

Processos de raciocínio espacial na representação de figuras 3D por alunos do 1.º ano do ensino básico

First graders' spatial reasoning processes in representing 3D shapes

Joana Conceição

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Portugal
conceicaoj@campus.ul.pt

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Portugal
margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. Neste artigo, procuramos analisar como é que o registo no plano de figuras 3D por alunos do 1.º ano promove o seu raciocínio espacial e a sua estruturação espacial. Para isso, analisamos os registos de sete alunos em duas tarefas e as comunicações nos momentos de discussão coletiva, em sala de aula, de algumas dessas resoluções. Os dados foram recolhidos no ciclo 1 de uma investigação baseada em design. Os resultados mostram que os alunos registam as suas construções segmentando-as em diferentes partes, usando diferentes formas de registo para evidenciar relações entre essas partes, como o desenho de quadrados enviesados, na estruturação local, ou no desenho de cubos mais pequenos ou de códigos numéricos para representar diferentes camadas, no caso da estruturação global. No caso da estruturação local, por vezes, os registos apresentam erros de contagem ou de coordenação de partes perpendiculares. Esta estruturação espacial parece estar ancorada em processos de raciocínio espacial, associados a *compreender* e *transformar*, que permitem relacionar as figuras 3D com a sua representação no plano, como relacionar, reorganizar, segmentar, mudar de dimensão e localizar. A valorização da comunicação matemática, assente em diferentes suportes, permite compreender melhor as ideias dos alunos e aprofundar a sua estruturação espacial.

Palavras-chave: raciocínio espacial; estruturação espacial; representações; discussões coletivas.

Abstract. In this paper, our aim is to analyze in what way do 1st graders' drawings of 3D shapes promote their spatial reasoning as well as their spatial structuring. For that, we analyze the drawings from seven students during two tasks, as well as their communication, during collective discussions,

concerning those resolutions, in the classroom. Data were collected during cycle 1 of a design-based research. Results show that students draw their constructions by segmenting them into different parts, and use different types of drawings to show the relationships among those parts, like slanted squares, in the case of local structuring, or drawing smaller squares inside larger squares or using numeric codes to represent different layers, in the case of global structuring. Also, in local structuring, in some cases, students' drawings show miscounting or lack of coordination between perpendicular parts. Spatial structuring seems to be anchored in spatial reasoning processes, related to *understanding* and *transforming*, that allow establishing relationships between 3D shapes and their plane representations, like relating, rearranging, sectioning, dimension shifting and locating. By letting students use different ways of communicating, we gain a better understanding of students' ideas and, at the same time, allow them to deepen their spatial structuring.

Keywords: spatial reasoning; spatial structuring; representations; collective discussions.

Recebido em abril 2020

Aceite para publicação em junho 2020

Introdução

Na investigação em educação matemática têm sido vários os trabalhos (Gutiérrez, 1996; Hollowell et al., 2015; Sinclair et al., 2018) que referem as dificuldades que os alunos sentem na interpretação de imagens bidimensionais (2D) de figuras tridimensionais (3D). A forma como este tipo de imagem surge no meio escolar, por exemplo, através dos manuais, sem que haja um trabalho que articule as representações 2D com as representações 3D, leva a que os alunos mais novos tenham dificuldade na interpretação da informação presente neste tipo de imagens. Como referem Hollowell et al. (2015) e Sinclair et al. (2018), a forma como os alunos interpretam essas imagens não é direta, pois precisam de dominar os códigos de representação em uso.

A propósito das dificuldades que os alunos sentem na interpretação de imagens 2D de objetos 3D, Gutiérrez (1996) refere que as representações 2D de figuras 3D implicam perda de informação. Esta informação tem de ser recuperada pelos alunos, num processo que o autor designa como "restituição de significado", mas isto implica uma negociação de significados acerca da forma como é possível registar esses significados, para que assim os alunos possam recuperar a maior quantidade possível de informação. Isto significa que, para os alunos conseguirem interpretar imagens 2D de objetos 3D, deve ser feito um trabalho que lhes permita conhecer a estrutura das figuras, e, ao mesmo tempo, estabelecer relações entre diferentes tipos de representação de uma mesma figura tridimensional e o próprio objeto, através da construção coletiva de significados (Sfard, 2008). Como referem Blanco et al. (2019), para os alunos compreenderem um conceito matemático eles têm de ser capazes de distinguir um objeto da sua representação.

Uma outra questão, levantada por Panorkou e Pratt (2009), tem a ver com a valorização, que é natural nas crianças, da representação material relativamente à representação abstrata, e da maneira, até mesmo no modo informal, com que a visão e o tato são utilizados na geometria. Estes dois sentidos parecem prevalecer na distinção entre figuras 2D e figuras 3D, numa fase em que as crianças ainda não têm meios suficientes para raciocinar de uma forma abstrata, isto é, pensar com imagens mentais, sobre a estrutura das figuras.

Dadas as dificuldades que os alunos, sobretudo os mais novos, sentem na interpretação de imagens 2D de figuras 3D, parece ser importante valorizar um tipo de trabalho que procure articular o objeto com as suas possíveis formas de representação. Dentro das formas de representação, é importante valorizar, inicialmente, formas de representação, ainda que ingénuas, que os alunos possam utilizar, assim como promover momentos de discussão coletiva, como formas de aceder às suas ideias.

Os trabalhos de investigação realizados focam-se maioritariamente na interpretação de imagens que usam técnicas como as projeções em perspetiva, cavaleira ou isométrica (Gutiérrez, 1998) em articulação ou não, com os modelos físicos. No entanto, ainda são escassos os trabalhos que procuram perceber que tipo de representações 2D informais os alunos utilizam e como é que essas representações estão relacionadas com as figuras 3D que representam, como é o caso do estudo de Sack e van Niekerk (2009) e o de Nunes e Rodrigues (2018).

Neste estudo, procuramos analisar como é que o registo no plano de figuras 3D por alunos do 1.º ano promove o seu raciocínio espacial e a sua estruturação espacial, tentando responder às questões:

- Que processos de raciocínio espacial são evidenciados quando os alunos registam no plano figuras 3D?
- Que estratégias de registo utilizam os alunos para evidenciar as relações espaciais presentes nas construções e que tipo de estruturação espacial é refletida nesses registos?

Enquadramento teórico

Para compreendermos melhor como é que a representação de figuras 3D no plano ocorre e qual a sua importância, procuramos, em primeiro lugar, clarificar o que entendemos por raciocínio espacial e estruturação espacial. Continuamos depois a revisão da literatura, incidindo sobre desafios das representações de figuras 3D e alguns aspetos pedagógicos da aula de matemática a ter em conta.

Raciocínio espacial e estruturação espacial

O raciocínio espacial tem vindo a ganhar relevo na investigação internacional em parte pela importância que assume na aprendizagem da matemática, mas também por constituir uma

forma de raciocínio importante na aprendizagem da geometria. Battista (2007) define raciocínio espacial como a “capacidade de 'ver', examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais” (Battista, 2007, p. 843). Davis, Okamoto e Whiteley (2015) apresentam uma proposta de raciocínio espacial assente em duas importantes partes: *compreender*, mentalmente, e *transformar*, fisicamente. A parte relativa a *compreender* comporta os seguintes processos: perceber (adotar uma perspectiva, visualizar, imaginar, tatear...), interpretar (construir diagramas, modelar, comparar, relacionar...) e (des)construir (compor e decompor, organizar e reorganizar, segmentar...). A parte relativa a *transformar* inclui processos como mover (deslizar, rodar, refletir, equilibrar), situar (mudar de dimensão, localizar, orientar, interseccionar...) e alterar (dilatado e contrair, distorcer e dar forma, dobrar...). Bruce e Hawes (2015) acrescentam que estes processos constituem meios para levar os alunos a explorar e investigar o espaço como base para a compreensão de modelos mais abstratos de representação. Enquanto a proposta de Battista (2007), parece focar-se mais numa dimensão mental do raciocínio espacial, a proposta de Davis et al. (2015) parece reconhecer que o raciocínio espacial envolve uma dimensão mental e uma dimensão física que interagem na produção de novo conhecimento. Esta interação é o que permite também a criação ou sofisticação de modelos mentais, através da estruturação espacial.

Estruturar espacialmente um objeto constitui uma forma de abstração que permite representar mentalmente uma forma de organização para um objeto ou para um conjunto de objetos com base em relações entre componentes, compostos e o todo (Battista & Clements, 1996). Isto é, estruturar espacialmente um objeto implica criar um modelo mental para esse objeto bidimensional ou tridimensional. A estruturação espacial consiste, assim, em identificar componentes, estabelecer relações entre componentes em compostos e estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo. Por exemplo, no caso de uma construção com cubos, os cubos seriam os componentes e, estabelecendo relações entre esses cubos podem formar-se compostos, normalmente relacionados com uma parte da construção. Esses componentes e compostos devem estar ainda relacionados com o todo, ou seja, a forma como as relações entre eles são estabelecidas devem ter como foco esse mesmo todo.

Battista e Clements (1996) caracterizam duas formas diferentes de estruturação espacial, de acordo com o nível de sofisticação: a estruturação local e a estruturação global. Quando os alunos reconhecem componentes, podendo, ou não, relacioná-los entre si para formar compostos, mas sem ainda os relacionarem com o todo, estamos perante uma estruturação local. Quando os alunos já são capazes de estabelecer relações entre os componentes, formando compostos, e relacionar esses componentes e compostos com o todo, temos uma estruturação global. Ainda segundo os autores, a estruturação global está

dependente das operações de coordenação e de integração. A coordenação permite combinar componentes e compostos, o que pode acontecer sem ser estabelecida qualquer relação com o todo, como é o caso da estruturação local, ou então combinar componentes e compostos relacionando-os com o todo, como no caso da estruturação global. Os alunos podem coordenar os componentes e compostos a um nível físico, com o apoio de materiais manipuláveis, como acontece frequentemente, nos primeiros anos, ou a um nível mental pela manipulação de modelos mentais. A integração corresponde ao ato de fazer corresponder um modelo mental, que o aluno já tenha em memória, à estrutura de um objeto, ou criar um novo modelo mental a partir da transformação de outros modelos mentais já existentes. A operação de integração está dependente da coordenação para transformar modelos mentais, mantendo a coerência da construção através da combinação de componentes, compostos e o todo, mentalmente.

Representações de figuras 3D no plano

A estruturação espacial permite então criar um modelo pessoal para representar, a um nível mental, a estrutura de uma figura. Nos primeiros anos, a criação desses modelos mentais está ainda muito dependente da manipulação de materiais concretos e do estabelecimento de relações entre esse nível mais concreto e um nível mais abstrato. Para isso, o ato de desenhar é sugerido por alguns autores (Gutiérrez, 1998; Sinclair et al., 2018) como fundamental, já que, como referem, “desenhar está ligado à abstração matemática” (Sinclair et al., 2018, p. 233). Thom e McGarvey (2015) também evidenciam a importância que os desenhos têm na percepção e no aprofundamento de relações geométricas e espaciais. Os registos, ou desenhos, que os alunos fazem das suas construções, têm um papel importante no aprofundamento quer da capacidade de desenhar quer do raciocínio espacial (Sinclair et al., 2018), e, ao mesmo tempo, contribuem também para o aprofundamento das relações espaciais que os alunos são capazes de estabelecer. Em termos de raciocínio espacial, construir figuras 3D e representá-las no plano implicam processos associados a *compreender*, como relacionar, construir diagramas, compor/decompor, organizar/reorganizar e segmentar e também a *transformar*, como mudar de dimensão e localizar.

No que respeita ao estabelecimento de relações entre as figuras 3D e a sua representação no plano, é necessário que os alunos sejam capazes de reconhecer relações semelhantes entre as imagens que lhes são dadas e o que eles encontram nas figuras 3D. Gutiérrez (1996) refere que os processos de construir sólidos e desenhar as respetivas representações em 2D são bastante diferentes, exceto no caso da construção por camadas. Neste caso, o autor elenca, para além dos tipos de representação já referidos na introdução, a projeção ortogonal (vistas) codificada, um tipo de registo simbólico por vistas com a identificação numérica do total de cubos em cada linha perpendicular ao observador e a projeção por camadas (ou níveis), onde a construção é segmentada por camadas, sendo cada camada

representada em separado (Gutiérrez, 1996; 1998). De acordo com os resultados da investigação deste autor, a representação por camadas parece ser a mais fácil para os alunos mais novos, mas estes mostram alguma dificuldade em compreender a necessidade de interrelacionar as diferentes camadas. Por isso, dar a oportunidade de os alunos trabalharem sobre as relações presentes em figuras 3D e, ao mesmo tempo, permitir-lhes criar e discutir formas pessoais de representação, no plano, para essas figuras, pode contribuir para estabelecer relações mais consistentes. Tal como referem Nunes e Rodrigues (2018), no seu estudo com crianças da educação pré-escolar, a representação de figuras 3D no plano pode ser desafiante, mas as crianças mostraram ser capazes de encontrar soluções criativas. Por isso, tal como estas autoras sugerem, é preciso dar oportunidade para os alunos se envolverem em tarefas espaciais, já que mesmo os mais novos têm revelado boas capacidades espaciais acima do que, até recentemente, se supunha (Mulligan, 2015). A articulação entre as formas de representação parece ser fundamental neste processo de abstração e, por isso, a discussão dessas formas de representação é também um aspeto importante a considerar, na sala de aula. Falaremos sobre este aspeto mais adiante.

A propósito da importância da utilização de diferentes formas de representação, Sack e van Niekerk (2009) realizaram um estudo focado no desenvolvimento do conhecimento espacial de crianças entre os 8 e os 12 anos de idade, que decorre através de um programa de ensino focado na manipulação de materiais e no uso de software dinâmico. Este programa baseia-se num modelo para descrever a capacidade operacional espacial dos alunos que contempla, como formas de representação de figuras 3D, o modelo 3D, a descrição verbal desse modelo, a representação semiótica (por exemplo, a representação das vistas) e a representação gráfica convencional 2D (desenhada ou interpretada). Não pretendendo alongar-nos muito na análise deste modelo, destacamos as quatro formas de representação das figuras 3D que aqui são enunciadas e que consideramos complementarem-se na compreensão da estrutura deste tipo de figuras.

Como parte desta intervenção, Sack e van Niekerk (2009) descrevem um estudo preliminar com crianças mais novas, entre os seis e os sete anos de idade, realizado na África do Sul, onde analisam as representações 2D que os alunos fazem de políedros que sintetizam num quadro (Figura 1).

Figure	A	B	C	D	E	F	G	H
i								
ii								
iii								
iv								
v								
vi								
vii								
viii								

Figura 1. Diferentes categorias de desenhos de estruturas 3D (Sack & van Niekerk, 2009, p. 148)

Este quadro apresenta os traços essenciais de diferentes formas de registo utilizados pelos alunos para cada um dos polícubos apresentados à esquerda, que os autores categorizam por coluna. De acordo com os autores, esta categorização não pretende estabelecer nenhuma hierarquia em termos de desenvolvimento, uma vez que tanto alunos de dez anos, em estudos posteriores, como alunos de seis anos de idade construíram representações semelhantes. Isto leva-nos a questionar se a intervenção pedagógica não terá uma influência significativa na forma como os alunos poderão progredir ou se a falta de experiências de aprendizagem significativas não poderá condicionar os alunos nesta progressão. De acordo com os autores, as formas de representação por linhas associadas à categoria A foram feitas por três crianças numa fase inicial da investigação. Os autores incluem a maioria dos alunos nas categorias B e C, sendo que, na categoria B, os alunos tentaram representar a vista de frente para as construções i) a iv). Na categoria D encontram-se os registos dos alunos que tiveram mais dificuldade na tarefa. Na categoria F incluem-se alunos de diferentes níveis que procuraram representar mesmo os objetos escondidos. Na categoria G incluem-se os alunos com capacidades espaciais fortes que usam diferentes alturas para representar a profundidade e a categoria H contempla apenas um aluno. Também o trabalho de Nunes e Rodrigues (2018) evidencia formas de registo semelhantes, acrescentando ainda o registo de cubos no verso da folha para evidenciar que se encontram num nível diferente.

A diferença, em termos de construção, entre os polícubos i) a iv) e os polícubos v) a viii) traz desafios acrescidos ao seu registo, de modo a garantir que todas as relações espaciais

estão presentes. Isto porque o primeiro grupo é constituído por construções de uma camada passíveis de assentarem na sua totalidade na mesa e, no segundo grupo, isto não se verifica, já que as construções são mais complexas. A tentativa de os alunos representarem esses níveis, procurando mostrar a presença de cubos, por cima ou por baixo, atrás ou à frente, de outros cubos, leva-nos a considerar que a estruturação que fazem daquela figura é já mais complexa, como é o caso das categorias F, G e H. Isto porque que as formas mais simples de registo podem estar associadas a uma apreensão global da figura, baseando-se nos aspetos mais salientes, ou a não consideração dos cubos não visíveis de uma determinada perspetiva, como são os casos das categorias A a E. No entanto, importa perceber melhor que fatores levam os alunos a optarem por um determinado tipo de registo e, para isso, é preciso valorizar diferentes formas de comunicar.

Diversidade de suportes de comunicação para compreender melhor

Para além da importância que os desenhos têm no aprofundamento das relações espaciais, esta forma de representação constitui também um meio que os alunos têm para comunicar as suas ideias. No entanto, pelo menos nos anos iniciais, os desenhos só por si podem não revelar toda a complexidade do pensamento dos alunos. Por isso, valorizar momentos de comunicação e discussão de ideias matemáticas é fundamental para compreender melhor as ideias dos alunos.

Radford e Barwell (2016) referem a importância de valorizar a linguagem natural dos alunos como forma de acesso às suas conceções e como meio para a entrada dos alunos na linguagem matemática. Para isso, é preciso contemplar diferentes formas de comunicação, não apenas uma comunicação matemática formal, que, quando combinadas, permitam que os alunos participem e que os outros possam compreender melhor as suas ideias. Entre essas diferentes representações, e na mesma linha do modelo proposto por Sack e van Niekerk (2009), podem estar os materiais manipuláveis, os desenhos e os gestos, apoiando os alunos que não dominam conceitos formais para que possam expressar as suas ideias. A utilização de diferentes formas de representação, em simultâneo, para comunicar, permite que os alunos aprofundem as relações entre essas representações o que, por sua vez, contribui para estabelecer relações mais consistentes relativamente à compreensão da estrutura da figura. Este tipo de atividade parece ir ao encontro do que Clements et al. (2018) sugerem como atividades que promovem a reflexão e a discussão, permitindo assim o aprofundamento das ideias dos alunos. Parece ser também neste sentido que Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2008) atribuem uma função reflexiva à comunicação:

estar familiarizado com a linguagem geométrica implica mais do que o uso de certos termos. Também tem uma função importante no desenvolvimento de capacidades de visualização espacial. Ao expressar alguma ideia em palavras, é possível ver mais. A comunicação sustenta a observação e leva a que os alunos desenvolvam uma melhor imagem dos objetos. (p. 168)

Parece, assim, que a interação entre o que se vê e o que se diz acerca do que se vê promove a reflexão donde emerge a aprendizagem. Desta forma, ao comunicarem aos colegas as relações que estabelecem para um determinado objeto, os alunos têm um novo olhar que lhes permite aprofundar o seu conhecimento.

Metodologia

O estudo que aqui apresentamos tem uma natureza qualitativa e segue a modalidade de investigação baseada em design, inserindo-se numa experiência de ensino, onde procuramos desenvolver uma teoria local de aprendizagem, relacionando os processos de aprendizagem referentes à estruturação espacial com os meios pedagógicos que suportam essa aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2006). Esta experiência de ensino encontra-se estruturada em três sequências de tarefas, num total de vinte tarefas. Os dados aqui apresentados foram recolhidos na quarta e quinta tarefas da primeira sequência. Com estes dados, procuramos analisar como é que o registo no plano de figuras 3D por alunos do 1.º ano promove o seu raciocínio espacial e a sua estruturação espacial.

Na tarefa *Pentacubos*, foi proposto aos alunos que construíssem pentacubos e registassem as suas construções na sua folha de trabalho. Na tarefa *Construção com cubos*, foi pedido aos alunos que usassem tricubos para construir um paralelepípedo igual a um modelo que lhes foi fornecido (Figura 2), registando essa construção na folha de trabalho. Embora, em tarefas anteriores tivéssemos optado por dar aos alunos folhas de registo com quadriculas grandes, nestas duas tarefas, a folha de trabalho dada aos alunos era lisa, oferecendo assim aos alunos a possibilidade de criarem os seus próprios registos sem a estrutura condicionante do papel quadriculado ou isométrico. Dado serem alunos do 1.º ano, ambas as tarefas foram propostas oralmente.

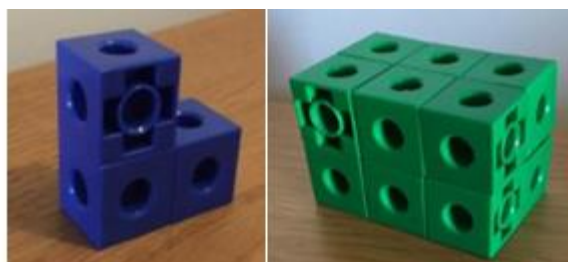


Figura 2. Tricubo utilizado como composto para composição do modelo à direita

Esta experiência de ensino foi desenvolvida numa turma do 1.º ano do Ensino Básico de uma escola da área metropolitana de Lisboa com 24 alunos com idades entre os 6 e os 7 anos. As autoras deste artigo construíram ou adaptaram as tarefas e planearam as sessões que depois foram discutidas com a professora da turma. A professora teve também o papel de implementar as tarefas e conduzir o trabalho dos alunos. A primeira autora do artigo fez

uma observação participante ao longo do estudo, embora intervindo apenas pontualmente nas aulas para colocar questões durante a discussão coletiva, estabelecida entre os alunos e professora, na parte final de cada sessão, ou durante o trabalho autónomo dos alunos. Para a recolha de dados, recorreremos ao registo vídeo e áudio do trabalho de dois pares de alunos e dos momentos de discussão coletiva com todos os alunos. Procedemos também à recolha das produções escritas de todos os alunos (por digitalização) e das suas construções (por registo fotográfico). Para este artigo, focamo-nos na análise das construções e dos registos escritos de sete alunos – Sara, Luzia, Carolina, Gil, Matilde, Dalila e Luísa – e nas suas comunicações, durante os momentos de discussão coletiva, por evidenciarem tipos de relações espaciais diferentes e tipos de representações diferentes entre si, mas sendo representativas do desempenho dos restantes alunos da turma.

O quadro de análise (Tabela 1) foca-se no tipo de relações espaciais que são evidenciadas nos registos dos alunos. Para a construção deste quadro, recorreremos à proposta de Battista e Clements (1996) relativa à estruturação espacial, entendendo a identificação de componentes, estabelecimento de relações em compostos e estabelecimento de relações entre componentes, compostos e o todo como subníveis de progressão associados à estruturação local ou à estruturação global. Procurámos associar formas de representação utilizadas pelos alunos a cada um destes subníveis que emergiram de forma indutiva da própria análise dos dados para uma maior clarificação das estratégias de registo utilizadas pelos alunos. As representações utilizadas pelos alunos, sobretudo na primeira tarefa que analisamos aqui, decorreram da forma intuitiva e pessoal como os alunos olharam para as figuras dado que, até então, não tinham sido discutidas, com a turma, possíveis formas de registo. Os processos pelos quais foram criadas as diferentes representações, seja em construções 3D ou em desenhos, estão particularmente associados ao raciocínio espacial, tanto no que respeita a *compreender* (relacionar, construir diagramas, compor/decompor, organizar, reorganizar, segmentar) como a *transformar* (mudar de dimensão, localizar), pelo que são mobilizados na nossa análise. Além disso, pela sua relação próxima com a estruturação espacial, estes processos estão também presentes, no nosso quadro de análise, em alguns casos explicitamente e/ou de forma implícita.

Os níveis são atribuídos ao tipo de estruturação evidenciada nas representações feitas pelos alunos, embora estes possam ter uma estruturação das figuras 3D superior à registada.

Tabela 1. Quadro de análise para os níveis de estruturação espacial presentes nos registos

Níveis	Subníveis	Indicadores/estratégias
Apreensão global	E0- Reconhecer pelo aspeto global	Apresenta um registo da construção 3D que evidencia um aspeto global semelhante, mas não evidencia relações espaciais presentes na figura 3D. Considera dois registos diferentes como sendo congruentes, com base no seu aspeto global.
	E1- Reconhecer componentes	Regista a construção 3D, discriminando os componentes de construção. (pode apresentar erros de contagem)
Estruturação local	E2- Estabelecer relações entre componentes	Representa apenas uma das vistas, considerando a localização dos cubos. Segmenta a construção e usa diferentes vistas para desenhar cada segmento da construção, relacionando os componentes de cada parte, sem relação entre partes
	E3- Estabelecer relações entre compostos	Utiliza diferentes vistas para representar partes diferentes. Desenha componentes contíguos, introduzindo pequenas alterações no desenho de outros componentes iguais para evidenciar um cubo que está num nível diferente (por exemplo, desenha um quadrado inclinado ao lado de outro).
Estruturação global	E4- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo evidenciando coordenação	Desenha quadrados mais pequenos dentro de quadrados maiores para relacionar diferentes camadas
	E5- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo evidenciando integração	Usa números para representar o número de cubos acima da camada inferior. Usa números para representar o número total de cubos em cada linha perpendicular ao observador.

Resultados

Pentacubos

Começamos por apresentar os resultados referentes à tarefa *Pentacubos*. Esperávamos que os alunos construíssem pentacubos de uma camada e sabíamos que possivelmente a construção de pentacubos com duas camadas seria desafiante para eles. Ao longo da tarefa, a primeira autora e a professora perceberam que os alunos estavam de facto a construir, quase exclusivamente, pentacubos de uma camada, por isso, propuseram-lhe que construíssem também pentacubos de duas camadas, ou fizessem transformações nos pentacubos já construídos, de modo a obterem construções com cubos à frente e atrás e em cima e em baixo. No entanto, alguns alunos argumentaram que essas construções não

seriam possíveis de registar (notas de campo) e, por isso, não as tinham construído. Por este motivo, a maior parte dos registos dos alunos são de pentacubos de uma camada, embora tivessem depois surgido construções com duas camadas, em menor número, que os alunos também registaram. Os resultados apresentados aqui focam-se sobretudo na análise destas construções de duas camadas pelo desafio associado à mudança de dimensão quando representam no plano.

Apresentamos agora os resultados relativos ao trabalho de Sara que constrói exclusivamente pentacubos de uma camada e regista-os de acordo com a vista superior (Figura 3). Apesar de Sara não ter construído pentacubos com mais do que uma camada, os seus registos trazem também desafios que é preciso considerar no registo de construções com cubos.

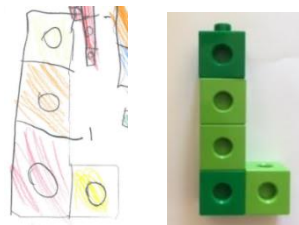


Figura 3. Excerto do registo de Sara evidenciando erros de contagem e coordenação

O registo de Sara exibe duas dificuldades, evidentes na Figura 3, e fá-lo de forma consistente, em várias construções: erros de contagem do número de quadrados que regista e falta de coordenação desses quadrados. Verificamos que Sara regista apenas quatro quadrados correspondentes a quatro cubos em vez de cinco, embora mantendo o aspeto global da construção. A falta de coordenação evidencia-se pela ausência da total justaposição das faces dos dois cubos inferiores que partilham arestas comuns, quando desenha o quadrado do canto mais comprido que os restantes.

Ainda durante a apresentação de Sara, e na tentativa de identificarem construções iguais com orientações diferentes, Dalila intervém, considerando os dois registos da Figura 4 como representando a mesma construção.

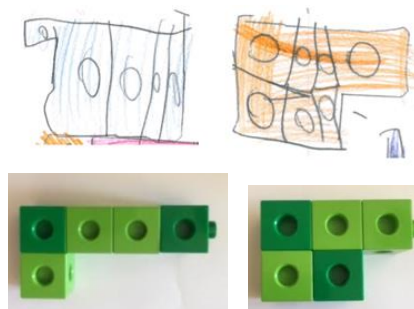


Figura 4. Dois registos de Sara usados na discussão para verificar a sua congruência e respetivas construções

Aparentemente, Dalila considera que ambos os registos têm uma aparência global semelhante, embora com orientações diferentes, por eventualmente se focar no seu aspeto global. No registo da direita, parece haver uma duplicação de quadrados, reforçando a ideia de que há uma predominância da apreensão global da figura, embora com discriminação de cubos (transição de E0 para E1).

Procurando clarificar as ideias das alunas, a professora inicia a discussão, tentando também perceber qual o pentacubo que Sara pretendia registar no desenho da esquerda.

- Professora: Qual é este, Sara?
 Sara: É huum... (hesita)
 Professora: Este aqui é um, dois, três, quatro (conta os quadrados maiores). Por que é que fizeste este pequenino?
 Sara: Porque eu queria fazer este aqui em cima (faz o gesto de desenhar um quadrado no canto superior esquerdo do quadrado da esquerda como na Figura 5) e eu vi que este dava. Também podia ser assim...



Figura 5. Gesto de Sara a “desenhar” um quadrado mais pequeno dentro do quadrado maior

O facto de Sara desenhar o quadrado tão pequeno e o gesto que faz, sobrepondo os dois quadrados, leva-nos a considerar, num primeiro momento, a possibilidade de se tratar de uma construção com duas camadas onde o cubo a que se refere o gesto da aluna estivesse em cima ou em baixo do que já estava desenhado. Contudo, quando a professora pede à aluna para construir de novo o pentacubo, percebemos que se trata de um pentacubo com apenas uma camada, tal como se pode ver na Figura 6.



Figura 6. Sara comparando pentacubo e registo

Notamos alguma dificuldade por parte de Sara em respeitar a localização do cubo, situado em baixo, quando o representa à esquerda, seguindo a linearidade dos outros cubos, embora desenhando-o mais pequeno para dar uma aparência global de L. Sara parece, assim, ignorar a justaposição das faces (E0). No entanto, para reconstruir o pentacubo, Sara baseia-se no seu próprio registo à medida que constrói, aparentemente estabelecendo relações entre o registo e a construção, como vemos na Figura 7 (E1).



Figura 7. Processo de reconstrução do pentacubo por Sara com base no seu próprio registo

Apesar das dificuldades exibidas por Sara no que respeita à estruturação espacial das figuras analisadas (erros de contagem e de coordenação), consideramos que a aluna evidencia processos de raciocínio importantes como localizar e mudar de dimensão (associado a *transformar*), quando, por exemplo, usa a localização dos cubos para reconstruir o pentacubo a partir do seu próprio registo, estando, ao mesmo tempo, a relacionar ambas a representação 2D com a sua construção 3D (associado a *compreender*). A presença destes processos de raciocínio não implica que o tipo de estruturação esteja totalmente de acordo com a estrutura da figura, mas pode contribuir para esse avanço.

De seguida, apresentamos, na Figura 8, uma construção de duas camadas feita por Luzia e o respetivo registo.

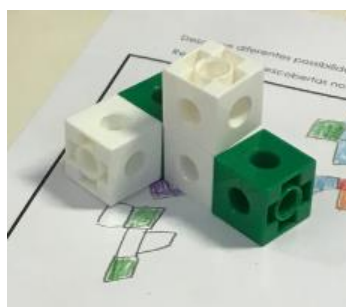


Figura 8. Registo e construção de Luzia para um pentacubo com duas camadas

O registo apresentado diz respeito à única construção de duas camadas feita por Luzia, onde a aluna opta por registar o quadrado referente ao cubo da camada de cima de forma enviesada, aparentemente para dar a ideia de que não estão no mesmo nível. A aluna parece reconhecer a presença desse cubo e encontra uma forma de relacioná-lo com a restante

construção, embora esta forma de registo não permita uma interpretação correta do tipo de construção que pretende representar, levando-nos por isso a incluir este registo no nível E3. No entanto, é possível que este registo não corresponda ao modelo mental que Luzia possui do objeto, uma vez que ela tenta representar o cubo que está por cima. Luzia exhibe assim processos associados ao raciocínio espacial como relacionar, quando consegue perceber as relações presentes na estrutura da figura, e localizar, associado a mudar de dimensão, ao criar uma representação 2D para uma construção 3D, procurando manter as mesmas relações espaciais. Também o processo de segmentar parece estar presente, quando recorre a diferentes “códigos” para representar as diferentes camadas da construção.

O registo de Luzia levanta algumas dúvidas de interpretação quando Raquel e Sara mostram os pentacubos que construíram a partir do registo de Luzia (Figura 9), pelo que a professora aproveita para comparar a construção da Sara, a construção de Luzia e o registo.



Figura 9. Construção por Raquel a partir do registo de Luzia

Procurando aprofundar mais a reflexão dos alunos a professora intervém:

- Professora: Quem olhar bem para esta figura (refere-se ao registo) que a Luzia fez, até parece que é esta (mostra a construção proposta por Sara). Na verdade, o que a Luzia queria fazer era esta (mostra a construção de Luzia).
- Raquel: Porque não dava para fazer... Tinha de colocar ao lado.
- Professora: Por que é que não dava para fazer por cima?
- Raquel: Porque aquilo é só um papel, não dá para... Tínhamos de fazer do outro lado (referindo-se ao verso da folha).

A intervenção de Raquel revela que a aluna compreende a relação presente na construção, cima/ baixo, e propõe uma forma de registo diferente da de Luzia, mantendo à mesma essa relação espacial, ao sugerir desenhar o cubo da segunda camada no verso da folha como sendo uma camada diferente,

Analisando agora o registo de Carolina, na Figura 10, podemos ver como a aluna registou uma construção de dois níveis.



Figura 10. Construção e registo de Carolina

Para registrar a sua construção, Carolina refere: “Fiz, meti três em cima e dois em baixo e ficou essa forma”. Como menciona na sua descrição, Carolina organiza o seu registo segmentando-o em duas partes: os três quadrados de cima e os dois de baixo. Aparentemente, Carolina começa por desenhar três dos cubos visíveis na vista de cima, organizados em linha. De seguida, parece representar os dois cubos restantes (o cubo mais à frente e o cubo por baixo do cubo da camada de cima), recorrendo à vista de frente de modo a tornar visível o cubo escondido da camada de baixo. Regista esse cubo ao lado do laranja, por já não ser possível representá-lo ao lado do verde. No entanto, o registo de Carolina não mostra uma relação coerente entre as partes da construção (E2). Embora o registo não evidencie totalmente as relações presentes na construção, permitiu à aluna representar e manter visíveis todos os cubos.

Apresentamos, de seguida, a construção e registo de Gil, na Figura 11. A apresentação de Gil surge apenas no início da sessão seguinte de implementação da tarefa *Construções com cubos*, tendo como propósito a discussão sobre formas de registo que evidenciem as diferentes camadas.



Figura 11. Registo e construção de Gil

Gil desenha a sua construção, registando os três cubos da camada de baixo, incluindo o que não é visível do seu ponto de observação. Depois, para mostrar a sobreposição de cubos, desenha um quadrado mais pequeno dentro de dois dos quadrados maiores correspondentes aos cubos da camada de cima, tal como explica:

Gil: Eu fiz assim, porque era mais fácil fazer assim, percebia-se mais. Porque aqui está um cubo maior, aqui está outro cubo grande, aqui está outro cubo grande e aqui, percebia-se que está outro cubo em cima e este aqui é outro cubo.

A referência aos cubos grandes parece estar associada à forma como registou quadrados maiores para a camada de baixo e quadrados mais pequenos para a camada de cima. Desta forma, Gil parece estruturar a construção em camadas, procurando manter, no desenho, as relações presentes na figura 3D. O registo de Gil parece mostrar que o aluno estabeleceu relações adequadas entre o composto da camada inferior e o composto da camada superior, encontrando uma forma de registo que lhe permitiu mostrar a coordenação desses dois compostos (E4). Em termos de processos associados ao raciocínio espacial, Gil, além de segmentar o pentacubo em camadas, recorre ao processo de mudar de dimensão, representando as relações espaciais da construção 3D com um código diferente.

Em termos de registo e de construção partilhada do conhecimento, coube à professora evidenciar que o tipo de registo utilizado por Gil seria limitado se o número de cubos fosse muito grande. Por isso, foi apresentada aos alunos a projeção ortogonal codificada.

Construções com cubos

A discussão inicial de que demos conta na subsecção anterior procurou levar os alunos a relacionar a estrutura das figuras com formas de registo, tentando antever possíveis dificuldades, no registo das construções desta tarefa. Consideramos este registo mais exigente uma vez que há sempre cubos que não são visíveis, qualquer que seja a perspetiva.

Começamos por apresentar o registo da construção de Matilde (Figura 12).

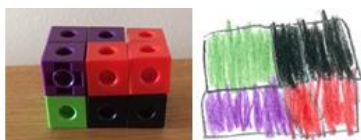


Figura 12. Construção e registo de Matilde

Nesta imagem, podemos ver o desenho de seis quadrados: um verde e dois pretos em cima, e um roxo e dois vermelhos por baixo, correspondentes à vista de frente, embora com a inversão da localização de cubos relativamente à construção. Embora, na construção, os cubos tenham todos o mesmo tamanho, neste registo, a aluna desenha os quadrados com tamanhos diferentes. O registo de Matilde preserva, no entanto, as relações horizontais e o alinhamento entre cubos de cima com os cubos de baixo.

Matilde explica, durante a discussão coletiva, como desenhou a sua construção:

- Matilde: Este (“quadrado” vermelho em baixo à direita, no registo) é como se fosse também o detrás (aponta para o cubo vermelho atrás, na imagem da construção projetada no quadro).
- (...)
- Professora: Por que é que só desenhaste seis quadradinhos?
- Matilde: Por causa que [sic] não se vê estes debaixo.
- Professora: Quais é que não se veem?
- Matilde: Os debaixo. E atrás.
- (...)

Professora: Ela só conseguiu ver esta parte da frente. Não conseguiu ver os de trás. Então o que é que ela desenhou? Ela só desenhou esta camada aqui da frente.

Apesar de Matilde tentar mostrar as relações que estabeleceu entre o seu registo e a construção, a professora, mesmo considerando essas relações, não deixa de refletir com os alunos sobre o facto de este desenho não ser claro quando tentamos construir a mesma figura a partir da informação nele expressa.

A relação que Matilde estabelece entre o seu registo e a imagem do paralelepípedo revela que a aluna sabe que há cubos que não estão visíveis, parecendo coordenar as vistas, mas não evidencia essa relação no registo (E2). Aparentemente, os processos de mudar de dimensão e construir o diagrama (desenhar) foram mais desafiantes para a aluna.

O registo de Dalila, apresentado na Figura 13, parece ser semelhante ao de Matilde com a exceção que esta aluna parece tentar representar as duas camadas da construção. A seta indica a orientação da aluna enquanto observa a construção.



Figura 13. Construção e registo de Dalila

Dalila regista primeiro a camada superior de acordo com a vista de cima e depois a vista da frente unicamente da camada inferior. Não obstante esta não ser uma forma de representar que permita facilmente compreender a estrutura presente e ser usada para reconstruir a figura 3D, apresenta relações espaciais importantes. Neste registo, Dalila parece segmentar a sua construção em camadas, registando-as de uma forma ainda muito simples, mas revelando já alguma coordenação dessas camadas. De destacar, nesta situação, é o facto de Dalila representar (quase em perspetiva) a camada superior como se fosse plana, associando-lhe depois a camada de baixo (E3).

Apresentamos agora o registo de dois alunos, Gil e Luísa, que usaram números para representar cubos. Começamos pela explicação que Gil faz do seu processo de construção:

Gil: Depois eu escolhi estes assim (encaixa dois tricubos formando um supercomposto retangular) e depois quando vi estes assim, quando descobri e vi que estes dois também encaixava (referindo-se aos outros dois tricubos)... Quando vi que encaixavam, este para cima e este para baixo (referindo-se à posição das peças) imitei, este para este e vi que encaixavam.

A forma como Gil descreve a sua construção revela que o aluno estabeleceu uma relação entre compostos, neste caso, as duas camadas, reconhecendo-as como congruentes e

iterando-as (“imitei”). Para além de explicar como construiu o paralelepípedo, Gil apresenta também o seu registo (Figura 14) e explica o seu significado. A seta indica a orientação do aluno enquanto observa a construção.

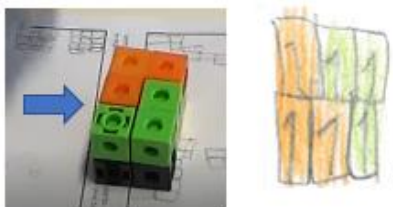


Figura 14. Construção e registo de Gil

Professora: O que significam estes 1?
 Gil: Significa que estes... O quadrado que é um e o outro 1 que é dois.

Gil desenha a construção a partir da vista de cima, registando seis quadrados que servem de base, escrevendo depois o número 1 dentro de cada quadrado para indicar o número de cubos acima da primeira camada, tal como descreve. Parece assim conseguir relacionar compostos entre si e relacioná-los também com o todo, tornando evidente essa relação no seu registo (E5). Contudo, o facto de colocar o número 1 pode condicionar a interpretação do registo, já que facilmente conduz à ideia de que aquele número se refere ao total de cubos em cada coluna.

Relativamente a Luísa, a aluna construiu um paralelepípedo de duas camadas que regista da forma que é apresentada na Figura 15.



Figura 15. Registo de Luísa

Neste registo, a aluna procura mostrar a terceira dimensão da sua construção, colocando o número 2 em cada quadrado para fazer referência ao facto de ali estarem presentes dois cubos, embora um deles não se veja. Assim, desenha uma das vistas e representa simbolicamente o número total de cubos em cada espaço, parecendo conseguir coordenar a duas camadas de cubos (E5).

Tanto Luísa como Gil parecem ser capazes de coordenar as diferentes partes da construção, através do processo de relacionar, que, em ambos os casos, parece ser estruturada em camadas, e representar essas relações num registo 2D (mudar de dimensão). Esta estruturação em camadas que é registada sem serem visíveis todas as camadas tem inerentes os processos de visualizar e imaginar. É ainda de referir que o facto

de os alunos utilizarem um registo simbólico 2D coerente com a construção 3D parece ter por base o processo de modelar.

Discussão

Relacionar figuras 3D e registos permite aos alunos usar diferentes processos de raciocínio espacial, associados a *compreender* e *transformar*. Ao longo da nossa análise, verificámos que um processo permanente é mudar de dimensão e que este, por sua vez, implica localizar e relacionar. Muitos alunos recorrem ao processo de segmentar, pois aparentemente isso pode permitir-lhes compreender mais facilmente a construção. Em alguns casos, esta segmentação é uma forma de estruturar localmente a figura, consistindo em estabelecer e registar primeiramente um composto maior e depois outros componentes sem relação entre si. Noutros casos, a segmentação permite evidenciar as relações por camadas estabelecidas pelos alunos, na sua relação com o todo, revelando uma estruturação global.

Notamos que, em alguns casos, o registo parece ser interpretado ou desenhado atendendo à aparência global da construção, evidenciando que as relações entre registo e construção são ainda superficiais. Noutros casos, as relações espaciais registadas nem sempre são muito adequadas, uma vez que surgem erros de contagem do número de quadrados registados face ao número de cubos presente na construção e a forma como alguns desses quadrados são desenhados revela falta de coordenação, associada à estruturação local, como é o caso do registo de Sara. Este são aspetos cruciais no que respeita à estruturação espacial, tendo sido já discutidos por Battista e Clements (1996). Ainda relativamente à estruturação local, verificamos que alguns alunos utilizam como estratégia segmentar a construção. Esta segmentação surge com um composto maior correspondente à primeira camada da construção, complementando depois com o registo da segunda camada, desenhando, por exemplo, um quadrado enviesado (Luzia, na tarefa *Pentacubos*) para dar a ideia de estar num nível superior, como descrito por Sack e van Niekerk (2009), embora sem aparentemente haver uma relação muito consistente entre as partes e o todo no que respeita à manutenção das relações espaciais entre a construção e a representação 2D.

Já no caso de Gil, na mesma tarefa, o facto de o aluno desenhar uma primeira camada e, depois, para representar a segunda camada, desenhar quadrados mais pequenos dentro dos anteriores, parece revelar que a segmentação que faz tem implícitas relações espaciais adequadas que são explicitadas no registo, semelhantes à representação por camadas sugerida por Gutiérrez (1998). No entanto, no seu registo, Gil reúne as várias camadas interligadas. Aliás, esta estratégia de segmentar parece surgir também noutros registos da tarefa *Construções com cubos*, estando associada tanto à estruturação local como à estruturação global, dependendo do tipo de relações que os alunos estabelecem entre os diferentes segmentos. Isto é, quando os alunos desenharam apenas uma vista da construção,

as relações espaciais presentes no registo não refletem as relações presentes na construção 3D, estando, por isso, esse registo associado à estruturação local. No entanto, quando começam a tentar combinar duas vistas para representar as diferentes camadas, os alunos revelam estar já a tentar representar, no plano, relações espaciais que encontram nas figuras 3D. Também estas relações podem revelar ainda uma estruturação local como quando, por exemplo, Dalila desenha a vista de cima da sua construção e depois apenas a camada inferior na vista de frente. Já no caso de Gil e Luísa, a forma como registam parece ser reveladora das relações espaciais que estabelecem, conseguindo, de forma simbólica, representar essas relações.

No entanto, a relação entre construir e desenhar não é clara e existem desafios nesta tentativa de compreender as relações presentes nos registos dos alunos. Isto porque, por um lado, os alunos podem construir sem compreender que relações estão presentes, e, por outro, podem compreender que relações estão presentes, na construção 3D, e não conseguir transpô-las para um registo bidimensional. No entanto, o facto de os alunos conseguirem desenhar as construções, usando registos que evidenciem relações como cima/baixo parece ser indicador da compreensão dessas relações na figura 3D e na relação entre o 2D e o 3D. Por outro lado, os alunos que, por exemplo, registam um quadrado ao lado de outro quando, na construção 3D, está por cima, pode indiciar que essa relação espacial ainda não está bem presente ou que ainda não conseguem representá-la no plano. Isto revela a necessidade de discutir as ideias dos alunos para que estes possam refletir sobre e refinar as suas formas de registo e, ao mesmo tempo, tornar esses registos inteligíveis para todos, tal como refere Gutiérrez (1996), construindo-os de forma negociada. Por exemplo, a intervenção de Raquel mostra como é desafiante para os alunos o registo 2D de figuras 3D e a importância de aliar o registo à construção 3D, assim como a discussão das relações entre objeto e sua representação. A sua proposta de registar a segunda camada no verso da folha vai ao encontro do descrito por Nunes e Rodrigues (2018), quando uma das crianças nesse estudo utilizou precisamente essa técnica para registar a sua construção. A valorização de diferentes meios e recursos para comunicar permite que os alunos se expressem de diferentes formas, numa fase em que a natureza das ideias está associada a uma dimensão mais visual e menos baseada em propriedades e conhecimentos formais. Isto foi evidente quando, por exemplo, surgiu a necessidade de reconstruir as figuras 3D para compreender os registos e poder refiná-los. O facto de se estabelecer uma discussão com os alunos sobre possíveis formas de representação, como a codificação com números, parece ter contribuído para que Gil e Luísa refinassem o seu registo de construções com duas camadas, uma vez que, anteriormente, Gil desenhava quadrados mais pequenos dentro de quadrados maiores para evidenciar diferentes camadas e Luísa não apresentava um registo diferenciador para cada camada. Isto vem reforçar a importância de um ensino explícito que potencie a

progressão dos alunos de modos mais informais de registos para modos mais consistentes e explícitos.

Conclusões

No que respeita aos processos de raciocínio espacial evidenciados no registo de figuras 3D, verificamos a presença de processos associados a *compreender* e a *transformar*. Desenhar as construções permite aos alunos mudar de dimensão (*transformar*), mas também relacionar e reorganizar (*compreender*) a forma de estruturar as figuras. O processo de segmentar, muito presente nas duas tarefas, permitiu aos alunos estabelecer diferentes partes, mais simples, para depois as relacionar. A estruturação espacial, presente na forma como os alunos se apropriaram das construções e as registaram, parece ancorar-se em processos de raciocínio espacial, permitindo aos alunos compreender melhor a estrutura das figuras, mas também transformá-las, aprofundando essa compreensão.

Relativamente às estratégias de registo que os alunos utilizam para evidenciar relações espaciais presentes nas construções e ao tipo de estruturação que esses registos evidenciam, notamos a presença de dois grupos de registos, um mais associado à estruturação local e outro mais associado à estruturação global. No primeiro grupo, surgem com frequência registos em que um composto maior é registado sob a vista de cima, ao qual são associados os outros cubos da construção. Nem sempre a relação entre o composto e os cubos soltos e entre estes e o todo é evidente e coerente com as relações presentes na figura 3D. Nos registos associados à estruturação local, surgem ainda dificuldades como a duplicação ou omissão de cubos ou a falta de coordenação entre partes que são perpendiculares na construção.

No que respeita à estruturação global, verificamos que os alunos registam as suas construções segmentando-as por camadas, recorrendo a quadrados mais pequenos dentro de outros maiores para evidenciar camadas diferentes ou a formas simbólicas de representar, como a projeção ortogonal codificada. Nestes casos, os registos dos alunos revelam uma estrutura coerente entre as suas partes que por sua vez é também coerente com o todo.

A discussão dos registos ligados quer à estruturação local quer à estruturação global merece um lugar na sala de aula como forma de levar os alunos a aprofundar as relações espaciais que estabelecem e como forma de refletir sobre a inteligibilidade de determinados tipos de representação quando pretendemos que todos compreendam o que está representado. Nesta experiência de ensino não teria sido possível aceder às formas de raciocínio dos alunos se não tivessem sido colocados à sua disposição diferentes suportes e a possibilidade de os utilizarem nas suas comunicações. Verificámos que a articulação entre os desenhos e as construções 3D foi fundamental em muitos casos, especialmente aqueles

em que o registo poderia ser mais dúbio. A valorização do vocabulário dos alunos, ainda que muito limitado, e a atenção aos seus gestos permitiram-nos aceder à forma como pensaram.

Desta forma, parece-nos possível poder afirmar que a estruturação espacial é um processo fundamental no raciocínio espacial, mas que os próprios processos de raciocínio espacial parecem estar presentes na estruturação espacial, levando ao seu aprofundamento.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017) e através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (Projeto IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Referências

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). Reston, VA: NCTM.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258–292.
- Blanco, T., Godino, J., Sequeiros, P., & Mantecón, J. M. (2019). Skill levels on visualization and spatial reasoning in pre-service primary teachers. *Universal Journal of Educational Research*, 7(12), 2647–2661. <https://doi.org/10.13189/ujer.2019.071212>
- Bruce, C. D., & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: What is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 331–343. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0637-4>
- Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D., & Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning Geometry: Early foundations. *Quadrante*, 27(2), 7–31.
- Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In B. Davis (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139–150). New York: Routledge.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).
- Gutiérrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33–42). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193–220.
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 363–375. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0664-9>
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: Connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 511–517. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0696-1>
- Nunes, M. J., & Rodrigues, M. (2018). Compondo e desenhando formas tridimensionais: Um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos. *Quadrante*, 27(2), 63–88.
- Panorkou, N., & Pratt, D. (2009). Mapping experience of dimension. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281–288). Thessaloniki, Greece: PME.

- Radford, L., & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275–313). Rotterdam: Sense Publishers.
- Sack, J., & van Niekerk, R. (2009). Developing the spatial operational capacity of young children using wooden cubes and dynamic simulation software. In T. Craine & R. Rubinstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world: Seventy-first yearbook* (pp. 141-154). Reston: NCTM.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z., & Stephenson, C. (2018). Learning through and from drawing in Early Years Geometry. In K. Mix & M. T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 229-252). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_11
- Thom, J. S., & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): Observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 465–481.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam: Sense Publishers.