developing descriptions from their mathematical elements and to elaborating arguments for justifying significant differences between the resolutions and their potential for collective discussions that promote algebraic thinking. From this study we emphasize: i) the relevance of promoting PSTs' professional noticing, contributing to their professional learning in different dimensions and allowing them to position themselves as teachers in a Mathematics class; and ii) the potential of the exploration of multimedia cases based on the perspective of inquiry-based teaching for the development of this perception.
Keywords: teacher's noticing; preservice teacher education; collective discussion; algebraic thinking; multimedia case.

Recebido em março de 2019
Aceite para publicação em junho de 2019

Introdução

A percepção (*noticing*) profissional é um conceito importante para explorar as capacidades e conhecimentos integrados dos professores, emergentes do reconhecimento e da interpretação que eles fazem de aspectos relevantes de situações específicas de sala de aula na tomada de decisões sobre as ações de ensino (Mason, 2002; Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2002; 2008).

Pesquisas realizadas em diferentes países evidenciam que a exploração de vídeos e de casos multimídia constitui uma estratégia promissora para o desenvolvimento dessa percepção profissional em programas de formação de professores (inicial e continuada), uma vez que permite trazer para o contexto da formação a discussão de questões ligadas à prática profissional do (futuro) professor de Matemática (Estevam, Cyrino, & Oliveira, 2017; Rodrigues & Cyrino, 2017; Rodrigues, Cyrino, & Oliveira, 2018; van Es & Sherin, 2002). Apesar de um corpo considerável de pesquisas se concentrar em vários elementos da percepção do pensamento matemático do aluno, poucas têm considerado características específicas de um ou de outro domínio matemático (Callejo & Zapatera, 2016; Walkoe, 2015). Além disso, comparativamente aos professores com mais experiência, os futuros professores (FPs) têm-se mostrado menos propensos a perceber o pensamento matemático do aluno (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010).

Blanton e Kaput (2011) apontam que os professores desempenham um papel fundamental no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico pelos alunos, uma vez que suas ações envolvem a escolha de tarefas e a interpretação do que os alunos escrevem e falam acerca delas. Os autores ponderam que registros escritos ou verbais em que se exprimem o pensamento do aluno podem funcionar como um recurso para o professor refletir sobre o conteúdo e a prática relativos ao ensino e à aprendizagem de Álgebra.

Alguns estudos têm-se centrado na percepção profissional de FPs relativamente ao pensamento matemático dos alunos, em aspectos específicos do campo da Álgebra. Num contexto de discussões coletivas sobre vídeos de aulas de Álgebra, o estudo de Walkoe (2015) mostra o desenvolvimento da percepção de FPs acerca do pensamento algébrico dos alunos, ligado às formas de usar símbolos e de raciocinar através de diferentes representações de funções. Baseando-se nas análises de FPs dos anos iniciais sobre respostas escritas por alunos, Callejo e Zapatera (2016) caracterizam a capacidade profissional desses FPs de perceber o pensamento matemático dos alunos no contexto da generalização de sequências crescentes pictóricas. No entanto, é de salientar que os aspectos do pensamento algébrico mobilizados pelos alunos têm influência dos elementos do contexto de ensino de Álgebra no qual eles se desenvolveram (Cyrino & Oliveira, 2011; Mestre & Oliveira, 2016). Nesse sentido, ressaltamos a necessidade de se compreender a percepção de FPs sobre o pensamento algébrico dos alunos situado na teia de relações que constituem a dinâmica da aula, ou seja, uma percepção que conecte a aprendizagem e o ensino.

É de especial relevância que a formação inicial de professores dê atenção à promoção da percepção profissional dos FPs, no caso de abordagens de ensino ditas "ambiciosas", em que os alunos partilham e discutem ideias matemáticas (van Es, Casehn, Barnhart, & Auger, 2017). Tal é o caso da perspectiva de ensino exploratório, uma prática de ensino que envolve ações desafiantes e exigentes para os professores (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013), nomeadamente no que se refere à condução da discussão coletiva das ideias matemáticas dos alunos. A perspectiva de ensino exploratório orientou a construção do caso multimídia usado na formação de FPs a partir da qual se concretiza o presente estudo.

Percepção do professor a respeito do pensamento matemático dos alunos

Algumas pesquisas têm apresentado um quadro conceitual dedicado a compreender a percepção (*noticing*) de professores e FPs sobre o pensamento matemático do aluno, considerada uma capacidade importante na aprendizagem profissional do (futuro) professor (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin 2002; 2008). Numa perspectiva mais global, a percepção está associada ao conceito de visão profissional do professor que envolve prestar a atenção a aspectos relevantes do ensino e raciocinar sobre eles (Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2008). Nesses estudos, o vídeo tem sido usado como suporte ao desenvolvimento de tal capacidade por meio de uma abordagem contextualizada das interações de sala de aula. Inicialmente, as análises de vídeos dos (futuros) professores participantes desses contextos caracterizavam-se por julgamentos superficiais que enfatizavam somente aspectos gerais do ensino, mas, ao longo de discussões coletivas, as ideias matemáticas dos alunos ganharam maior destaque e as suas interpretações se mostraram mais consistentes (Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2008).

Com base no conceito de visão profissional, Walkoe (2015) explorou o desenvolvimento da percepção de FPs como uma forma de ajudá-los a ampliar ou modificar suas visões de Álgebra, prestar a atenção a vários aspectos do pensamento algébrico dos alunos e raciocinar sobre elas de modo mais substancial. Partindo de um framework para o pensamento algébrico que pretendia apoiar os FPs na identificação de aspetos centrais de pensamento algébrico, o estudo revela que dois aspetos do quadro sobressaíram na análise dos FPs: a manipulação de símbolos e procedimentos e o raciocínio sobre e com representações, por exemplo, equações, gráficos, tabelas de funções. À medida que foram explorando os vídeos, os FPs manifestaram maior profundidade das percepções, contudo, no que se refere à dimensão da manipulação de símbolos, a evolução inicial não foi consolidada ao longo do período em que decorreu a formação. A autora infere que tal resultado pode decorrer do facto de os FPs tenderem a interpretar a manipulação de símbolos apenas em uma dimensão procedimental, e, como tal, não realizarem uma análise conceptual deste tipo de pensamento do aluno. Ainda assim, globalmente, a participação em contextos de discussões coletivas de vídeos auxiliou-os a reconhecer mais consistentemente o pensamento algébrico do aluno e a raciocinar sobre ele de forma mais aprofundada (Walkoe, 2015).

Para fomentar a percepção do (futuro) professor de modo mais focado no pensamento matemático dos alunos, alguns estudos têm associado a análise de vídeos às respostas escritas pelos alunos no decorrer da aula (Callejo & Zapatera, 2016; Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010). Nesse contexto, Jacobs, Lamb e Philipp (2010) conceituam a percepção profissional do professor do pensamento matemático do aluno como um conjunto de três capacidades inter-relacionadas: i) prestar a atenção ou identificar (*attending*) às/as estratégias das crianças; ii) interpretar o entendimento das crianças; e iii) decidir como responder com base nos entendimentos das crianças. A primeira capacidade envolve o reconhecimento de aspectos matemáticos nas estratégias das crianças; a segunda consiste na capacidade de interpretar a compreensão matemática da criança de modo condizente às estratégias específicas utilizadas por ela e ao que tem sido apresentado pelas pesquisas sobre o desenvolvimento matemático dos alunos; e a terceira refere-se ao que é mobilizado quando se decide como responder, ou seja, como as potenciais respostas de ensino se ligam às componentes de reconhecer e interpretar o pensamento matemático dos alunos (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010).

Considerando os dois primeiros componentes da percepção apresentados por Jacobs, Lamb e Philipp (2010), no contexto de problemas especificamente voltados ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, Callejo e Zapatera (2016) evidenciam a interpretação que FPs fazem sobre a compreensão matemática dos alunos a partir da análise dos elementos matemáticos identificados nas respostas escritas a três diferentes tarefas de generalização de sequências crescentes. Pautados em Radford (2014), estes autores situam esses processos perceptivos sobre três etapas da generalização de padrões, nomeadamente, se o aluno é capaz de: i) continuar a sequência de termos subsequentes (generalização próxima), mas não coordena as estruturas numéricas e espaciais; ii) coordenar estruturas espaciais e numéricas e produzir verbalmente uma fórmula ou utilizá-la num exemplo (relação funcional); e iii) coordenar o modelo espacial e numérico, reconhecer a relação funcional em casos específicos ou expressá-la numa regra geral e inverter essa relação (raciocínio inverso).

O estudo mostra que a capacidade dos FPs de identificar elementos matemáticos nas respostas dos alunos desenvolveu-se mais do que a de interpretar o seu pensamento algébrico, uma vez que a compreensão dos processos de generalização evidenciou-se uma tarefa complexa (Callejo & Zapatera, 2016). As autoras sugerem que a capacidade de identificar contribuiu para a interpretação da compreensão matemática do aluno e para torná-los mais conscientes das semelhanças e diferenças entre as respostas, criando um referencial sobre etapas de generalização.

Em nosso trabalho, o contexto do estudo tem por base a exploração de um caso multimídia pelos FPs que, além de vídeos e respostas escritas pelos alunos, congrega outras mídias (a tarefa, o plano de aula, áudios com as intenções da professora antes da aula). Adicionalmente, procuramos compreender a percepção de FPs sobre o pensamento algébrico dos alunos em relação com a própria dinâmica da aula, seguindo uma perspectiva de ensino exploratório, tendo em conta as ações da professora para promover a discussão coletiva. Desse modo, na próxima seção apresentamos aspectos conceituais relativos a essas ações.

Selecionar e sequenciar as resoluções dos alunos para discussão coletiva no ensino exploratório

Enquadrada em abordagens de ensino ditas de *inquiry*, a perspectiva do ensino exploratório centra-se em experiências de aprendizagem que propiciam aos alunos engajarem-se na exploração de tarefas desafiadoras, discutindo-as em grupos e coletivamente em direção à sistematização das aprendizagens (Canavarro, 2011; Oliveira & Cyrino, 2013). Nessa perspectiva, as aulas de Matemática não se limitam ao ensino de conteúdos matemáticos centrado na figura do professor, mas consideram a atividade matemática produzida pelos alunos (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte, 2005), oferecendo-lhes oportunidades de "ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p. 11).

Em especial, na discussão coletiva, o professor convida os alunos não só a apresentar as suas resoluções para a turma, mas incentiva-os a questioná-las, a identificar os aspectos matemáticos que as embasam, a conectá-los e refletir sobre eles (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). No entanto, "se e como estas resoluções são discutidas pode ocultar ou tornar visível o raciocínio subjacente" (Ball & Bass, 2003, p. 37). Para apoiar o professor nesse processo, Stein et al. (2008) apresentam um quadro pedagógico com cinco práticas de suporte à promoção de discussões matemáticas produtivas às aprendizagens dos alunos: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar, e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos.

Tendo em conta os objetivos da aula, a *antecipação* envolve tanto a seleção quanto a resolução da tarefa de diferentes formas, prever dificuldades ou erros dos alunos e preestabelecer critérios de seleção e sequenciamento das resoluções para a discussão coletiva. A prática de *monitorar* é concretizada pelo professor diretamente nos grupos, tendo em vista a compreensão e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, a identificação de ideias matemáticas importantes para discussão, com cuidado para não reduzir a demanda cognitiva da tarefa ou enviesar as estratégias matemáticas elaboradas pelos alunos (Stein et al., 2008).

Dessa forma, não faz sentido que o professor deixe somente ao critério dos grupos de alunos quais resoluções serão expostas, tampouco, com que ordem isso ocorrerá. Portanto, Stein et al. (2008) propõem a *seleção* e o *sequenciamento* das resoluções dos alunos. De acordo com os autores, o professor pode *selecionar*: i) resoluções cujas diferenças entre as ideias subjacentes e suas conexões podem apoiar a aprendizagem dos alunos; ii) resoluções que apresentam equívocos comuns, cometidos pela maioria dos alunos, colocando-os para análise e correção coletiva, com base em argumentos matemáticos que justifiquem a sua invalidade; ou iii) resoluções emergentes na mesma aula ou pendentes de aulas anteriores.

As decisões quanto à ordem em que as resoluções serão compartilhadas também têm reflexo no modo como a discussão coletiva se desenrola. Stein et al. (2008) apontam algumas possibilidades para esse *sequenciamento*: i) começar a apresentação pelas resoluções cujas estratégias foram utilizadas pela maioria dos grupos; ii) partir de resoluções mais simples em termos matemáticos tanto ligados às estratégias quanto às representações utilizadas e seguir com resoluções cada vez mais complexas; ou iii) iniciar com uma resolução cuja estratégia utilizada apresenta algum equívoco recorrente entre os grupos de modo a refletir sobre ele.

O modo pelo qual as resoluções são sequenciadas pode favorecer a implementação do *estabelecimento de conexões entre as resoluções*. Segundo Stein et al. (2008), essa prática busca promover o reconhecimento das semelhanças e diferenças das ideias e representações matemáticas, e seu potencial e limites na resolução da tarefa.

Esse quadro mostra que a *seleção* e o *sequenciamento* das resoluções, foco deste estudo, não são implementadas facilmente, uma vez que são delineadas desde o planejamento da aula, a partir do que se espera das resoluções que podem emergir da tarefa e são concretizadas quando os elementos matemáticos previstos são associados ao que se percebe nas produções dos grupos com o desenvolvimento da tarefa (Cyrino & Teixeira, 2016; Stein et al., 2008).

Além disso, Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) explicitam alguns desafios que se colocam à prática dos professores nos processos de seleção e sequenciamento das resoluções. Esses autores mostram que tais ações exigem tomadas de decisão em meio a prática de *monitorar* e providenciar a *organização da discussão*, na transição de uma fase para outra da aula. Um aspecto a considerar é que as resoluções esperadas pelo professor, tais como estratégias matemáticas com contrapontos importantes ou aquelas cujas ideias/representações trazem mais sentido ao sequenciamento, podem não surgir ou apresentarem-se incompletas, o que implica fazer alterações no seu planeamento e lidar com esses imprevistos.

Contexto do estudo

O presente estudo foi desenvolvido em um contexto de exploração do caso multimídia "Os colares" por 15 FPs de Matemática que tiveram frequência regular em uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública no centro-oeste brasileiro, cuja formadora responsável foi a primeira autora deste trabalho. O curso tem a duração de oito semestres e forma professores de Matemática para o exercício da docência no Ensino Fundamental (alunos em idade escolar de 11 a 14 anos) e no Ensino Médio (alunos em idade escolar de 15 a 17 anos). Embora os históricos dos FPs em relação às disciplinas cursadas apresentassem diferenças, ao final da primeira metade do curso, eles já haviam realizado disciplinas da área da Matemática e da Educação. Contudo, os dados desta pesquisa foram produzidos no decorrer da primeira disciplina da área da Educação Matemática cursada pelos participantes, intitulada Prática e Laboratório de Ensino de Matemática no Ensino Fundamental (PLEMEF), de 72 horas-aula, oferecida no 4.º semestre. O plano de ensino foi organizado em torno do estudo das seguintes temáticas circunscritas no âmbito do Ensino Fundamental (EF): processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra; a comunicação em aulas de Matemática; o currículo e a seleção ou elaboração de tarefas; e o planejamento de aulas. Tendo em conta as exigências específicas da PLEMEF, a exploração do caso multimídia "Os colares" foi integrada a esse contexto de formação.

A denominação "caso multimídia" deve-se às características particulares dos componentes que o integram e ao modo como estão organizados com a intencionalidade formativa de oferecer uma perspectiva global e articulada da atividade profissional dos professores no contexto do ensino exploratório. O caso multimídia "Os colares", assente numa aula do 6.º ano do Ensino Fundamental, está alojado numa plataforma *online*, acessível mediante *login* e senha (http://rmfp.uel.br/index.php/casos-multimedia), apresentando um plano de aula elaborado pela professora, diversos episódios de vídeos da aula, a tarefa matemática sobre a qual todo o caso assenta e respectivas resoluções dos alunos, áudios de entrevistas sobre as intenções da professora antes da aula e as suas reflexões após a aula, bem como informações sobre a escola e a turma em causa (Cyrino & Oliveira, 2016).

A navegação pelo caso destaca uma das características específicas do ensino exploratório – o modo de dinamizar a aula a partir de uma sequência articulada de quatro fases alinhadas às práticas propostas por Stein et al. (2008), adequadas e designadas da seguinte forma no multimídia: "Proposição e apresentação da tarefa" – utilização de recursos para promover o engajamento dos alunos à tarefa e à aula; "Desenvolvimento da tarefa" – *monitorar* a resolução da tarefa, identificando ideias importante para discussão com a turma toda, encorajando o desenvolvimento de estratégias próprias dos alunos, porém com a colaboração dos membros de pequenos grupos e do professor; “Discussão coletiva da tarefa” – as resoluções selecionadas são sequencialmente apresentadas pelos grupos de modo a torná-las compreensíveis a todos e permitir o reconhecimento de suas semelhanças, diferenças e potencialidades; e “Sistematização” – forma de consolidar as ideias discutidas na aula articulando-as aos objetivos curriculares (Cyrino & Oliveira, 2016).

Este caso explorado na disciplina de PLEMEF parte da tarefa “Os colares” apresentada na Figura 1, visando a promoção do pensamento algébrico dos alunos do 6.º ano, a partir da análise de uma sequência crescente pictórica, nomeadamente: i) o reconhecimento da regularidade na sequência; ii) a determinação de vários termos da sequência; iii) a identificação das variáveis: número da figura e número total de contas; iv) a identificação da relação entre as variáveis: o número de contas é o dobro da posição da figura mais um; e v) a expressão em linguagem natural e/ou em linguagem simbólica da generalização das relações.

Tarefa “Os colares”

A Inês fez três colares, com contas pretas e brancas, conforme as figuras 1, 2 e 3.

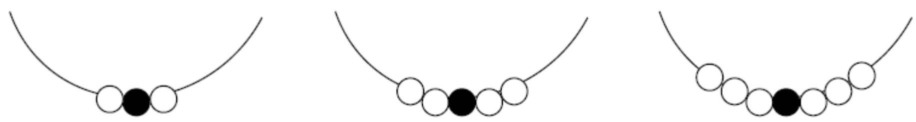

Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

Nº contas do colar

1. Indique acima o número total de contas de cada figura.
2. Continuando esta sequência de colares, quantas contas teria, no total, o colar correspondente à figura seguinte?
3. E quantas contas teria o colar correspondente a figura 8?
4. Descubra quantas contas teria, no total, o colar correspondente à figura 19, sem desenhar.
5. Existe algum colar na sequência que tenha 55 contas? Explica, detalhadamente, o teu raciocínio.
6. Descreva uma regra que lhe permita determinar o número total de contas de qualquer figura da sequência.

Figura 1. Tarefa “Os Colares” adaptada de Pedro (2013)

É importante salientar que a exploração de um caso multimídia com essas características, bem como a temática do pensamento algébrico, constituíram algo novo para os FPs. Esse cenário exigiu a discussão de textos, a resolução e discussão da tarefa e a análise do plano de aula. Os textos foram discutidos previamente à exploração do caso com atenção às seguintes temáticas: características do ensino directivo, ensino exploratório e de tarefas matemáticas (Ponte, 2005);

níveis de demanda cognitiva das tarefas e atividade matemática desenvolvida em sala de aula (Stein & Smith, 2009); desenvolvimento do pensamento algébrico em um estudo de caso no Ensino Fundamental (Matos & Ponte, 2008); e ações comunicativas do professor de Matemática (Menezes et al., 2014).

De acordo com os objetivos da disciplina, os FPs exploraram todas as dimensões do caso multimídia, em 11 sessões de 1h40m cada. Em cada sessão, os FPs primeiro discutiam e respondiam em pequeno grupo às questões apresentadas em cada secção do caso e, em seguida, com o apoio da formadora, participavam de discussões coletivas sobre os aspectos que lhes tinham chamado atenção. Essas discussões foram gravadas em áudio e vídeo e posteriormente transcritas.

Tendo em conta as necessidades de adequação ao tempo disponível para formação, as produções escritas da questão cinco da tarefa não foram escolhidas na exploração do caso. As questões do multimídia que orientaram a exploração das produções escritas dos alunos foram as seguintes: i) Quais produções você selecionaria para discussão coletiva e em que sequência elas seriam apresentadas? ii) Explique os critérios utilizados para esta seleção e este sequenciamento.

Na primeira discussão coletiva a respeito da seleção e sequenciamento das produções escritas dos alunos que os FPs foram chamados a realizar, a formadora pode observar que a maioria das respostas apresentou-se bastante incompleta, contendo comentários vagos sobre os critérios estabelecidos para as opções apresentadas.

Tendo em conta que os FPs nunca tinham assistido a uma discussão na perspectiva do ensino exploratório, a formadora solicitou então a análise de um vídeo dessa fase da aula. O episódio de vídeo assistido retrata a discussão coletiva da questão três da tarefa. A professora protagonista do caso convida alunos de quatro grupos para ir à lousa, selecionados e sequenciados da seguinte forma: primeiro, um representante do grupo da V* (foram aumentando de dois em dois até chegar na figura 8), segundo, um do grupo do P* (que realizou as operações "8+8=16, 16+1=17"), terceiro, um do grupo do S* (expõe que "oito de cada lado com a bolinha preta dava 17") e quarto, um aluno do grupo da M* (apresenta que "se cada lado tem 8 contas brancas, o resultado é 16, mais a conta preta, é igual a 17").

Essa estratégia, além de oferecer mais clareza sobre o contexto para o qual os FPs estavam a fazer escolhas, possibilitou promover o confronto entre as decisões por eles tomadas e as da professora protagonista do caso. A partir da análise realizada pelos FPs desse episódio de vídeo foi realizado um segundo momento de discussão coletiva.

O presente estudo incide sobre esses dois momentos de discussão coletiva das ações da professora de seleção e sequenciamento das resoluções de alunos que passamos a explicitar na secção seguinte.

Objetivo e metodologia do estudo

Neste estudo procuramos compreender a percepção (*noticing*) a respeito do pensamento algébrico que FPs desenvolvem a partir da consideração das ações de uma professora de seleção e sequenciamento das resoluções de alunos para serem discutidas coletivamente, no quadro de um caso multimídia elaborado a partir da perspectiva do ensino exploratório. Tendo em vista o objetivo enunciado, procuramos responder às seguintes questões:

- Que aspectos do pensamento algébrico dos alunos são reconhecidos e interpretados pelos FPs na análise das produções escritas presentes em um caso multimídia?
- Que critérios são considerados pelos FPs nas opções que tomam relativamente à seleção e sequenciamento dessas resoluções e que visam a promoção do pensamento algébrico dos alunos na discussão coletiva?

Com base nos pressupostos da perspectiva interpretativa (Erickson, 1986) e nos procedimentos de codificação de dados pautados na Teoria Fundamentada (*Grounded Theory*) (Charmaz, 2009), para compreender os significados sobre o pensamento algébrico dos alunos, emergentes das considerações dos FPs acerca da seleção e sequenciamento das produções escritas dos alunos para discussão coletiva, os dados analisados incidem sobre as duas discussões coletivas sobre essas ações de ensino, ocorridos na disciplina de PLEMEF que explicitámos na secção anterior. Esses momentos foram audiogravados e transcritos na totalidade.

No processo de análise de dados, além de identificar as ações dos FPs de selecionar e de sequenciar as resoluções dos alunos para a discussão coletiva, procuramos explicitar com base em que e de que modo os participantes desenvolvem essas ações ou as modificam no decorrer das discussões. Para tanto, a codificação inicial dos dados pautou-se em uma elaboração teórica desenvolvida anteriormente pelos autores tendo em conta a literatura referente ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no contexto de tarefas de sequências crescentes representadas pictoricamente. Desse modo, identificamos os aspectos matemáticos do pensamento algébrico que foram reconhecidos e interpretados pelos FPs e, a partir desses indicadores, delimitamos o nosso referencial de análise, incidindo sobre os processos de generalização, com três categorias, e de simbolização, com duas categorias, sintetizado no Quadro 1.

Esse quadro permitiu associar aspectos do pensamento algébrico à capacidade dos FPs de identificá-los nas estratégias analisadas ou de apoiar-se neles para interpretar o entendimento matemático dos alunos (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010). Assim foi possível voltar aos dados e selecionar os excertos mais significativos à representação de um ou mais dos processos de generalização ou simbolização percebidos pelos FPs. No que diz respeito à primeira das discussões coletivas analisadas, foi selecionado o excerto A, que permite identificar as dificuldades iniciais dos FPs. A partir da segunda discussão, extraímos os excertos B, C, D e E que abrangem a (re)apresentação e fundamentação das opções dos FPs. As resoluções a que os FPs se referem nestes excertos encontram-se no anexo.

Quadro 1. Aspectos centrais do pensamento algébrico dos alunos em sequências pictóricas crescentes

Processos	Categorias	Descritores
Processo de generalização com base em Radford (2014)	**Forma 1**	Identifica uma comunalidade com foco na estrutura numérica, sem evidência de indeterminação e analiticidade, efetuando cálculos somente com termos conhecidos e próximos.
	Forma 2	Identifica uma comunalidade nas estruturas numérica e espacial de algumas figuras, generaliza essa comunalidade constituindo uma fórmula implícita para calcular termos específicos distantes da sequência, há indeterminação e analiticidade intuitiva/implícita, mas somente nesses casos particulares.
	Forma 3	Vincula estruturas numérica e espacial, estabelece uma relação geral entre a ordem do termo e o número de seus elementos, formula uma regra que permite determinar diretamente qualquer termo da sequência, denominando quantidades indeterminadas e efetuando cálculos analiticamente.
Processo de simbolização com base em Radford, Bardini, e Sabena (2007), Blanton (2008), Radford (2014), Mestre e Oliveira (2012; 2016)	**Diferentes representações**	Desenhos, expressão da sequência numérica ou de sua regularidade, tabelas, diagramas ou esquemas destacando a estrutura numérica e a espacial, expressões de cálculos efetuados que traduzem o uso implícito de uma regra comum.
	Diferentes representações específicas da regra	Linguagem natural (uso de palavras para descrever a regra), linguagem sincopada ou linguagem algébrica (uso de notações alfanuméricas para descrever a regra).

Apresentação e discussão dos resultados

O primeiro momento de discussão coletiva sobre a seleção e sequenciamento das resoluções dos alunos foi iniciado com a projeção de um quadro síntese, elaborado pela formadora, das opções feitas por cada grupo de FPs na exploração do caso multimídia.

O trecho que segue no excerto A parte de uma solicitação da formadora para que os FPs explicassem as suas opções de sequenciamento das resoluções dos alunos para serem apresentadas e discutidas no grande grupo.

A1	*Túlio:*	Nós colocamos a M* primeiro, porque ela resolveu de uma forma matemática, depois o P* que foi a linguagem natural e o S* que foi por recorrência.
A2	*Formadora:*	A M* e o P* foram dois grupos que a maioria escolheu.

A3	*Diana:*	A V* também.
A4	*Formadora:*	E tem grupo aqui que começa com a M* e tem grupo que começa com a I*. Aqui quem começa da mais complexa para mais simples? E quem começa da mais simples para mais complexa?
A5	*Fred:*	E tem diferença?
A6	*Formadora:*	O que vocês acham? Defendam seus pontos de vista.
A7	*Toni:*	Da simples para mais complexa.
A8	*Davi:*	Da mais simples para mais complexa.
A9	*Alex:*	Eu não tinha pensado muito sobre isso. (Escolheu da mais complexa para mais simples).
A10	*Túlio:*	Nem eu. (Escolheu da mais complexa para mais simples).
A11	*Formadora:*	Mas não tinha que colocar em uma ordem?
A12	*Alex:*	A gente foi colocando, M* ia lá fazer, depois o P*...
A13	*Túlio:*	M* mostra lá qual é a certa para todo mundo.
A14	*Toni:*	Mas..., colocando primeiro a mais elaborada, os outros [grupos de alunos] poderiam achar que eles tinham errado em algum momento, aí eles não iriam querer ir ao quadro para mostrar a [resolução] deles, porque eles achariam que a deles estava errada, então eles poderiam ficar com medo dos colegas zombarem deles.
A15	*Formadora:*	Nossa que interessante a preocupação do Toni com os alunos! De que talvez colocar a M* para apresentar primeiro poderia inibir os outros grupos, inclusive o da I*.
A16	*Túlio:*	Nós não colocamos a I* porque lá na [questão] seis, por exemplo, ela não conseguiu chegar a uma regra [...], estava apagado. Ela fez uma regra, mas apagou porque ela viu que não estava certo. [A aluna] Não conseguiu chegar na regra específica para demonstrar como que ela conseguiu a resposta na questão seis.

Em A1, Túlio menciona as resoluções escolhidas por ele e por João. Para justificar essa seleção, ele descreve as diferentes ideias matemáticas subjacentes interpretadas em cada uma delas: nas duas primeiras, focam-se nas expressões da regra em linguagem matemática (algébrica) por M* e em linguagem natural por P*. Na resolução de S*, os FPs destacam somente a estratégia de recorrência (os alunos usam a lei de formação da sequência para determinar um termo a partir do anterior) utilizada para resolver apenas as duas primeiras questões da tarefa. As demais opções dos FPs mostram-se contrastantes quanto ao sequenciamento das resoluções, porém, algumas delas se coadunam com a possibilidade de partir de resoluções mais simples em termos matemáticos, tanto ligadas às estratégias quanto às representações utilizadas e seguir com resoluções cada vez mais complexas

Em A5 e A9-10, as intervenções de Fred, Alex e Túlio parecem indicar que o sequenciamento não foi tido em conta por estes FPs, portanto, não estabeleceram critérios para realizá-lo. Em A13, Túlio parece considerar que a discussão com os alunos possui uma função mais corretiva e que somente a resolução mais completa, com a regra em linguagem matemática, pode ajudar nesse processo. Em A14, um dos critérios do sequenciamento apresentado por Toni revela indícios de sua preocupação em não causar constrangimentos aos alunos, bem como em não reduzir sua autoridade matemática na sala de aula (Stein et al., 2008).

Os excertos seguintes emergiram posteriormente à análise do primeiro episódio de vídeo da discussão coletiva da tarefa contemplado no caso “Os colares”, conforme referimos anteriormente. Na sequência, o excerto B parte da apresentação de Toni relativa às opções de seu grupo para sequenciar as resoluções dos alunos.

B1	*Toni:*	A gente colocou a I*, S*, V*, P* e a M*.
B2	*Formadora:*	[...]. Então primeiro a I*, depois o S* e por que vocês escolheram primeiro a I*?
B3	*Toni:*	A I* porque precisou desenhar.
B4	*Formadora:*	Desenhou e o que mais?
B5	*Toni:*	Precisou do termo anterior para saber o próximo, para saber como chegar na resposta e no final ela não conseguiu desenvolver a regra. Por isso eu a colocaria primeiro, porque talvez se deixasse ela por último, ela poderia não querer ir ao quadro por não ter feito a última. Então eu a colocaria primeiro.
B6	*Formadora:*	E a do S*, por quê? Ele chega na regra?
B7	*Toni:*	Chega.
B8	*Formadora:*	Que jeito ele escreve essa regra?
B9	*Alex:*	Mas ele fala que é só pegar o número da figura e multiplica por 2, ele não fala que tem que somar mais 1 aí, só…
B10	*Fred:*	Na linguagem natural ele não colocou, mas na expressão [algébrica] ele colocou.
B11	*Nina:*	[...] só que na três ele já tinha colocado assim, oh: “terá 17 contas pois a figura 8 terá 8 de cada lado e a bolinha preta”, então ele deve ter imaginado assim, eu vou fazer duas vezes o número da figura e vou somar a bolinha preta, porque vai ser a lateral que vai ser o número da figura, só que eles não escrevem que tem que somar a bolinha preta ali do meio.
B12	*Fred:*	Ele conseguiu fazer, ele só não conseguiu expressar tudo na explicação da regra [em linguagem natural].

Após os pedidos de explicação pela formadora, em B3 e B5, Toni identifica e interpreta os seguintes aspectos do pensamento algébrico da resolução de I*: o desenho (forma de representação utilizada pelo grupo na resolução da segunda questão da tarefa) e utilização da ideia da recorrência (nas questões seguintes da tarefa), mas não desenvolve uma regra (forma 1 do Quadro 1, sendo efetuados cálculos somente com termos próximos). Além de revelar cuidados com a autoridade matemática e aspectos emocionais desse grupo, Toni não deixa de selecionar essa resolução considerando também aspectos do pensamento algébrico dos alunos (forma 1).

Em B7, Toni identifica que S* chega à regra, isto é, realiza uma generalização. No entanto, esse pressuposto é colocado em discussão por Alex, o qual identifica que na expressão da regra geral em linguagem natural falta indicar a adição de uma unidade (“+1”). Em B10, Fred assinala evidências de que esse grupo consegue elaborar uma regra para todos os termos, uma vez que a expressam com uma fórmula (“Lx2 + 1” em linguagem algébrica – forma 3). Em B11, além de reconhecer que o grupo elabora uma regra que permite determinar qualquer termo da sequência (forma 3), Nina retoma a produção desse grupo na questão 3 e compreende que é construída uma relação geral entre a ordem do termo e o número de seus elementos, dando exemplos de que como isso ocorre. Assim, parece-nos que Nina percebe que os alunos vinculam as estruturas numérica e espacial da sequência proposta, assim como outras características (forma 3).

O excerto C é desencadeado com o questionamento da formadora sobre a estratégia matemática utilizada pelo grupo da V*. Em C1, Toni identifica que V* utilizou a tabela. Contudo, essa não parece ter sido a única razão que sustentou a escolha do grupo de Toni (C3).

C1	*Toni:*	Ela usou a tabela, não é?
C2	*Formadora:*	É por isso que você escolheu a V*, foi por causa da tabela?
C3	*Toni:*	É... e... a regra ela fez na linguagem natural também, mesmo ela colocando assim para 19 e para 24 vai multiplicar e..., mas deu a entender que ela sabia sim... para todas as outras.
C4	*Formadora:*	Parece que ela tira algumas provas... vocês estão vendo? E é ali na seis, para escrever a regra... Bom, e o que vem antes disso, a tabela, ela vai contribuir para quê? Para os demais alunos? Apresentar a tabela que ela fez, o que tem isso de importante?
C5	*Alex:*	Para perceber uma sequência, não é?
C6	*Formadora:*	Perceber a sequência... e o que mais...? O que é perceber sequência?
C7	*João:*	[...] que vai aumentando de dois em dois.
C8	*Formadora:*	Que vai aumentando de dois em dois é a regularidade com que essa sequência estava crescendo, e o que mais? O que mais que o grupo pode ter percebido com a tabela?
C9	*Todos:*	(Silêncio)
C10	*Formadora:*	Uma sequência numérica, ela tem o quê? Eu posso colocar só os resultados, só o número de contas, começo lá, três o primeiro, não é? Três, cinco, sete...só esses [resultados], o que a tabela tem de importante? Ela não tem só isso, não é?
C11	*Fred:*	Ela tem o número do colar e o número de contas.
C12	*Formadora:*	E o que que é isso?
	João:	A razão.
C13	*Formadora:*	A razão é o número que indica como ela vai crescendo. E o que indica a coluna do número da figura junto com essa coluna do número de contas que o Fred falou?
C14	*Nina:*	Parece uma função... porque para cada x terá um y, em que o y está dependendo do x.

Toni identifica (C3) que V* expressa a regra geral em linguagem natural, interpretando, em meio a tantas outras informações, que esta é empregada em duas das figuras da sequência (a 19.ª e a 24.ª) (forma 2). Ele é capaz de nomear indícios de uma forma elementar de generalização ou de pensamento algébrico, inferindo que o cálculo subjacente à regra tenha sido estendido para os demais termos da sequência, uma vez que foi explicitada corretamente em linguagem natural (forma 3).

Os esforços da formadora voltam-se para a exploração da tabela (C4). Alex e João parecem não conseguir perceber o potencial da tabela para a formulação e adequação da regra geral (C5 e C7). Fred apenas descreve que a tabela apresenta tanto a ordem do termo quanto o número de seus elementos (C11). A partir dessas informações, Nina interpreta os significados matemáticos subjacentes a esse tipo de representação (C14). No entanto, não fica claro se ela percebe o potencial da tabela para a compreensão da ideia de variação e a criação de uma relação funcional, ou seja, da relação entre os termos da sequência e a sua ordem.

O excerto D a seguir se inicia com a tentativa de Nina de propor uma nova seleção e sequenciamento das resoluções, começando pela resolução do grupo de V*.

D1	*Nina:*	[...] eu colocaria a V* primeiro, depois a M* e o P*... A M* e o P* resolveram do mesmo jeito? Não foi?
D2	*Formadora:*	Tem alguma diferença da resolução da M* para a do P*?
D3	*Fred:*	A parte formal da M*.
D4	*Formadora:*	A da M* é mais formal? A da M* tem assim "multiplicando o número da figura por 2 e + 1" e a do P* tem o quê?
D5	*Nina:*	"Indo conforme a sequência, sempre somando o dois". "Duas vezes o número da figura +1".
D6	*Formadora:*	É a regra do P*?
D7	*Nina:*	A dele é só na linguagem escrita [natural] e a dela tem a letra "o" na regra.
D8	*Formadora:*	Exatamente. É uma diferença. Então, e vocês colocariam mais alguma?
D9	*Nina:*	S*.
D10	*Formadora:*	S* que é….
D11	*Nina:*	A do Lx2+1. Eu colocaria essa, porque ele colocou assim "só pegar a figura...", quer dizer, "só pegar o número da figura e multiplicar por 2", depois ele escreve Lx2+1, eu o colocaria [S*] para ir antes do P*. Até para ele explicar porque ele escreveu só para "multiplicar o número da figura por 2" e depois, na hora que ele fez a regra, ele colocou "+1" nela.
D12	*Formadora:*	Você acha que em termos de complexidade, a do S* está menos complexa do que a do P*?
D13	*Nina:*	Não. Mas é que se o P* for e falar assim "multiplica o número da figura por 2 e soma +1", na hora que o S* for explicar ele já vai ter percebido que a dele faltou o "+1" na linguagem escrita [natural].
D14	*Formadora:*	O que você pretende então com o fato de o S* ter esquecido de colocar esse "+1" na linguagem natural?
D15	*Nina:*	No caso eu gostaria de saber por que que ele escreveu só "multiplicar por 2", já que na regra ele colocou o "+1" e qual foi a diferença de ele só ter explicado…
D16	*Formadora:*	E para os alunos?
D17	*João:*	Nenhuma, eu acho.
D18	*Formadora:*	Nós não podemos esquecer dos alunos.
D19	*Nina:*	Para os alunos eu acho que seria interessante porque ele fez a regra escrita [natural] só que ele não colocou o "+1", aí o pessoal já iria entender que o que ele esqueceu foi a bolinha preta.

A opção de Nina (D1) para sequenciar as duas últimas resoluções parece depender das características que as distinguem. Fred identifica uma diferença na linguagem utilizada para expressar a regra entre as resoluções de P* e de M*, considerando mais formal o modo de expressar a generalização por M* (D3). Em D7, Nina identifica aspectos distintivos de M* no modo de expressar a regra (forma 3), apontando o uso de uma letra (característica da linguagem algébrica), diferenciando-a da linguagem utilizada por P*, que faz o uso de palavras (linguagem natural). Em D9, desta vez, com foco nos modos de expressar a regra pelo grupo do S*, Nina decide selecionar esse grupo. Com base na identificação da expressão da regra em linguagem algébrica, Nina mostra ter clareza de que a resolução de S* apresenta-se mais complexa em relação ao processo de simbolização, portanto o critério para sequenciar as duas resoluções (de S* e P*) não se baseia no nível de complexidade delas, mas na intenção de promover um confronto entre elas e a adequação da expressão em linguagem natural da regra por S* (D13). Inicialmente, as intenções de Nina pareciam estar mais voltadas para a discussão dela (posicionando-se como professora) com esses grupos ou entre eles. Porém, com a intervenção da formadora, Nina passa a considerar a participação dos demais alunos nas comparações entre os modos de expressar a regra dos grupos com a intenção de que explorem o significado da expressão "+1" no contexto da tarefa.

Cabe salientar que, em boa parte das resoluções, os alunos formularam uma regra (implícita ou explícita) do tipo "2x", mas não conseguiram expandi-la para "2x+1", a partir da compreensão e comunicação do significado matemático da constante "+1" (bolinha preta). Nesse sentido, há a possibilidade de Nina também ter como intenção a exploração de um equívoco percebido nas resoluções de muitos grupos, como forma de colocá-los para análise e correção coletiva.

O excerto E começa com uma dúvida manifestada por Nina sobre o momento em que a professora desenvolve as ações de seleção e sequenciamento das resoluções dos alunos.

E1	*Nina:*	A professora deu atividade, apresentou, leu as primeiras questões para os alunos, deixou que eles desenvolvessem, ajudou nas dúvidas, selecionou os grupos e ... mandou eles para o quadro, tudo no mesmo dia?
E2	*Formadora:*	Sim, foram duas horas-aula seguidas em um mesmo dia.
E3	*Nina:*	Porque eu achei que ela tinha pego as folhas de cada um, olhado isso em casa, selecionado e depois devolvido. Então foi tudo numa aula só?
E4	*Formadora:*	Sim. E por que será que ela fez tudo com certa agilidade?
E5	*Fred:*	Já tinha bastante planejamento do que ela ia fazer.
E6	*Formadora:*	Lá no planejamento o que ela já tinha feito?
E7	*Nina:*	Separado questão por questão, quais dúvidas poderiam surgir, quais perguntas que ela poderia fazer para ajudar os alunos.
E8	*Formadora:*	O que vocês acham que ajudou na seleção e sequenciamento no mesmo dia?
E9	*Toni:*	Ela já ter imaginado as resoluções.

Possivelmente, ao ficar ciente da multiplicidade de aspectos da prática de sua futura profissão que precisam ser considerados na seleção e sequenciamento de resoluções dos alunos para a promoção do pensamento algébrico na discussão coletiva, Nina (E1 e E3) mostra-se surpresa com o fato de a professora ter desenvolvido, com rapidez e eficiência, essas ações no decorrer da mesma aula, e diante de tantas outras ações que lhe são requeridas nessa fase da aula. A partir dos questionamentos da formadora (E4 e E6), tendo como base o reconhecimento dos FPs da *expertise* da professora de perceber o pensamento algébrico dos alunos, os FPs (E5, E7 e E9) sugerem que o planejamento da aula e as possíveis resoluções e dúvidas dos alunos antecipadas pela professora (artefato já explorado pelos FPs no caso multimídia) podem tê-la ajudado nesse processo.

Considerações finais

A análise de um caso multimídia assente na perspectiva do ensino exploratório, no contexto da formação inicial de professores, possibilitou aos FPs o primeiro contacto com elementos de uma aula voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste estudo, a capacidade desses FPs de identificar e interpretar o pensamento algébrico dos alunos foi analisada sem desconsiderar essa perspectiva particular de ensino de Matemática que se destaca pelas oportunidades de interações e de desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (Canavarro, 2011; Mestre & Oliveira, 2012).

Nesse contexto, os FPs puderam identificar e interpretar diferentes ideias matemáticas subjacentes às representações e aos processos de simbolização e generalização, e inferir sobre as opções mais adequadas à promoção do pensamento algébrico. Assim, os FP identificaram e interpretaram os aspectos significativos do pensamento algébrico dos alunos, relativamente a uma sequência crescente representada pictoricamente.

No primeiro excerto da discussão coletiva observa-se que os aspectos do pensamento algébrico identificados pelos FPs centraram-se mais nas expressões específicas da regra geral e em algumas representações utilizadas pelos alunos. De modo semelhante, no estudo de Walkoe (2015) a manipulação de símbolos e o raciocínio sobre/com representações chamaram mais a atenção dos FPs. Pesquisas anteriores também evidenciam que os (futuros) professores apresentam dificuldades em perceber de modo mais aprofundado o pensamento matemático dos alunos (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2002, 2008). Em particular, no que diz respeito à interpretação do processo de generalização, o estudo de Callejo e Zapatera (2016) também indica tratar-se de uma capacidade exigente para os FPs, dado que requer a percepção de aspectos específicos desse processo e de lhes atribuir significado matemático.

No entanto, no decurso das discussões coletivas nas sessões de formação, com o apoio da formadora para incentivar interpretações mais fundamentadas, os FPs foram atribuindo sentido às ideias matemáticas subjacentes às representações dos alunos. De facto, de uma apreciação global das discussões coletivas com os FPs verifica-se que houve mudanças significativas quanto à capacidade dos FP em perceber o pensamento algébrico dos alunos e que isso se reflete nas opções de seleção e sequenciamento que apresentam. De acordo com os indicadores de Callejo e Zapatera (2016) para evidenciar o desenvolvimento da capacidade de perceber o pensamento e a compreensão matemática dos alunos, inferimos que, dos primeiros momentos para os subsequentes, a maioria dos FPs passa da apresentação de comentários gerais sobre as estratégias dos alunos para a descrição destas a partir de seus elementos matemáticos, assim como da verificação direta da ocorrência ou não da compreensão matemática nas resoluções dos alunos para a identificação de etapas deste processo considerando o desenvolvimento matemático dos alunos.

Verificou-se, ainda, que as capacidades de identificar e interpretar o pensamento matemático do aluno evidenciadas pelos FPs suportaram tanto a seleção quanto o sequenciamento das resoluções, uma vez que levaram à definição de critérios baseados em aspectos do pensamento algébrico considerados importantes de serem apreendidos (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010). Particularmente, esses critérios fundamentaram-se nas diferenças significativas entre as resoluções e no seu potencial para promover discussões, bem como para mobilizar aspectos do pensamento algébrico dos alunos.

O reconhecimento e a interpretação de detalhes matemáticos das estratégias dos alunos também apoiaram os FPs na identificação do nível de complexidade das resoluções (Stein et al., 2008) e na consideração das dificuldades dos alunos em compreenderem formas mais avançadas de generalização e suas representações (Radford, Bardini, & Sabena, 2007). Essa percepção suportou mudanças nas suas propostas de sequenciamento das resoluções dos alunos.

Outro resultado que sobressai nesse sentido é o facto de os FPs atenderem a aspectos e cuidados específicos referentes aos propósitos da discussão coletiva no ensino exploratório, nomeadamente: promover o reconhecimento de diferentes ideias matemáticas dos alunos; não restringir a autoridade matemática dos alunos, tampouco lhes causar constrangimentos; fomentar o confronto de diferentes resoluções; explorar equívocos; e oferecer oportunidades aos alunos de atribuir significados matemáticos às representações e avançar para níveis de pensamento cada vez mais complexos (Cyrino & Teixeira, 2016; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008).

Estabelecendo uma relação desses resultados com a capacidade de decidir como responder com base na percepção do entendimento das crianças, apresentada no quadro conceitual de Jacobs, Lamb e Philipp (2010), evidenciamos vários aspectos integrados que forneceram a base para os FPs selecionarem e sequenciarem as resoluções dos alunos. Entretanto, devido às exigências dessas ações de ensino, esse estudo revela que os FPs não se baseiam somente em aspectos do pensamento algébrico dos alunos para tomar decisões de ensino, mas também consideraram aspectos da discussão coletiva, das tarefas matemáticas, dos objetivos e do planejamento da aula no quadro do ensino exploratório.

Tomar decisões de ensino com base no que é identificado e interpretado do pensamento algébrico dos alunos apresentou-se como um desafio aos FPs, tendo em conta que não tinham experiências anteriores nesse campo. Isso sugere mais atenção ao desenvolvimento dessa capacidade na formação inicial de professores e nas pesquisas dessa área. Em particular, observa-se que as decisões relacionadas a essas ações no ensino exploratório envolvem múltiplos aspectos integrados da prática do professor desde o planejamento da aula e a escolha ou a elaboração da tarefa, bem como os critérios estabelecidos a partir do que e de como percebem as respostas e compreensões dos alunos, as ações que podem favorecer a construção coletiva de conhecimentos pelos alunos na discussão coletiva ou que podem gerar situações problemáticas. Portanto, as aprendizagens profissionais para contextos de ensino que valorizam a participação e a atividade matemática dos alunos precisam considerar e ir além das experiências pessoais e educacionais dos (futuros) professores, contemplando artefatos de práticas inovadoras (van Es, Cashen, Barnhart, & Auger, 2017).

Assim, consideramos que este trabalho reforça a pertinência de enfatizar as propostas contempladas no caso multimídia de selecionar e sequenciar as resoluções dos alunos, assim como de solicitar justificativas para os critérios para desempenhar essas ações do professor. Em especial, essa atividade permite aos FPs tomarem decisões de ensino, posicionando-se como professores em uma aula de Matemática e tendo que expor suas intenções ou expectativas, desenvolver capacidades de percepção do pensamento matemático dos alunos com base em seus conhecimentos. Por outro lado, também gera incertezas, dificuldades e desafios a serem enfrentados pelos FPs o que, por sua vez, ajuda a destacar o papel importante do formador nesse contexto de formação, um aspeto que merece também a atenção da investigação.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e da Fundação Araucária, bem como aos futuros professores que participaram deste estudo.

Referências

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Portsmouth: Heinemann.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-24). New York: Springer.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 309-333.

Charmaz, K. (2009). *A construção da teoria fundamentada: Guia prático para análise qualitativa*. Porto Alegre: Artmed.

Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *BOLEMA*, *24*(38), 97-126.

Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. (2016). Casos multimídia sobre o ensino exploratório na formação de professores que ensinam matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: Elaboração e perspectivas* (pp.19-32). Londrina, Brasil: EDUEL

Cyrino, M. C. C. T., & Teixeira, B. R. (2016). O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: Elaboração e perspectivas* (pp. 81-100). Londrina, Brasil: EDUEL.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Estevam, E. J. G., Cyrino, M.C.C.T., & Oliveira, H. M. (2017). Análise de vídeos de aula na promoção de reflexões sobre o ensino exploratório de Estatística em uma comunidade de professores. *Quadrante, 26*(1), 145-169.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano*. Relime, 11*(2), 195-231.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2016). Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora. *Quadrante, 25*(2), 25-49.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante, 21*(2), 111-138.

Oliveira, H., & Cyrino, M. C. C. T. (2013). Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. *Sisyphus, 1*(3), 214-245.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Pedro, I. J. C. R. (2013). *Das sequências à proporcionalidade direta: Uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

Rodrigues, P. H., & Cyrino, M.C.C.T. (2017). Aspectos da prática pedagógica considerados na elaboração de um caso multimídia para formação de professores que ensinam Matemática. *Ciência & Educação, 23*(3), 577-595.

Rodrigues, R. V. R., Cyrino, M.C.C.T., & Oliveira, H. M. (2018). Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática. *BOLEMA, 32* (62), 967-989.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60*(1), 20-37.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Van Es, E., Cashen, M., Barnhart, T., & Auger, A. (2017). Learning to notice mathematics instruction: Using video to develop preservice teachers' vision of ambitious pedagogy. *Cognition and Instruction, 35*(3), 165-187.

Van Es, E., & Sherin, M. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571–596.

Van Es, E., & Sherin, M. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*, 244–276.

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523-550.

ANEXO

Resoluções de cinco grupos de alunos à tarefa "Os colares"

Item	Grupo de I*	Grupo de V*
2	Continuando esta sequência de colares, diga quantas contas terá, no correspondente à figura seguinte? O resultado é nove porque vai aumentando 2 bolinhas a figura.	9 porque na figura 1, da 3 na 2 = 6 3.º 7 foi aumentando 2 um cada figura então 7 + 2 = 9
3	Eu fui contando 2 em 2 F5 33 F6 33 F7 35 F8 37 e deu na figura 8 37	17. fomos almentando 2 x contas
4	O resultado é 39 porque foi somando 2 em 2 até chegar a figura 19 que deu 39	39 começamos a contar da figura 9, até chegar na figura 19.ª, fomos almentando 2
6		19 39 20 41 21 43 22 45 23 47 24 49 25 51 26 53 27 55 Sim. fomos almentando 2 até chegar no resultado. O número da figura 19 e 24 é só multiplicar por 2 almentando mais um.

Item	Grupo de P*	Grupo de S*
2	9, Pois de acordo com a sequência sempre almenta 2 perolas	9 contas Eu percebi que na figura 3 tem 7 e na figura 4 tem 9 porque cada colar está aumentando duas bolinhas um de cada lado. 3. E quantas contas terá o colar correspondente à figura 8?
3	Colocando 8 em cada lado mais a perola preta daria 17 $8+8=16+1=\underline{17}$	terá 17 contas, Pois na figura 8º terá 8 cada lado e mais a bolinha preta
4	Basta fazer a multiplicação da numero pedido por 2 e terá o resultado mais a perola preta e dará $38+1=39$ $\begin{array}{r} 19 \\ \times 2 \\ \hline 38 \end{array}$ $Y \times 2$	39 contas
6	Indo conforme a sequencia, sempre aumentando dois Duas vezes o numero da figura mais 1.	É só pegar o número da figura e multiplicar por 2. $L \times 2+1$

Item	Grupo de M*
2	 fig 4 — 9 contas, pois nós desenhamos para chegar ao resultado conforme as contas acima
3	17, pois se a cada lado houver 8 contas brancas o resultado é 16 mais a conta preta igual a 17.
4	39 contas: 19+19=38 → contas brancas +1 → conta preta 39 → total de contas pretas e brancas
6	da sequência. Multiplicando o número da figura por 2 e mais um. n x 2 +1