# Conocimiento de un profesor de Álgebra Lineal sobre los errores de los estudiantes y su uso en la enseñanza

## Knowledge of a Linear Algebra lecturer about students' errors and its use in teaching

**Diana Vasco Mora**
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
Ecuador
dvasco@uteq.edu.ec

**Nuria Climent Rodríguez**
Universidad de Huelva
España
climent@uhu.es

**Resumen.** A la luz del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) y mediante un estudio de caso investigamos el conocimiento sobre errores de los estudiantes de un profesor universitario cuando enseña el contenido de matrices y determinantes. Los datos fueron recogidos a través de videograbaciones de clases y entrevistas semiestructuradas realizadas durante dos períodos lectivos. La información recogida y transcrita fue analizada procurando evidencias que aludieran a la categoría Fortalezas y Dificultades del MTSK, y específicamente al conocimiento del profesor sobre errores de los estudiantes. Los resultados muestran un conocimiento del profesor de errores habituales en el aprendizaje del contenido que podrían tener diferentes orígenes, así como el uso que el profesor hace de ese conocimiento en la enseñanza y que se centra en la subsanación.
*Palabras-clave:* educación superior; estudio de caso; conocimiento de errores de los estudiantes; conocimiento didáctico del contenido; Álgebra Lineal.

**Abstract.** In the light of the *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) model and through a case study we investigate the knowledge of students' errors of a university lecturer when teaching the content of matrices and determinants. The data were collected through video recordings of classes and semi-structured interviews conducted during two school periods. The information collected and transcribed was analyzed looking for evidence that alluded to the category Strengths and Weaknesses in learning mathematics of the MTSK, and specifically to the lecturer's knowledge of students' errors. The results show a lecturer's knowledge of common errors in learning content that could have different origins, as well as the teacher's use of that knowledge in teaching and focusing on remediation.

*Keywords*: tertiary education; case study; knowledge of students' errors; pedagogical content knowledge; Linear Algebra.

Recebido em abril de 2020
Aceite para publicação em junho de 2020

## Introducción

En el estudio del conocimiento del profesor, el trabajo de Shulman (1986) es considerado un precursor, al reconocer que su conocimiento profesional engloba componentes específicas del contenido y de su enseñanza y aprendizaje. La investigación del conocimiento del profesor de matemáticas puede ser útil para cuestionar su formación, y diseñar e implementar tareas para la formación de profesores a partir del análisis de su conocimiento profesional (Ribeiro, Mellone, & Jakobsen, 2016). En este ámbito, el estudio del conocimiento del profesor universitario de matemáticas se presenta como una línea con potencial para ser investigada, despertando el interés de los investigadores y un incremento en las contribuciones presentandas en las conferencias de Educación Matemática (Biza, Giraldo, Hochmut, Khakbaz, & Rasmussen, 2016).

La comprensión del pensamiento de los estudiantes por parte del profesor y la capacidad de identificar sus errores tiene implicaciones en la enseñanza (Stewart & Reeder, 2017). Los profesores que reconocen que los alumnos pueden construir conceptos erróneos, son capaces de desarrollar estrategias para ayudarlos (Ashlock, 2010), siendo importante su conocimiento sobre posibles errores de los alumnos para generar explicaciones o aproximaciones al contenido desde la perspectiva de los estudiantes (Johnson & Larsen, 2012). En nuestra investigación no pretendemos determinar la presencia o ausencia de conocimiento del profesor o evaluar si es o no correcto. Más bien, nos preguntamos ¿Qué conocimiento sobre errores y dificultades de los estudiantes pone en juego un profesor universitario de Álgebra Lineal cuando enseña el contenido de matrices y determinantes?

En el caso de la enseñanza universitaria, la investigación viene reportando un cambio progresivo hacia un estilo centrado en el alumno, con un aumento en el descontento de los profesores hacia la lección magistral como único modo de enseñanza (Hurtado, Eagan, Pryor, Whang, & Tran, 2012; Johnson, Keller, & Fukawa-Connelly, 2018). Apoyar a los profesores universitarios en un cambio hacia una enseñanza que otorgue lugar al alumno, para que puedan superar prácticas con gran anclaje en sus instituciones (Iannone & Nardi, 2005) y su propia resistencia al cambio, supone un reto para la formación de profesores de matemáticas. El aumento de conocimiento sobre el pensamiento matemático de los alumnos ha mostrado relacionarse con una mejora en la instrucción también a nivel universitario (Andrews-Larson et al., 2019). Además, estudios relacionados con el uso del error en la enseñanza son relevantes para el diseño e implementación de programas de formación de profesores (González-López, Gómez, & Restrepo, 2015). Estudios como el nuestro, que abordan el conocimiento de profesores universitarios sobre errores de los alumnos y el uso de dicho conocimiento, pueden informar en el diseño de recursos para su formación.

## Antecedentes y fundamentación teórica

En los últimos años, se han desarrollado distintas caracterizaciones del conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas, como, por ejemplo, el *Knowledge Quartet* (Rowland, Husckstep, & Thwaites, 2005), *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames, & Phelps, 2008), y *Mathematical Proficiency for Teaching* (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008). Además, existen modelos relacionados con el conocimiento del profesor en álgebra (Artigue, Assude, Grugeon, & Lenfant, 2001; McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, 2012).

Para conceptualizar el conocimiento de un profesor de Álgebra Lineal nos hemos situado en el modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018), que considera especializado el conocimiento del profesor en su conjunto, por ser útil para la enseñanza de la matemática. En este sentido, el conocimiento especializado del profesor alude a la consideración de cómo se genera más que un tipo de conocimiento, destacándose su carácter complejo y de interacción entre sus componentes (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, & Pino-Fan, 2019).

Como argumentan Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020), el MTSK es apropiado para estudiar el conocimiento profesional de profesores de matemáticas universitarios porque no pretende diferenciar el conocimiento matemático del profesor del de otros profesionales o usuarios de la matemática. Esto parece consistente con las dificultades encontradas en algunos estudios para diferenciar conocimiento especializado y común (en el sentido de Ball et al., 2008) en el caso de profesores universitarios (Speer, King, & Howell, 2014). Además, el MTSK ha mostrado ser útil para explicar el conocimiento de profesores de matemáticas de distintos niveles preuniversitarios (Policastro et al., 2020; Rojas, Flores, & Carrillo, 2015; Sosa, Flores-Medrano, & Carrillo, 2015), así como universitarios (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2020; Locia-Espinoza, Morales-Carballo, & Merino-Cruz, 2020; Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes, & Ribeiro, 2016).

El MTSK (Figura 1) está conformado por los dominios: *conocimiento matemático*, *conocimiento didáctico del contenido*, y *creencias* sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, vistas estas últimas como elementos que permean el conocimiento. El dominio del conocimiento matemático se compone de tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la práctica matemática (KPM), y conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). A su vez, en el dominio del conocimiento didáctico del contenido también se diferencian tres subdominios: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En este documento referimos únicamente a los subdominios KFLM y KMT, con énfasis en una de sus categorías, por ser el interés de la investigación.

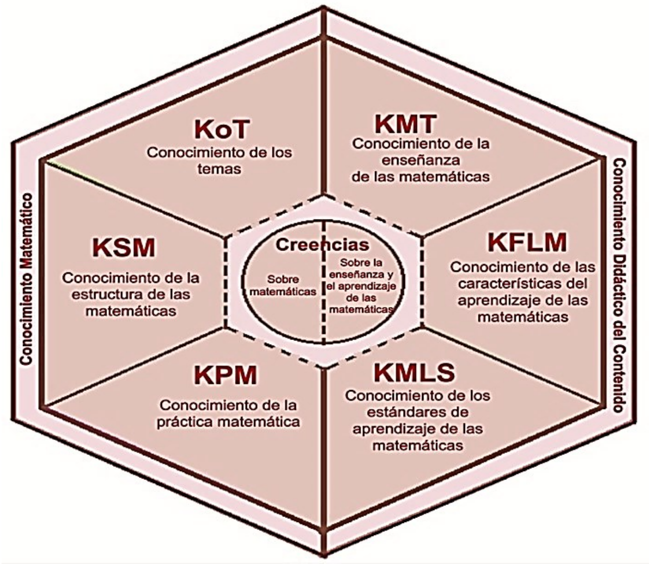


Figura 1. Dominios y subdominios del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (Traducción de Carrillo et al., 2018)

El *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* se centra en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, y hace referencia al conocimiento sobre cómo piensan los estudiantes y construyen conocimiento al abordar actividades matemáticas. Incluye las categorías: *Teorías de aprendizaje*, tanto personales como institucionalizadas, del desarrollo cognitivo de los estudiantes con relación a las matemáticas en general (como la teoría APOS, Arnon et al., 2014) o a un contenido específico; *Intereses y expectativas* de los estudiantes sobre un contenido matemático; *Formas de interacción con un contenido matemático*, procedimientos y estrategias (convencionales y no convencionales) que usan los estudiantes para hacer matemáticas, así como, la terminología empleada por estos para referirse a contenidos específicos; y *Fortalezas y dificultades*, concerniente al conocimiento del profesor de los errores, áreas de dificultad, conceptos erróneos, o fortalezas de los alumnos, tanto en general, como en un contenido específico.

Ya que nuestro interés es el estudio del conocimiento del profesor sobre los errores de los estudiantes, esta última categoría denominada *Fortalezas y dificultades* es en la que se sitúa nuestra atención en esta investigación, específicamente en lo que concierne a la parte de dificultades, donde estaría inmerso el estudio del conocimiento del error por parte del profesor. Además, investigamos el uso que hace el profesor de ese conocimiento del error en la enseñanza, lo que se relaciona con el subdominio del MTSK *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas*, que incluye el conocimiento del profesor del uso de ejemplos potentes para enseñar un contenido específico.

Bajo la luz del modelo MTSK en un estudio previo relacionado con el conocimiento del profesor sobre errores y dificultades de los estudiantes en Álgebra, se registró el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) de dos profesoras de bachillerato sobre ideas erróneas de los estudiantes derivadas de relacionar contenidos actuales con contenidos previos (por ejemplo, considerar que el producto de matrices ha de ser conmutativo como el de números reales), y errores por no respetar las convenciones matemáticas respecto del producto de matrices y propiedades de los determinantes (Sosa et al., 2015). Como en este estudio, el nuestro se centra en la enseñanza del contenido de matrices y determinantes.

## Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

En algunos estudios pareciera que error y dificultad se manejan como sinónimos, pero detrás de ambos términos se teje un sustento teórico que conlleva a varios posicionamientos. De forma general, Matz (1980), indica que "los errores son intentos razonables pero no existosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación" (p. 94). El autor sostiene que, al resolver tareas algebraicas, los errores de los estudiantes pueden ser intentos de adaptar conocimientos previos a nuevas situaciones.

El error puede ser considerado no solamente como consecuencia de una falta de conocimiento o un despite, sino como la presencia en el estudiante de un esquema cognitivo inadecuado, que aparece cuando se enfrenta a situaciones que lo obliga a revisar lo que sabe. Es posible caracterizar los errores de los alumnos en relación con tres orígenes: a) *errores que tienen su origen en un obstáculo*, considerado como un conocimiento adquirido que el alumno utiliza para producir respuestas adaptadas en un nuevo contexto en el que no funciona; b) *errores que tienen su origen en una ausencia de sentido*, que se pueden diferenciar en errores del Álgebra que tienen su origen en la aritmética (fracciones, uso de paréntesis, etc.), errores de procedimientos (uso inapropiado de fórmulas, reglas y propiedades) y errores del Álgebra que se deben a las características propias del lenguaje algebraico; finalmente c) *errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales* (excesiva confianza, bloqueos, olvidos, etc.) (Ruano, Socas, & Palarea, 2008; Socas, 2007).

Las dificultades, por su parte, pueden conectarse en redes complejas que en la práctica se concretan como obstáculos y se manifiestan en los alumnos como errores. Para describir la procedencia de dichas dificultades se emplean categorías asociadas a la propia disciplina, a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de enseñanza y al desarrollo cognitivo de los alumnos (Socas, 2007).

Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, que pueden deberse a diferentes causas y que surgen en un marco de conocimientos adquiridos previamente. Es a partir de un error que el estudiante puede aprender distintas propiedades de un concepto, del que antes no era consciente (Rico, 1998).

## Errores y dificultades de los estudiantes en relación con el Álgebra Lineal

Es reconocido que el aprendizaje del Álgebra Lineal es difícil para la mayoría de los estudiantes en la universidad (Dorier, 2016), por ser una disciplina demandante desde el punto de vista cognitivo, que requiere que el estudiante sea capaz de moverse entre diferentes lenguajes (teoría de matrices y teoría de los espacios vectoriales), puntos de vista cartesiano y paramétrico, y registros semióticos (Dorier & Sierpinska, 2001).

Específicamente en el caso de las matrices y determinantes, los alumnos preuniversitarios de 2.° curso de Bachillerato presentan errores como: confusión entre la notación y concepto de matriz y determinante; para plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss; aplican incorrectamente resultados teóricos (sobre todo cuando se trata del teorema de Rouché-Fröbenius y las propiedades de los determinantes); y si tienen que desarrollar un determinante por una columna, realizan bien el cálculo si en la columna de ceros el otro elemento es un 1, pero se equivocan si aparece un número distinto de 1, probablemente debido al abuso de problemas “tipo” (Ferro, 2011).

Por su parte, Barros, Mendes, y Fernandes (2013) clasifican las principales dificultades de estudiantes universitarios de ingeniería al operar con matrices:

1. Dificultades en las operaciones con matrices – multiplicación incorrecta, dificultades para reconocer las condiciones para efectuar el producto, deducción incorrecta de la dimensión de la matriz producto.
2. Análisis incompleto – los estudiantes analizan solo una parte de una expresión dada.
3. Recurrir a propiedades no válidas, que parecen ser una adaptación de propiedades válidas en otros contextos.
4. Incomprensión de conceptos, como el de dimensión de una matriz.
5. Recurrir a válidos argumentos, pero irrelevantes para la situación a la que se aplican.

Volviendo a la idea de la confusión de los estudiantes con la notación de los objetos matemáticos, en el desarrollo de la asignatura de Álgebra Lineal, los estudiantes pueden no dar importancia a los símbolos e incluso incurrir en errores algebraicos. En este sentido, autores como Harel, Fuller, y Rabin (2008) indican que los alumnos manipulan símbolos sin una base significativa, o cometen errores algebraicos del tipo $(a + c)^2 = a^2 + c^2$ (Stewart & Reeder, 2017).

## El uso de los errores en la enseñanza

Como hemos señalado, los errores se consideran una parte importante del aprendizaje matemático, y el uso de los errores en la enseñanza está siendo investigado, considerando que una de las tareas principales de un profesor de matemáticas es reconocer y responder de forma apropiada a los errores de los estudiantes (NCTM, 2000).

Específicamente, en el campo de la formación de profesores de matemáticas de secundaria, González-López et al. (2015) refieren el uso del error organizándolo según tres propósitos generales en las actividades de planificación del profesor: superar el error, evaluar el conocimiento de los estudiantes y producir información útil para la planificación.

En Borasi (1994) se presenta un experimento de enseñanza en el que el error es usado como detonante para la indagación por parte del propio alumno. Se establece una taxonomía de usos del error como detonante para la indagación en la que se diferencian dos dimensiones: la perspectiva de aprendizaje y el nivel del discurso matemático. En la primera dimensión se contempla que se persiga la subsanación del error, el descubrimiento o la investigación; en la segunda, que el foco se ponga en la resolución de una tarea, la comprensión de algún contenido matemático o de la naturaleza de la matemática. Considerando las combinaciones de las posibilidades diferenciadas en las dos dimensiones señaladas, se describen seis posibles usos del error. Nótese que en este estudio se considera el uso del error en el aprendizaje, mientras que en el citado de González-López et al. (2015) su uso es por parte del profesor.

En el mismo ámbito de la formación de profesores, Son (2013) reporta cómo 57 profesores en formación de primaria y secundaria interpretan errores de estudiantes en una tarea sobre la proporción y las relaciones entre su conocimiento matemático y didáctico. Diferencian tres usos del error: *uso activo* (proporcionar oportunidades para discutir y probar por qué el método usado por el estudiante no funciona), *uso intermedio* (el error se aborda como un escalón para corregir), y *uso poco frecuente* (observación declarativa sobre el error del estudiante y proporción de la respuesta correcta). Se concluye que existe una relación compleja entre el conocimiento del contenido de los profesores y sus prácticas de enseñanza (aquellos que presentaron un conocimiento conceptual – con comprensión de los fundamentos y relaciones entre contenidos –, no necesariamente hicieron un uso activo del error en la enseñanza, prefiriendo enseñar matemáticas de forma procedimental).

Nardi, Jaworski, y Hegedus (2005), en relación con la conceptualización por parte de tutores universitarios de errores de los estudiantes y su forma de abordarlos, describen un continuo en el que se diferencian 4 niveles, que se pueden relacionar con los usos poco frecuente, intermedio y activo (niveles I, II, y III y IV, respectivamente) de Son (2013):

I. *Ingenuo y despreciativo*, que presta poca atención al origen de las dificultades de los estudiantes o a aproximaciones a la enseñanza que posibiliten a los estudiantes superar sus dificultades, con tendencia a describir las dificultades de los estudiantes de forma general (por ejemplo, asociándolas a falta de esfuerzo o a experiencias de aprendizaje previas).

II. *Intutitivo y cuestionador*, en el que se identifica cierto reconocimiento de las dificultades de los estudiantes y cuestionamiento sobre qué aproximaciones podrían ayudarlos. Su análisis de las dificultades no siempre va más allá de un reconocimiento sensible de estas pero algunas veces parece llevar a una reconsideración de su papel. Por ejemplo, tratan de desentrañar expresiones "con truco". Comparado con el nivel I hay un intento de centrarse en dificultades específicas y diseccionarlas con cierta profundidad y agudeza, lo que les sirve para justificar sus estrategias pedagógicas (que pueden consistir, por ejemplo, en explicar e intentar transmitir el sentido de una notación).

III. *Reflexivo y analítico*, en el que se evidencia un reconocimiento más claro que en los niveles anteriores sobre los retos de la enseñanza relativos a las dificultades de los estudiantes y análisis de posibilidades para abordarlos. Entre los ejemplos de conceptualizaciones de errores de los estudiantes que asocian a este nivel se encuentra el reconocimiento de ideas erróneas específicas de los estudiantes en Álgebra Lineal como que la suma de dos subespacios vectoriales es lo mismo que su unión y la identificación del daño potencial de advertir sobre errores que no son evidentes aún en el trabajo del estudiante (creen que advertir a los estudiantes sobre posibles ideas erróneas que no han aflorado es una forma de propagar malas ideas). Entre las estrategias consideradas para abordar las dificultades de los estudiantes se sitúan algunas para que estos construyan una imagen conceptual rica de los nuevos conceptos, por ejemplo, usando el profesor ejemplos genéricos.

IV. *Confiado y articulado*, que involucra reconocimiento y articulación de las dificultades de los estudiantes con ciertas estrategias bien pensadas para abordarlas, reconocimiento de las cuestiones problemáticas y crítica de la práctica.

## Metodología

Este trabajo fue desarrollado bajo un diseño de estudio de caso instrumental (Stake, 2008), con enfoque cualitativo (Neuman, 2014). En este artículo centramos la atención en Jordy (nombre ficticio), uno de los dos profesores universitarios de Álgebra Lineal estudiados en Vasco (2015). El profesor, que imparte un módulo de Álgebra Lineal en una carrera de Ingeniería en una universidad ecuatoriana, es licenciado en Ciencias de la Educación (especialidad en Matemáticas) y lleva más de seis años dedicado a la enseñanza de Álgebra Lineal. Es, además, profesor de secundaria, y fue elegido por su experiencia en la asignatura, y su formación para la enseñanza de matemáticas (frente a otros perfiles con formación exclusivamente disciplinar). Jordy ha recibido varios cursos relacionados con didáctica de la matemática, posee un máster en ciencias ambientales y actualmente cursa otro sobre investigación en matemáticas.

El programa de estudio (sílabo) de Álgebra Lineal en la universidad en que trabaja este profesor es elaborado por el coordinador de carrera, y el docente tiene la libertad de hacer cambios (introducir tareas, prácticas, nuevos contenidos, cambiar el orden de los contenidos existentes), manteniendo siempre los contenidos mínimos establecidos en el diseño de la carrera.

La información para nuestro estudio fue obtenida a través de grabaciones en vídeo y entrevistas. Se grabaron 13 sesiones de clases observadas durante dos períodos lectivos consecutivos (sete sesiones en el primer período y seis en el segundo), configurando el conjunto de lecciones que Jordy impartió en los dos periodos sobre el tema de matrices y determinantes. La cámara, que se movía constantemente captando las interacciones en el aula (profesor y alumno o entre alumnos) se dispuso en la parte posterior del salón de clases, enfocando el escritorio del profesor y la pizarra. Los alumnos permanecían sentados individualmente, y el profesor se situaba en frente de ellos, especialmente en el área donde se encontraba la pizarra desde donde se dirigía a los estudiantes, y en ocasiones se movía entre sus mesas. Las videograbaciones fueron realizadas por la primera autora de este estudio, que se desempeña además como docente en la misma institución educativa.

La misma investigadora que realizó las grabaciones de aula fue la encargada de conducir cuatro entrevistas semiestructuradas, la primera realizada de forma previa, y las otras tres efectuadas una vez finalizadas todas las vídeograbaciones (dos en cada período lectivo). La finalidad de las entrevistas fue que el profesor explicara algunas de las acciones que realizó en la clase y sus justificaciones, de cara a validar el conocimiento extraído en el análisis de las grabaciones. El guión de las entrevistas se construyó con base en el análisis previo de las clases transcritas. La entrevista 1 fue introductoria para obtener información general sobre el profesor (años de experiencia en la enseñanza de matemáticas, años impartiendo Álgebra Lineal, formación profesional, cursos de formación y expectativas). Las entrevistas 2 a 4 fueron efectuadas para obtener información adicional a la registrada en las vídeograbaciones que nos permitiera sustentar el análisis.

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación (¿Qué conocimiento sobre errores y dificultades de los estudiantes pone en juego un profesor universitario de Álgebra Lineal cuando enseña el contenido de matrices y determinantes?) hemos analizado los episodios de sesiones de clases y las entrevistas semiestructuradas a través de un análisis de contenido (Bardin, 1996). El procedimento de análisis consistió en que, una vez realizadas las grabaciones en vídeo de las sesiones y entrevistas, se transcribió toda la información, buscando evidencias que aludieran a la categoría *Fortalezas y dificultades* del MTSK, y, específicamente al conocimiento del profesor sobre errores de los estudiantes, enmarcado en el subdominio Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). De esta forma, obtuvimos evidencias de conocimiento del profesor sobre los errores de los alumnos. Una vez obtenidas las evidencias, identificamos en cada una de ellas: el contenido sobre el que versaba (por ejemplo, multiplicación de matrices), el error concreto que el profesor mostraba conocer, si el profesor analiza el origen del error y en caso afirmativo cual es su análisis, y el uso que hace del error. Posteriormente, asociamos las distintas evidencias a los niveles del marco de Nardi et al. (2005), por la especificidad del error detectado, su análisis y su uso, y a los tipos de error por el origen que les asocia

(Ruano et al., 2008). Asimismo, las relacionamos con el propósito del uso del error (González-López et al., 2015), el nivel de aprendizaje matemático a que se refiere y la perspectiva de aprendizaje (Borasi, 1994) y al uso activo, intermedio o poco frecuente, en términos de Son (2013).

## Resultados y discusión

Jordy evidencia conocimiento enmarcado en la categoría de fortalezas y dificultades (KFLM) de los estudiantes, al advertirles de posibles errores en el transcurso de su explicación de la multiplicación de una matriz por un escalar, donde hace alusión a que deben tener en cuenta los signos del escalar y de los elementos de la matriz para no cometer errores (Sesión 1, Período 1, Episodio 3); así como en el caso del producto de matrices, que se muestra en el siguiente episodio.

> Jordy: Antes de que haga la multiplicación revise [...] Los primeros factores deben ser de las filas de la primera matriz y los segundos factores son las columnas [...]. Pase a resolver AxD. **La ubicación de los factores es para que usted se equivoque menos**. Si de pronto usted dice: no, yo puedo hacerlo directamente, pues hágalo. [...] si no es posible realizar el producto, escriba que no se puede hacer. **Siempre es bueno definir las dimensiones de las matrices para evitar algún tipo de error en el producto** (Sesión 2, Período 1, Episodio 1).

El profesor hace hincapié a sus estudiantes en que para realizar el producto de matrices tienen que fijarse en las dimensiones de estas y en los términos cuya multiplicación da lugar a cada elemento de la matriz producto ("La ubicación de los factores es para que usted se equivoque menos", en negrita en el episodio anterior).

En una entrevista, donde le pedimos describir los posibles errores que pueden cometer los estudiantes al realizar esta operación, declara:

> Jordy: El error primero es [...] que piense que hay que multiplicar número por número según la posición en que está. Entonces, en la multiplicación de matrices, yo suelo insistir en las dimensiones [...]. Si yo tengo dos matrices cuadradas, pueden sacar resultado matriz 2x2, que es lo lógico, pero **pueden hacer lo mismo de la suma**, multiplican los elementos que corresponden en cada matriz según su posición y sacan una matriz 2x2. Obviamente tiene error [...], **suelen equivocarse en eso cuando no tienen claro el concepto o la definición de una operación** (Entrevista 3, Período 2).

El profesor muestra conocer los errores habituales en este tema, destacando, por una parte, el no considerar las dimensiones de las matrices para realizar el producto, y por otra, que realicen la multiplicación igual que la suma. Identifica, además, dos causas de estos errores: no tener clara la definición de la operacion o hacer una falsa generalización de la suma al producto de matrices (Entrevista 3, Período 2, destacado en negrita). El análisis de los errores, por su especificidad y mostrando un intento de diseccionarlos con cierta agudeza, lo situamos en el nivel II de Nardi et al. (2005), considerando, además, que el reconocimiento de situaciones de generalización de procedimientos de unos contextos a otros puede mostrar un avance hacia el nivel III de estos autores. Su uso de ese conocimiento, para aconsejar a los estudiantes que definan primero las dimensiones de las matrices y procedan con cuidado, se situaría también en el nivel II (basado en trucos o recetas para superarlos). Por otro lado, considera que los errores que tienen su origen en un obstáculo y en una asusencia de sentido (Ruano et al., 2008).

Cuando Jordy aborda las matrices escalonadas, también hay indicios de su conocimiento sobre errores, como se ve en este episodio:

Jordy: Ahora quiero que miren acá a la pizarra, tenemos las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ¿Qué pasa en la primera matriz? ¿Qué le ven de especial? Primero no son cuadradas, ¿Qué tienen de especial?

Estudiante: Un poco de ceros

Jordy: ¿Qué pasa con los ceros?

Estudiante: Van aumentando

Jordy: Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las filas, lo importante es que haya ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila. Este tipo de matrices se llaman escalonadas, va como una escalera, y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o, hasta tener todas las filas ceros. A estos elementos, que son los primeros elementos en cada fila diferentes de cero, se les conoce como elementos distinguidos de fila. Solamente habrá un elemento distinguido por fila, **no importa si después hay ceros** [pregunta por los elementos distinguido de las matrices B y C y los alumnos responden] ... Hay otro tipo de matriz que se llama de la forma canónica. [...] es aquella cuyos elementos distinguidos son unos y en su columna es el único número diferente de cero, son las dos condiciones (Sesión 3, Período 1, Episodio 2).

Le preguntamos al profesor sobre su intencionalidad al escribir estos ejemplos de matrices escalonadas y nos contestó lo siguiente:

Jordy: La intención era escribirles tres matrices diferentes y cada una escalonada a su manera. Si te das cuenta, la última no tiene elementos diferentes de 0 en la primera columna, y la segunda no tiene elementos diferentes de 0 en la tercera fila, pero ambas son escalonadas, incluso no es cuestión de que vayan seguidos los números, sino que puede haber una diferencia de varios números en el escalonamiento de una matriz. Escribí esas **matrices para que los estudiantes se den cuenta de que hay diferentes clases de matrices escalonadas y qué es lo fundamental de**

> **ellas**, porque pueden cometer errores y pensar que es una matriz escalonada cuando no lo es (Entrevista 3, Período 2).

El profesor conoce que los estudiantes podrían no fijarse en todas las posibilidades de matrices escalonada, creándose una imagen restrictiva de esta. Dicho conocimiento sobre fortalezas y dificultades (KFLM) le permite a Jordy planificar el uso de tres ejemplos que pretenden mostrar las características genéricas de las matrices escalonadas ("qué es lo fundamental de ellas", en negrita en el episodio anterior). El profesor muestra así su conocimiento de ejemplos para la enseñanza de este contenido (KMT), un conocimiento en el que se aprecia el cuidado en la elección de los ejemplos concretos (matrices no cuadradas, con posibilidad de escalonamiento no consecutivo, y de primera columna o última fila toda de ceros). Este tratamiento del error, ligado a ejemplos genéricos y que conlleva una consideración aunque sea implícita de la imagen del concepto que se forman los estudiantes, es puesto como ejemplo en Nardi et al (2005) de nivel III.

Relacionado con el cálculo de la matriz inversa obtenida por $A \bullet A^{-1} = I$, se registró el conocimiento del profesor concerniente a errores en este caso cometidos por los estudiantes en el aula, al denotar incorrectamente una matriz (A), su inversa ($A^{-1}$) y la matriz identidad (I), tal como se observa en este episodio:

Jordy: Errores que no deben cometer. Están escribiendo la matriz A, ponen igual y escriben todo esto A= $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Esto no es cierto, **no es cierto que A es igual a todo eso. No se trata de escribir signos en cualquier parte. Lo correcto es que A está multiplicada por su inversa ($A^{-1}$) y que eso es igual a la matriz identidad (I).** (Sesión 3, Período 1, Episodio 2).

El profesor advierte a los estudiantes que deben denotar correctamente las tres matrices y usar correctamente el signo igual, haciendo referencia a la propiedad que justifica el procedimiento ($A \bullet A^{-1} = I$) (negrita en la última unidad). Esta estrategia para abordar el error, explicar e intentar transmitir el sentido de una notación, es asociada en Nardi et al. (2005) al nivel II.

El conocimiento del profesor sobre errores en la notación también se hace evidente cuando se refiere a la diferenciación de distintos objetos matemáticos, en este caso el valor absoluto, una matriz y un determinante, como se observa en el comentario siguiente que tuvo lugar después de que un alumno pasó a la pizarra a encontrar el determinante de una matriz.

Jordy: Hay que tener cuidado [...] y no escribir signos y rayas en cualquier parte porque **hay algunos signos en matemáticas que tienen significado**; entonces tú pones ahí un par de barras en el resultado [del determinante], lo que hizo usted, y eso significa valor absoluto. El -2 entre esas barras si es valor absoluto vale 2 [el resultado del cálculo del determinante fue -2, y el estudiante lo escribió como |-2 |], porque el valor absoluto siempre es

> positivo, coloque los símbolos donde deben estar. Si va a calcular el determinante no le ponga paréntesis, hay que poner barras. Ahí como está eso es una matriz, pero si va a calcular el determinante hay que poner barras en lugar del corchete o de paréntesis, tomemos eso con cuidado para tener claro los conceptos, **si no usted se confunde y confunde al resto** (Sesión 7, Período 1, Episodio 3).

En este caso Jordy corrige a un estudiante un error de notación. En ese sentido, explica lo que indica cada notación (determinante, matriz y valor absoluto) y el sentido de la notación matemática (diferenciar objetos matemáticos y posibilitar la comunicación) (esto último en negrita en el episodio anterior), ejemplos en Nardi et al. (2005) del nivel II en el abordaje de los errores.

El profesor hace constantes advertencias sobre los errores en la aplicación de procedimientos y propiedades para obtener determinantes, adelántadose a los mismos. Por ejemplo, Jordy conoce que cuando se calcula el determinante por la regla de Sarrus o por el método del menor y cofactores, para los estudiantes es común confundir el signo de los productos porque pueden olvidar que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan (Sesión 5, Período 1, Episodio 2).

Otros errores los asocia a generalizar situaciones con matrices a los determinantes, como errores al intercambiar filas en el cálculo de un determinante, pensando en su equivalencia como en el caso de una matriz (Sesión 4, Período 2, Episodio 1), o aplicar en la multiplicación de un escalar por un determinante el mismo procedimiento que cuando se multiplica un escalar por una matriz, tal como se evidencia en el episodio siguiente.

Jordy: Si hay un escalar aquí, como el que estamos colocando allí, entonces este dos iría en esta parte $2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8 + 3) = 2(11) = 22$ ¿Qué significa este 2 que está allí? **Ese 2 afecta no como en las matrices a todos los elementos, afecta solamente a una fila o a una columna**. Por ejemplo, si yo quisiera multiplicar este escalar por el determinante, multiplicamos por la primera fila y colocamos 4 y -2, la otra fila queda igualita, entonces resolviendo esto $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6 = 22$. Anote bien eso, un escalar al multiplicarse por un determinante, ese escalar solo multiplica a una fila o a una columna, o sea, no a todos los elementos. ¿Qué puede hacer aquí en este caso? Puedo sacar el factor común, si yo saco factor común de una fila, lo pongo aquí como factor del determinante y regreso a lo que tenía al principio $2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ Es algo importante que hay que saber, **no es lo mismo trabajar con determinantes que trabajar con matrices** (Sesión 4, Período 2, Episodio 1).

En el caso de la unidad anterior observamos algunas coincidencias con un episodio mostrado anteriormente (Sesión 2, Período 1, Episodio 1), en cuanto al análisis del error;

por un lado, por la especificidad en la descripción del mismo, y por otro, por la identificación de la generalización de procedimientos de un contexto a otro (con lo que en términos de Socas (2007) estaría identificando errores con origen en un obstáculo). Como en esa unidad, el análisis de los errores en términos del trabajo de Nardi et al. (op. citada) se situaría en el nivel II avanzando hacia el nivel III. El abordaje del error, por su parte, advertencia de posibles errores, adelantándose a los mismos y mostrándoles con una comprobación que el procedimiento con determinantes no es igual que con matrices, al desentrañar el procedimiento se situaría desde nuestra perspectiva en el nivel II.

Si tomamos en consideración el abordaje de los errores por parte de Jordy, observamos que en todos los casos el propósito que les otorga en la enseñanza es el de la superación de los mismos (González-López et al., 2015) o subsanación en términos de la perspectiva de aprendizaje de Borasi (1994), si bien aquí se trata de una subsanación directa por parte del profesor. Si consideramos la dimensión de nivel del discurso matemático de esta última autora, podemos diferenciar sin embargo subsanación para clarificar ideas erróneas en relación con un contenido matemático (como en las evidencias anteriores relativas a errores en la multiplicación de matrices o a la matriz escalonada), o en relación con la naturaleza de la matemática o cuestiones matemáticas generales (como las evidencias relativas a la notación). En cuanto al uso del error según la diferenciación de Son (2003) lo catalogamos en un uso intermedio, al usarse como una herramienta para corregir, superándose la simple detección verbal del error y proporción de la respuesta correcta, y sin llegar a que este sirva para proponer oportunidades para discutir activamante los errores.

## Conclusiones

Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, que pueden tener diferentes causas y que surgen en un marco de conocimientos adquiridos previamente (Rico, 1998). En nuestro estudio, Jordy a lo largo de su experiencia ha observado cómo aprenden los estudiantes y muestra conocimiento sobre sus posibles errores.

Algunos de los errores que muestra conocer han sido constatados en la investigación como errores habituales en el aprendizaje de estos contenidos. Es el caso de las dificultades en la multiplicación de matrices y en reconocer las condiciones en que es posible realizar el producto, o recurrir a propiedades (o procedimientos) no válidas que parecen haberse adaptado de situaciones donde lo eran (como en el caso de la multiplicación de un escalar por un determinante) (Barros et al., 2013); al multiplicar un escalar por una matriz (Sosa et al., 2015); y con la notación de matrices y determinantes (Ferro, 2011; Harel, 2008). Estos son errores específicos de la interacción de los alumnos con distintos contenidos.

Junto con la especifidad señalada, Jordy muestra haber hecho un análisis de algunos de estos errores, identificando su origen en generalizaciones inadecuadas de procedimientos válidos en otros contextos, en incomprensión de conceptos o ausencia de significado. Estos orígenes reflejan el reconicimiento de errores que tienen su origen en un obstáculo o en ausencia de sentido (Ruano et al, 2008). La especificidad en la descripción del error y el análisis de sus causas con cierta agudeza son para Nardi y colaboradores (op. citada) muestras de un nivel intermedio en la conciencia sobre errores de los alumnos en el caso de profesores universitarios (encontrándose evidencias de los niveles II y III, como hemos argumentado en el epígrafe anterior).

Por otro lado, hemos identificado diferentes usos de ese conocimiento por parte del profesor: aconsejar a los alumnos pautas para realizar un procedimiento, mostrarles con una comprobación que un procedimiento no es trasladable de un contexto a otro, explicar e intentar transmitir el sentido de una notación o en general el uso de la notación en matemáticas, y planificar la enseñanza de un contenido seleccionando cuidadosamente ejemplos que pretenden ser genéricos. Si bien los usos anteriores se sitúan en contextos de corrección directa del error o de advertencia sobre el mismo que se adelanta a que surjan, toma en consideración el error y este fundamenta sus estrategias pedagógicas (lo que para Nardi et al., 2005, corresponde mayoritariamente a un nivel II de uso del error, situándose el uso de ejemplos genéricos en el nivel III). Este uso de ejemplos genéricos muestra a su vez, relaciones entre su conocimiento de errores y de estrategias de enseñanza.

De lo anterior extraemos que el conocimiento del error por parte del profesor, que como hemos argumentado presenta cierta profundidad, si bien muestra ser incorporado a la enseñanza, no deriva en un planteamiento que permita que sea el alumno el que cometa los errores y construya conocimiento a partir de ellos (Borasi, 1994). Estos resultados van en la línea de los citados en el marco teórico del estudio de Son (2013), donde un rico conocimiento del contenido por parte del profesor no derivaba necesariamente en uso activo del error en la enseñanza. Este hecho quizás pueda deberse al peso de la tradición de la lección magistral en la enseñanza univeritaria (Iannone & Nardi, 2005).

Nuestro estudio muestra cómo profesores universitarios evidencian y usan conocimiento sobre los errores habituales de los estudiantes (en este caso en Álgebra Lineal), aunque no hayan recibido formación específica sobre los mismos. Aportamos, además, un ejemplo de un profesor con un posicionamiento intermedio en cuanto al análisis del error y a su vez un uso del mismo que se centra en la subsanación más que en la construcción activa por parte del alumno. De ejemplos como este podemos apreciar la complejidad de las relaciones entre conocimiento y práctica del profesor y la variedad de posibles lugares intermedios entre ignorar el error en la enseñanza y abordarlo constructivamente.

Tanto las posibles limitaciones que se ponen de manifiesto para un cambio en el nivel universitario hacia una enseñanza basada en la indagación, como los episodios y conocimiento mostrado por Jordy pueden ser usados en el diseño de actividades formativas para el profesorado universitario de matemáticas.

## Referencias


Andrews-Larson, C., Johnson, E., Peterson, V., & Keller, R. (2019). Doing math with mathematicians to support pedagogical reasoning about inquiry-oriented instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09450-3

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., & Lenfant, A. (2001). Teaching and learning Algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (pp. 21-32). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Ashlock, R.B. (2010). *Errors patterns in computation: Using error patterns to improve instruction.* Boston: Allyn & Bacon.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido.* Madrid, España: Ediciones Akal.

Barros, P., Mendes, C., & Fernandes, J. A. (2013). Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 295-308). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level: State-of-the-art and looking ahead.* Berlin: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-41814-8_1

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 567-587.

Dorier, J. L. (2016). Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Eds.), *Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline.* Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel. Retrieved from https://archive-ouverte.unige.ch/unige:85576

Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ferro, P. (2011). *Significado referencial y evaluado de los conceptos de matriz y determinante en estudiantes preuniversitarios. Un estudio a partir de la práctica instruccional* (Disertación doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, España). Recuperado de http://dspace.usc.es/bitstream/10347/4035/1/rep_168.pdf

González-López, M. J., Gómez, P., & Restrepo, A. M. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación, 370*, 71-95. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-370-297

Harel, G., Fuller, E., & Rabin, J. (2008). Attention to meaning by algebra teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 116-127.

Hurtado, S., Eagan, K., Pryor, J. H., Whang, H., & Tran, S. (2012). *Undergraduate teaching faculty: The 2010–2011 HERI faculty survey*. Recuperado de: https://www.heri.ucla.edu/monographs/HERI-FAC2011-Monograph.pdf

Iannone, P., & Nardi, E. (2005). On the pedagogical insight of mathematicians: 'Interaction'and 'transition from the concrete to the abstract'. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 191–215.

Jonhson, E., & Larsen, S. P. (2012). Teacher listening: The role of knowledge of content and students. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 117-129.

Johnson, E., Keller, R., & Fukawa-Connelly, T. (2018). Results from a national survey of abstract algebra instructors: Understanding the choice to (not) lecture. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(2), 254–285.

Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A., & Merino-Cruz, H. (2020). Taylor's formula, limited development, and development of power Series: A study of the knowledge of university professors in training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0585. https://doi.org/10.29333/iejme/7852

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Nardi, E., Jaworski, B., & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From "tricks" to "techniques". *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 284–316.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neuman, W. L. (2014). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches.* Harlow: Pearson Education Limited.

Policastro, M. S., de Almeida, A. R., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years* (pp. 263-279). Cham, Switzerland: Springer.

Ribeiro, M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpreting students' non-standard reasoning: Insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics, 36*(2), 8-13.

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In J. Kilpatrick, L. Rico, & P. González (Eds.). *Educación matemática* (pp. 69-109). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143-166.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory proficiency in teaching mathematics. In T. Wood & D. Tirosh (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). London: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las natemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. In M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics 84,* 49-70. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

Speer, N., King, K., & Howell, H. (2014). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122.

Stake, R. E. (2008). Qualitative case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 119-149). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stewart, S., & Reeder, S. (2017). Algebra underperformances at college level: What are the consequences? In S. Stewart (Ed.), *And the rest is just Algebra* (pp. 3-18). Switzerland: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_1

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de Álgebra Lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario* (Disertación doctoral, Universidad de Huelva, España). Disponible en http://hdl.handle.net/10272/11901

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de Álgebra Lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11