O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação

The knowledge of future teachers about mathematical reasoning processes before and after a teacher education course

William Vieira
Instituto Federal de São Paulo – IFSP
Brasil
wvieira@ifsp.edu.br

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Portugal
margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo. Este artigo insere-se no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores (REASON) que tem como objetivo estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento, através de uma metodologia de Investigação Baseada em Design. Propomo-nos discutir o conhecimento de futuros professores sobre o raciocínio matemático e os seus processos, antes e após uma experiência de formação. Para atingir este objetivo, analisamos os dados relativos a processos de raciocínio presentes em duas questões de uma tarefa, usada como pré-teste e pós-teste, e aplicada numa turma de 1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico. Os processos de raciocínio analisados neste artigo são generalizar, justificar, exemplificar e classificar. Foi realizado um tratamento quantitativo das respostas dos estudantes bem como a análise de conteúdo da forma como estes entendem os processos de raciocínio. Os resultados evidenciam que a maior parte dos estudantes tem um conhecimento adequado do raciocínio matemático, bem como dos processos de

raciocínio analisados, nos dois momentos de aplicação da tarefa. Verifica-se uma maior clareza na explicitação do que entendem serem os processos de raciocínio, após a experiência de formação.
Palavras-chave: raciocínio matemático; justificar; generalizar; exemplificar; classificar; conhecimento dos professores.

Abstract. This article is part of the Mathematical Reasoning and Teacher Education Project (REASON) which aims to study the mathematical and didactical knowledge that teachers need to carry out a practice that promotes students' mathematical reasoning and to study ways to support their development, through a design research methodology. We propose to discuss the knowledge that future teachers have about mathematical reasoning and its processes, before and after a teacher education methods course. To achieve this goal, we analyzed data related to reasoning processes present in two questions of a task, used as a pre-test and post-test, and applied in a class of 1st year of the Master of Teaching in the 1st Cycle of Basic Education and Maths and Science in the 2nd Cycle of Basic Education. The reasoning processes discussed in this article are generalizing, justifying, exemplifying and classifying. Quantitative analysis of the students' responses was carried out, as well as content analysis of how they understand the reasoning processes. The results show that most students have an adequate knowledge about mathematical reasoning, as well as the reasoning processes analyzed, in the two moments of application of the task. There is greater clarity in explaining what they understand to be the reasoning processes, after the teacher education course.
Keywords: mathematical reasoning; justifying; generalizing; exemplifying; classifying; teachers' knowledge.

Recebido em abril 2020
Aceite para publicação em junho 2020

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático é um aspeto fundamental na aprendizagem da matemática com compreensão, devendo existir um trabalho intencional incidente nesse desenvolvimento desde os anos iniciais (Ball & Bass, 2003; Harel & Sowder, 2007; Rodrigues, 2012; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina, 2013; Schultz-Ferrel, Hammond, & Robles, 2007). As orientações curriculares internacionais, como é o caso de Singapura e dos Estados Unidos, convergem igualmente nesse sentido (MES, 2012; NCTM, 2017). Também o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) e o documento curricular Aprendizagens Essenciais (Ministério da Educação, 2018) sublinham a importância, no contexto escolar do Ensino Básico, desta capacidade transversal em todos os domínios temáticos. Neste último documento, é referido que a ação do professor deve ser orientada por forma a levar os alunos a desenvolverem a capacidade de raciocinar matematicamente e também de analisar os raciocínios de outros. Neste processo evolutivo, ao longo da escolaridade, os alunos começam por justificar as conclusões com base em exemplos particulares, evoluindo depois para a formulação de justificações gerais (Ponte et al., 2007).

Hiebert, Morris e Glass (2003) propõem que os futuros professores tenham a oportunidade de desenvolver experiências significativas que possam mais tarde trabalhar com os seus alunos e que correspondam a aspetos chave do currículo de Matemática. Entre elas, parecem-nos fundamentais aquelas que se prendem com o desenvolvimento do raciocínio. Acresce que muitos professores (especialmente os dos primeiros anos) têm um conhecimento limitado do conteúdo matemático sobre raciocinar e provar (*reasoning and proving* no original) (Stylianides et al., 2013). Estes autores afirmam ainda que muitos professores acreditam que a prova está para além das capacidades dos seus alunos, que designam por crenças contraprodutivas sobre o seu ensino. Estas razões justificam o não ensino do raciocínio nas salas de aula dos primeiros anos. Assim, é necessário dar especial atenção na formação inicial de professores ao desenvolvimento do raciocínio, considerando tanto a capacidade de raciocinar como o conhecimento sobre o raciocínio (Stylianides & Stylianides, 2006). Estes autores consideram que existe uma estreita ligação entre a atividade de raciocinar e provar e a de atribuir sentido, que permite tornar as aprendizagens significativas, o que justifica a importância de se dar uma atenção especial ao raciocínio matemático na formação inicial dos futuros professores. Assim, trabalhar esta dimensão poderá providenciar um maior desenvolvimento do conhecimento matemático e didático dos futuros professores dos primeiros anos, que os capacite a conduzirem práticas promotoras do raciocínio matemático dos alunos.

O presente artigo enquadra-se no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores (REASON) que tem como objetivo estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores dos ensinos básico e secundário. Este artigo analisa o desempenho de futuros professores do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, relativo ao seu conhecimento sobre os processos de raciocínio matemático, antes e após uma experiência de formação.

Processos de raciocínio matemático

Não obstante a centralidade do raciocínio matemático na aprendizagem compreensiva da matemática, nem sempre este constructo é definido de forma clara e explícita, na literatura, tal como indicado por Jeannotte e Kieran (2017), e quando tal é feito, verifica-se não existir uma total convergência na sua definição concetual. Por exemplo, Sumpter (2013) define raciocínio matemático como uma "linha de pensamento adotada para produzir afirmações e chegar a conclusões na resolução de tarefas" (p. 1120), propondo dois tipos de raciocínio: criativo e imitativo. O raciocínio criativo é fundamentado matematicamente, cumprindo as condições de novidade, plausibilidade e fundamento matemático. O imitativo contempla o que a autora designa por raciocínio memorizado e raciocínio algorítmico. Numa aceção diferente, outros autores (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009; Stylianides et al., 2013) não contemplam a dimensão imitativa como integrando o raciocínio matemático por considerarem que essa dimensão encerra uma natureza procedimental mecanizada sem produção de inferências. Jeannotte e Kieran (2017) colocam a tónica na comunicação e definem o "raciocínio matemático como um processo de comunicação com outros e consigo próprio que permite inferir afirmações matemáticas a partir de outras afirmações matemáticas" (p. 7). É esta a definição de raciocínio matemático que assumimos, entendendo o processo de inferência como o processo de utilizar informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Assim, contrariamente ao assumido por Sumpter (2013), não consideramos como raciocínio matemático a aplicação de um procedimento.

Embora se possam considerar dois aspetos no raciocínio matemático, o estrutural e o processual, segundo Jeannotte e Kieran (2017), ambos devem ser encarados de um modo dialético já que um e outro se constituem mutuamente. O aspeto estrutural tem uma natureza estática e compreende os vários tipos de raciocínio: a dedução, a indução e a abdução. O aspeto processual tem uma natureza dinâmica e temporal e contempla diferentes processos que as autoras dividem em duas grandes categorias: os relacionados com a procura de semelhanças e diferenças (associados aos raciocínios indutivo e abdutivo) e os relacionados com a validação (associados essencialmente ao raciocínio de tipo dedutivo). Os processos da primeira categoria compreendem generalizar, conjeturar, identificar um padrão, comparar e classificar. Os da segunda categoria visam mudar o valor epistémico das afirmações matemáticas para verdade, falso ou mais provável e compreendem os processos de justificar, provar e provar formalmente. Também Stylianides (2008, 2009), numa abordagem similar, e focando-se no aspeto processual, distingue duas grandes categorias, o processo de generalizar e o processo de fundamentar as afirmações matemáticas (*providing support to mathematical claims*, no original; ou seja, o processo de validar). Dada a importância destes dois processos na compreensão aprofundada da matemática em todos os seus domínios e em todos os níveis educativos, Stylianides (2009) e Stylianides et al. (2013) encaram-nos de um modo integral, referindo a atividade de associação entre raciocinar e provar como o processo de dar sentido e de estabelecer conhecimento matemático, envolvendo não só investigar ideias ou objetos matemáticos mas também investigar porquê, identificando relações que fundamentam a veracidade ou falsidade de uma dada afirmação matemática. Para além destas duas grandes categorias, Jeannotte e Kieran (2017) consideram, ainda, o processo de exemplificar como sendo um processo que pode suportar cada um dos processos de raciocínio atrás enunciados.

Como forma de melhor fundamentar teoricamente os resultados apresentados neste artigo, iremos, em seguida, focar-nos nos quatro processos incluídos nas tarefas inicial e final: generalizar, justificar, exemplificar e classificar. Iremos dar um maior desenvolvimento aos processos de generalizar e justificar, dada a sua importância central na descoberta de ideias matemáticas e na identificação de relações que fundamentam essas ideias, contribuindo, assim, para uma compreensão aprofundada da matemática (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Stylianides, 2008, 2009). Nesse sentido, estamos de acordo com Mata-Pereira e Ponte (2018) que destacam que:

> Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas, sendo a generalização o processo de raciocínio envolvido. Por outro lado, a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações. (p. 783)

Generalizar consiste em identificar pontos comuns em casos diferentes ou estender o raciocínio a um domínio mais vasto, podendo envolver a identificação da aplicação de uma generalização através do reconhecimento do domínio para o qual a generalização é verdadeira (Lannin, Elliott, & Ellis, 2011). Assumindo uma aceção idêntica, Mata-Pereira e Ponte (2017) consideram que generalizar conduz a uma afirmação referente a uma propriedade comum de um grupo de objetos, compreendendo também "afirmar que uma propriedade ou procedimento, conhecidos para um determinado conjunto de objetos ou condições, se mantêm para um conjunto mais alargado de objetos ou condições" (pp. 170-171). Stylianides (2009) inclui, neste processo, os processos de identificar um padrão e de formular uma conjetura, distinguindo-os, tal como Jeannotte e Kieran (2017), pelo facto de a associação de um valor epistémico de provável ou talvez estar apenas presente no processo de conjeturar. Assim, segundo Stylianides (2009), o processo de identificar um padrão envolve identificar uma relação geral num determinado conjunto de dados enquanto o processo de conjeturar envolve formular uma hipótese acerca de uma relação matemática geral baseada numa evidência incompleta. O autor assume o ponto de vista dos alunos, na mesma linha de Harel e Sowder (2007), afirmando que os alunos estarão a conjeturar se estes formularem uma hipótese da qual não estão certos se é verdadeira ou falsa, requerendo, pois, que a mesma seja testada ou examinada. Já Lannin et al. (2011) defendem que as conjeturas podem ou não ser generalizações dado que as relações matemáticas envolvidas no processo de conjeturar podem ou não ser genéricas. No que respeita ao processo de identificar um padrão, assumimos, tal como Stylianides (2009), uma abordagem inclusiva, considerando que quando os alunos identificam um padrão também estão simultaneamente a generalizar. Relativamente ao processo de conjeturar, partilhamos da perspetiva de Lannin et al. (2011), distinguindo este processo do de generalizar, embora consideremos que uma parte significativa das conjeturas formuladas pelos alunos assumem um caráter geral, e nesse caso, constituem-se como generalizações.

Relativamente ao processo de justificar, este consiste em construir uma sequência lógica de afirmações, cada uma suportando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão (Lannin et al., 2011). Esta definição é abrangente, englobando os três processos distinguidos por Jeannotte e Kieran (2017): justificar, provar e provar formalmente. As autoras referem que enquanto o processo de justificar não requer necessariamente uma argumentação com uma estrutura dedutiva, podendo mudar o valor epistémico das afirmações matemáticas apenas para provável ou muito provável, os processos de provar e de provar formalmente implicam uma argumentação dedutiva, mudando o valor epistémico para verdade ou falso, isto é, permitem estabelecer se as afirmações matemáticas são verdadeiras ou falsas. Assim, a validade da conclusão alcançada provém dos próprios processos usados pelos alunos e não de uma autoridade externa, como é o caso dos manuais escolares ou do professor (Hanna, 1996; Harel & Sowder, 2007).

Considerando a categoria de fundamentar as afirmações matemáticas proposta por Stylianides (2008, 2009), esta inclui, por um lado, o exemplo genérico e a demonstração como dois tipos de prova, e por outro, a argumentação empírica e a argumentação racional como dois tipos de argumentação que não constituem provas. Assim, são vários os autores (Balacheff, 1987; Harel & Sowder, 1998, 2007; Rodrigues, 2008; Stylianides, 2008, 2009) que referem a argumentação empírica (ou justificação empírica, na terminologia usada por Harel e Sowder (1998)) como uma forma usualmente utilizada pelos alunos para sustentar uma dada afirmação geral quando os mesmos estabelecem a veracidade dessa afirmação, apresentando alguns exemplos que verificam a afirmação em causa, embora este tipo de argumentação não constitua um meio adequado de validação das afirmações matemáticas. No contexto escolar, é essencial que se dê primazia à função explicativa da prova, mais do que à função verificativa, no sentido em que os alunos, usualmente, não precisam da prova para ficarem convencidos da veracidade das afirmações matemáticas, mas necessitam dela para compreenderem por que é que as mesmas são verdadeiras, ou não (Hanna, 2000; Hersh, 1993, 1997). No presente artigo, assumimos uma visão abrangente de justificar, convergente com a de Lannin et al. (2011), considerando que a sua principal função no currículo de matemática é a promoção da compreensão matemática, numa abordagem baseada na interação entre a experimentação e a dedução (de Villiers, 2010; Hanna, 2000; Nunokawa, 2010). Não obstante a relevância da função explicativa do processo de provar, há que distinguir justificar de explicar, já que o primeiro constitui um processo de raciocínio e o segundo, um processo de comunicação, que tem como propósito clarificar aspetos do pensamento matemático de uma pessoa que pode não ser visível a outros (Yackel & Cobb, 1996). Embora distintos, existe, por um lado, a tendência, num ponto de vista de senso comum, em aglutiná-los como tratando-se de um mesmo processo, já que a única forma de alguém expressar uma dada justificação matemática é através de um ato comunicativo.

Exemplificar constitui, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), um processo auxiliar de generalizar e justificar que, estando associado ao raciocínio abdutivo, permite inferir dados acerca de um problema, ao gerar elementos que apoiam aqueles processos (Jeannotte & Kieran, 2017). Assim, estas autoras relevam o seu papel de suporte a todos os restantes processos de raciocínio, apoiando quer a procura de semelhanças e diferenças quer a procura de validação.

O processo de classificar consiste em identificar pontos comuns e distintos em objetos diferentes, juntando-os ou separando-os, com base em propriedades matemáticas ou definições (Jeannotte & Kieran, 2017). Este processo envolve comparar objetos entre si com vista a estabelecer uma organização entre eles, "tendo por referência a identificação das suas características comuns – os atributos críticos. Consoante esta organização, um objeto pertence a uma classe se respeitar todos os seus atributos críticos" (Brunheira, 2019, p. 24), sendo estes estabelecidos pelas definições. Assim, o processo de classificar relaciona-se com outros processos de raciocínio, designadamente o de generalizar. Efetivamente, a determinação das categorias tem em vista a generalização, já que a enunciação dos atributos críticos diz respeito à generalidade dos objetos de uma dada classe.

Na definição que acabámos de fazer dos quatro processos de raciocínio selecionados para o presente artigo, tentámos esclarecer a sua especificidade e, simultaneamente, evidenciar a sua inter-relação. Tal como referido atrás, consideramos, como centrais e essenciais, os processos de generalizar e justificar.

Conhecimento dos futuros professores

Para que os professores promovam o desenvolvimento do raciocínio nos seus alunos, é necessário que, durante a sua formação, sejam confrontados com situações concretas que envolvam explicitamente o raciocínio matemático, experimentem diferentes estratégias e analisem diferentes situações, preferencialmente trabalhos realizados por alunos. Os candidatos a professores têm normalmente uma ideia muito redutora do trabalho a desenvolver envolvendo o raciocínio nos primeiros anos, pois consideram que isso vai para além das capacidades dos alunos, a que não é alheia a sua própria experiência enquanto estudantes de Matemática ao longo dos anos de escolaridade anterior (Maaß & Schloglmann, 2009). Daí que seja fundamental promover experiências significativas neste âmbito na sua formação inicial.

Ponte e Chapman (2008) apoiam a ideia da importância de os futuros docentes serem confrontados com experiências de aprendizagem consistentes com as recomendações curriculares para a educação matemática, de modo a virem a implementá-las nas suas práticas docentes futuras. Assim, os professores, durante a sua formação, devem ser envolvidos em situações que lhes permitam vivenciar aspetos essenciais da sua futura prática de ensino, mas que façam sentido, isto é, sejam significativas (Hiebert et al., 2003) e correspondam a aspetos chave do currículo de Matemática.

De acordo com Ma (2009), o professor do ensino básico deve desenvolver uma compreensão profunda da matemática fundamental. Para Ma, compreensão profunda significa que o conhecimento deve ser abrangente e completo, isto é, "um professor que conheça um tópico em profundidade sabe articulá-lo com ideias conceptualmente mais poderosas, estabelece conexões entre conceitos e procedimentos, valoriza a utilização de diferentes abordagens para chegar a uma solução e procura dar sentido ao que conhece" (Brunheira, 2019, p. 31). Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) referem ser pouco provável que os professores consigam proporcionar aos seus alunos uma boa explicação de conceitos que eles não compreendam e mais dificilmente serão capazes de envolver os seus alunos em discussões produtivas sobre as múltiplas formas de resolver um dado problema, se eles próprios só o conseguem resolver de uma única forma. Nesta perspetiva, definem como cruciais para os professores três tipos de conhecimento: da matemática, dos alunos e das práticas de ensino. Neste artigo, vamos apenas focar o conhecimento da matemática. Este inclui conhecimento: (i) dos factos, dos conceitos e dos procedimentos, e das relações entre eles; (ii) da forma como as ideias matemáticas podem ser representadas; e (iii) da matemática como uma disciplina – em particular como o conhecimento matemático é produzido, a natureza do discurso em matemática, mas também conhecer os objetivos do ensino da matemática e ser capaz de discriminar e priorizar esses objetivos. Conhecimento da matemática para ensinar é mais do que saber matemática para si próprio, é compreender corretamente conceitos, bem como realizar procedimentos, mas também ser capaz de compreender os fundamentos concetuais desses conceitos e procedimentos. Como afirmam Ponte e Chapman (2008), "não se trata simplesmente de oferecer mais matemática aos futuros professores, mas, mais importante, permitir-lhes que compreendam e reconstruam aquilo que sabem com maior profundidade e significado" (p. 230). Ou seja, se queremos que os aspetos referidos sobre raciocínio e seus processos sejam trabalhados desde os primeiros anos, estes têm de ser trabalhados durante a formação inicial, pois um dos fatores identificados na literatura como limitativo desse trabalho é o fraco conhecimento dos professores sobre o mesmo (Stylianides et al., 2013).

No que respeita ao conhecimento dos futuros professores sobre o raciocínio matemático, as dificuldades identificadas prendem-se com: (i) a reduzida compreensão do raciocínio indutivo, mais nos futuros professores dos primeiros anos do que nos do ensino secundário (Stylianides, Stylianides, & Philippou, 2007); e (ii) a validação de demonstrações, atendendo mais aos detalhes do que aos aspetos globais e estruturais (Selden & Selden, 2003). Por outro lado, um estudo conduzido com 39 futuros professores do ensino elementar (K-6) (Stylianides, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009) evidencia que 75% não conseguiram elaborar demonstrações de duas afirmações matemáticas, mas cerca de um terço desses

75% reconheceram que as suas respostas não provavam as afirmações em causa. Estes resultados mostram que uma tentativa falhada de provar uma afirmação não implica necessariamente uma compreensão limitada da noção de prova.

Procedimentos metodológicos

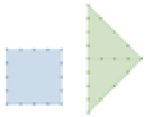
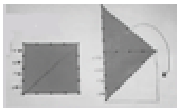
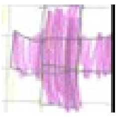
O estudo adota uma metodologia de Investigação Baseada em Design visando produzir teorias locais de ensino que possam contribuir para informar as práticas dos professores (Gravemeijer & Cobb, 2013) e dos formadores de professores. Neste sentido, a investigação incidente na formação inicial desenvolve-se ao longo de dois ciclos de modo a permitir o refinamento da conjetura inicial. Assim, a conjetura que informa as experiências de formação é a seguinte: o trabalho dos formadores, baseado em registos da prática e na reflexão sobre a prática letiva, focado em situações que criem oportunidades de raciocinar matematicamente, e conduzido numa abordagem exploratória, promove o conhecimento dos futuros professores e a sua capacidade de desenvolver nos alunos o raciocínio matemático.

Neste artigo, analisamos os dados relativos a processos de raciocínio presentes em duas questões de uma tarefa, aplicada a futuros professores do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, na Unidade Curricular de Didática da Matemática no 1.º e no 2.º CEB, em funcionamento numa das instituições que participam no Projeto, antes e após uma experiência de formação, focada no raciocínio matemático, e conduzida pela segunda autora. De entre os diversos processos de raciocínio, a experiência de formação contemplou sobretudo os processos de generalizar, justificar, exemplificar e classificar. A focalização nestes processos deve-se à preocupação em, por um lado, trabalhar processos centrais como são o de generalizar e justificar (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Stylianides, 2009; Stylianides et al., 2013), e por outro, contemplar processos que são recorrentes no 1.º Ciclo, como o de exemplificar, servindo de suporte aos restantes processos (Jeannotte & Kieran, 2017), e o de classificar, fundamental na construção de conceitos. Esta experiência, composta por seis sessões – uma vez por semana cada uma com a duração de 2h 30 min., constituiu o Ciclo 1 e será refinada e implementada num Ciclo 2, numa outra instituição de ensino superior. As seis sessões contemplaram a exploração e discussão de tarefas de formação que visaram desenvolver nos futuros professores os três tipos de conhecimento (da matemática, dos alunos e das práticas de ensino) e incidiram nos processos de raciocínio, nas ações do professor para promover o raciocínio nos alunos e nos princípios de design de tarefas potenciadoras do desenvolvimento nos alunos do raciocínio matemático. As tarefas de formação envolveram análise de: (i) textos (um sobre a noção de raciocínio matemático e como o desenvolver na sala de aula; e outro sobre as ações do professor para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos); (ii) tarefas (sobre números e operações, geometria e medida) propostas a alunos do 1.º CEB; (iii) produções de alunos do 1.º CEB; e (iv) episódios de aulas do 1.º CEB, com evidência de processos de raciocínio nos alunos e de ações da professora promotoras desses processos, transcritos e visualizados em suporte de vídeo.

A tarefa objeto deste artigo foi concebida pela equipa do Projeto de modo a permitir aferir o conhecimento dos futuros professores sobre: (i) processos de raciocínio, e (ii) ações docentes na gestão da discussão coletiva (esta parte da tarefa não é apresentada neste artigo). Foi aplicada no primeiro dia de aulas a 28 futuros professores, estudantes da referida unidade curricular (tarefa inicial), e a 26 estudantes, na aula seguinte ao término da experiência de formação (tarefa final), e teve em cada um dos momentos, a duração de uma hora. Realizaram a tarefa nas duas aulas de aplicação apenas 22 estudantes, já que seis dos estudantes, que estiveram presentes na primeira aula, faltaram à aula em que foi aplicada a segunda tarefa, e quatro dos que realizaram a tarefa final faltaram à primeira aula. Uma vez que optámos por fazer uma caracterização global enquanto tendência da turma e não uma análise comparativa individual, contemplámos a totalidade das resoluções. Durante a experiência de formação, não foi abordado nem discutido qualquer dos itens da tarefa. Todos os estudantes assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido, relativamente aos métodos de recolha de dados, e são tratados por nomes fictícios, respeitando o critério ético de confidencialidade.

A Questão 1, destacada na Figura 1, apresenta afirmações de alunos do 1.º CEB e solicita que os participantes assinalem as que consideram exprimir raciocínio matemático e que justifiquem as suas escolhas. Era esperado que as afirmações 1, 4, 5 e 7 fossem identificadas como situações que exprimem raciocínio matemático, por envolverem produção de novo conhecimento a partir do conhecimento prévio, e as afirmações 2, 3 e 6 como situações que não exprimem raciocínio matemático, por estarem associadas somente ao uso de procedimentos.

1. De entre as seguintes afirmações de alunos do 1.º Ciclo, selecione, assinalando com uma cruz, as que considera exprimirem raciocínio matemático por parte dos alunos.

1) 45+38 é 83 porque 45+40 é 85, logo menos 2 é 83.	
2) 9x7 é 63 porque eu sei a tabuada de cor.	
3) Medi o perímetro do tampo da minha mesa. Deu-me 326,3 cm porque medi 53 cm, depois 110,1 cm, depois 53,2 cm e depois 110 cm, e no final juntei tudo.	
4) Qual é a figura que ocupa mais espaço?   São ambas as duas do mesmo tamanho porque se medirmos metade do verde e colocá-la mais esse pedaço é igual a metade assim  do quadrado.	
5) Tendo sido solicitado a alunos do 1.º ano que antecipassem quais os pentaminós que permitem montar uma caixa aberta, sem experimentar com material, um aluno antecipou este pentaminó e disse:  É fácil porque é só dobrar esta, esta, aquela e aquela	
6) Esta figura é um retângulo porque parece uma porta.	
7) 100-48 é 62. Sabes porquê? Porque se fosse 10, 10 menos 4, 6. Menos 8, sobravam 2 do 60. Ia dar 2.	

a. Considerando as afirmações selecionadas, justifique por que motivo as selecionou.
b. Considerando as afirmações não selecionadas, justifique por que motivo não as selecionou.

Figura 1. Questão 1 das tarefas inicial e final

A Questão 2 (Figura 2) solicita, na alínea a), que em sete afirmações de alunos identifiquem quais os processos de raciocínio envolvidos de entre os processos de generalizar, justificar, exemplificar e classificar. A alínea b) solicita que os participantes justifiquem a associação das afirmações aos processos de raciocínio identificados na alínea a), e que explicitem o que entendem por cada um desses processos. Era esperado que no processo de generalizar fossem incluídas as afirmações A, B, C, D, E e G, por serem afirmações respeitantes à infinidade de objetos matemáticos; no processo de justificar as afirmações A, B, F e G; no processo de exemplificar as afirmações C e E; e no processo de classificar as afirmações B e F.

2. Atente nas afirmações de alunos em baixo transcritas identificadas por letras:

A – A soma de quaisquer dois números pares é sempre par é uma afirmação verdadeira. Os números pares são números divisíveis por 2. Ao adicionar-se números com um fator comum, 2 neste caso, a soma vai ter o mesmo fator comum. Logo, a afirmação é verdadeira[1].

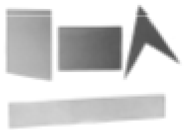
B - O quadrado é um losango porque tem os lados todos iguais.

C – 12 mais 0 é 12. 4 mais 0 é 4. 8 mais 0 é 8. Quando adicionamos 0 a um certo número, a soma é sempre esse número.

D – Os paralelogramos têm dois pares de ângulos iguais opostos.

E - A relação que existe entre os lados dos paralelogramos é que os lados maiores são iguais e os lados menores também têm o mesmo comprimento, por exemplo AD=8=BC e AB=3=DC.

F - *Foi solicitado a alunos de 1.º ano que identificassem o intruso*



Têm todos quatro lados. O intruso é o bumerangue pois é o único que tem um bico para dentro[2].

G - O prisma pentagonal tem 15 arestas pois é o triplo do número de lados da base.

a) Complete a seguinte tabela com as letras, fazendo corresponder as afirmações aos diferentes processos de raciocínio.

Nota: Pode colocar uma afirmação em mais do que um processo.

Processos de raciocínio	**Afirmações**
Generalizar	
Justificar	
Exemplificar	
Classificar	

b) Justifique a associação das afirmações aos processos de raciocínio, explicitando o que entende por cada um desses processos. Pode ilustrar com as afirmações transcritas.

Figura 2. Questão 2 das tarefas inicial e final

Na Questão 1, fazemos uma análise estatística descritiva elementar das respostas (nas tarefas inicial e final), seguida de uma análise sobre o que os participantes consideraram, ou não, raciocínio matemático. Para a análise da Questão 2, alínea a), fazemos uma análise estatística descritiva elementar das respostas apresentadas na tarefa inicial e tarefa final, e discutimos e exemplificamos as situações que consideramos mais relevantes. Na alínea b), realizamos uma análise de conteúdo (Bardin, 2010) das respostas dos participantes para cada um dos processos de raciocínio nas tarefas inicial e final, e que tem por objetivo identificar alterações no conhecimento dos participantes sobre estes processos. Da análise de conteúdo efetuada, emergiram indutivamente categorias com base nas ideias expressas pelos estudantes, correspondessem estas ou não à definição conceptual que apresentámos na fundamentação teórica deste artigo. Seguimos, assim, uma abordagem fenomenográfica, tal como descrita em Herbert et al. (2015), já que as categorias emergentes dos dados resultam do agrupamento efetuado às respostas, com base nas características comuns. O processo de categorização seguiu as etapas propostas por Bardin (2010). Foi realizada uma pré-análise das respostas dos participantes para cada um dos processos e definidas categorias por meio das ideias centrais presentes nessas respostas; em seguida, foi realizada uma nova exploração dessas respostas, segundo as categorias estabelecidas, e desenvolvida uma distribuição de frequências; por fim, realizámos inferências e interpretações dessas categorias, que são apresentadas neste artigo com recurso a alguns exemplos de respostas ilustrativos das categorias analíticas emergentes. Assim, esses exemplos foram selecionados por serem representativos das respostas respeitantes às respetivas categorias. Aparece ainda a categoria Respostas circulares, que inclui as respostas que não permitem identificar o que o participante entende pelo processo por usar o próprio termo para fazer essa explicitação (por exemplo, generalização é quando a criança faz uma generalização).

Apresentação dos resultados

No que se segue, apresentamos os resultados obtidos nas respostas às questões das tarefas inicial e final mencionadas anteriormente, focando respostas apresentadas nas duas tarefas e respetivas justificações pelos participantes.

O que os estudantes consideram raciocínio matemático (Questão 1)

Na Tabela 1, apresentamos a análise quantitativa das respostas dos participantes, através das frequências absolutas e percentagens das respostas corretas.

Tabela 1. Respostas corretas dos participantes para a Questão 1

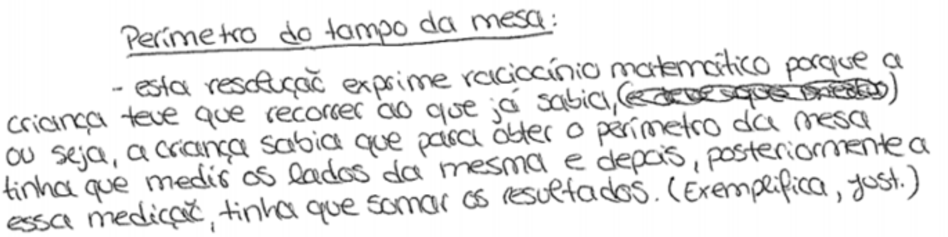
	Tarefa inicial		**Tarefa final**	
Afirmações	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
45 + 38 é 83	28	100%	26	100%
9x7 é 63 (tabuada)	28	100%	26	100%
Perímetro do tampo da mesa	22	79%	14	54%
Área do quadrado e triângulo	26	93%	24	92%
Pentaminó (caixa)	15	54%	16	62%
Retângulo e porta	26	93%	22	85%
100 – 48 é 62	27	96%	25	96%

Por exemplo, na tarefa inicial, na afirmação 1 (45+38 é 83) 28 participantes (100%) consideraram, corretamente, que essa afirmação representa raciocínio matemático, e na afirmação 3 (Perímetro do tampo da mesa), 22 participantes (79%) não consideraram, corretamente, que essa afirmação representa raciocínio matemático. As células sombreadas representam as afirmações que indicam raciocício matemático (afirmações 1, 4, 5 e 7), as que estão em branco, ao contrário, indicam afirmações que não indicam raciocício matemático (afirmações 2, 3 e 6).

A análise quantitativa das respostas para esta questão (Tabela 1) mostra que na tarefa final os participantes consideraram do mesmo modo as afirmações 1, 2, 4 e 7. As altas percentagens de acertos nessas afirmações indicam um conhecimento adequado dos participantes no que respeita à identificação de situações que representam, ou não, raciocínio matemático.

A afirmação 5 (pentaminó) foi a que registou uma menor percentagem de acertos na tarefa inicial, com pouco mais de metade dos estudantes a assinalarem-na como exprimindo raciocínio matemático. Estes números indicam que a seleção desta afirmação como uma manifestação do raciocínio matemático permaneceu controversa para os participantes, mesmo na tarefa final. Esta afirmação envolve o raciocínio espacial com a manipulação mental do pentaminó, imaginando a sua configuração ao efetuar-se uma transformação do bidimensional para o tridimensional. Os estudantes que não selecionaram esta afirmação poderão estar pouco sensibilizados com esta dimensão específica do raciocínio, ou poderão não ter reparado que a afirmação em causa resultou de um processo de antecipação, sem manipulação do material.

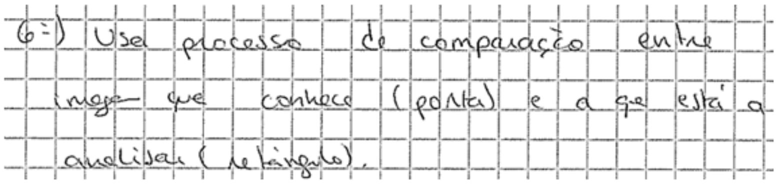
A afirmação 3 (perímetro do tampo da mesa), que envolve o uso do procedimento de medição e subsequente soma das medições efetuadas, apontou um desempenho pior dos participantes na tarefa final, com uma diminuição na percentagem de acertos de 79% para 54% (Tabela 1). Entendemos que essa queda no número de acertos se deve ao facto de alguns estudantes terem identificado o raciocínio matemático na construção de uma narrativa que justificava a conclusão sobre o perímetro. A resposta da participante Andrea na tarefa final, destacada na Figura 3, exemplifica essa situação.


Perímetro do tampo da mesa:
- esta resolução exprime raciocínio matemático porque a criança teve que recorrer ao que já sabia, ou seja, a criança sabia que para obter o perímetro da mesa tinha que medir os lados da mesma e depois, posteriormente a essa medição, tinha que somar os resultados. (Exemplifica, Just.)

<u>Perímetro do tampo da mesa</u>: esta resolução exprime raciocínio matemático porque a criança teve que recorrer ao que já sabia, ou seja, a criança sabia que para obter o perímetro da mesa tinha que medir os lados da mesa e depois, posteriomente a essa medição, tinha que somar os resultados (exemplifica, just.)

Figura 3. Justificação de Andrea na tarefa final

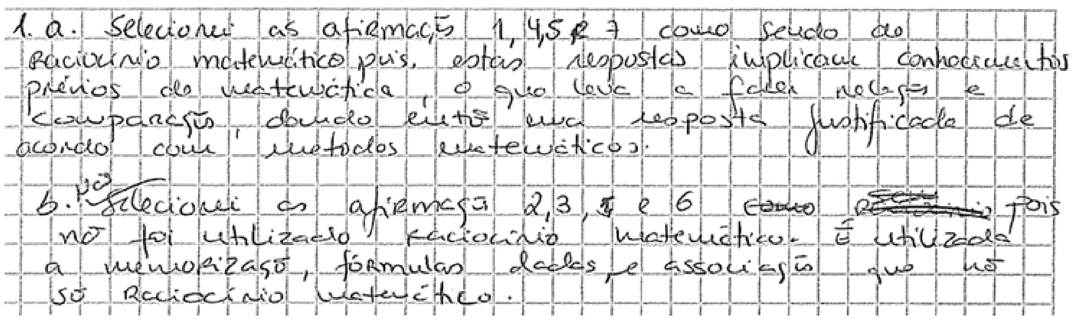
A afirmação 6 (retângulo e porta) também apontou uma queda na percentagem de acertos, embora com um decréscimo menor, de 93% para 85%. Os estudantes que consideraram essa afirmação como raciocínio matemático basearam-se no processo de comparar para justificar a sua escolha, ignorando que, neste caso, a comparação carece de uma produção de inferências, baseando-se unicamente na perceção global da forma sem se apoiar em propriedades matemáticas dos retângulos. A resposta da estudante Paula, destacada na Figura 4, corrobora essa perspetiva.



Usa processo de comparação entre imagem que conhece (porta) e a que está a analisar (retângulo).

Figura 4. Justificação de Paula na tarefa final

As justificações apresentadas pelos estudantes para a Questão 1a), na tarefa final, estão caracterizadas pelo destaque de ideias inerentes às afirmações enunciadas na tarefa, como comparar, visualizar, transformar, compensar (números de referência), e pelo reconhecimento da mobilização de conhecimentos prévios. No caso da Questão 1b), há uma ideia geral de que memorização, medições e a correspondência entre um retângulo e uma porta não indicam raciocínio matemático. A resposta da estudante Helena, apresentada na Figura 5, exemplifica essa perspetiva.



1. a. Selecionei as afirmações 1, 4, 5 e 7 como sendo de raciocínio matemático, pois, estas respostas implicam conhecimentos prévios de matemática, o que leva a fazer relações e comparações, dando então uma resposta justificada de acordo com métodos matemáticos.
b. Não selecionei as afirmações 2, 3 e 6 pois não foi utilizado raciocínio matemático. É utilizado a memorização, fórmulas dadas e associações que não são raciocínio matemático.

Figura 5. Justificação de Helena na tarefa final

Seguimos com a avaliação da Questão 2, que discute a interpretação dos estudantes sobre os processos de generalizar, justificar, exemplificar e classificar. Esse olhar mais direcionado para os processos de raciocínio matemático permitiu-nos entender melhor o conhecimento dos participantes sobre, especificamente, cada um deles.

O que os estudantes entendem sobre processos do raciocínio matemático (Questão 2)

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre as respostas dos participantes nas tarefas inicial e final. Em seguida, discutimos os dados quantitativos que consideramos mais relevantes nessa comparação. Os processos sombreados indicam as respostas desejadas para cada uma das afirmações: por exemplo, na afirmação A, era esperado que os participantes identificassem os processos de generalizar e justificar.

Os números indicam que houve, globalmente, uma melhoria nas respostas da tarefa final. Com exceção da afirmação B (processo de generalizar), na qual a percentagem se manteve entre os 30%, da afirmação G (processo de generalizar), em que a percentagem ficou em torno de 25%, e da afirmação C (processo de exemplificar), que apontou uma diminuição de 6%, de 75% para 69%, todas as demais respostas desejadas tiveram aumentos significativos. No entanto, no que respeita às respostas não desejadas, houve várias em que a percentagem subiu na tarefa final, em especial o processo de justificar, parecendo existir um acréscimo no reconhecimento da sua centralidade, mas nem sempre com uma adequada clarificação do seu significado. Os dados, no seu conjunto, quer os relativos às respostas corretas quer às incorretas, podem indicar maior familiaridade e clareza dos participantes em identificar estes processos do raciocínio na tarefa final, ou simplesmente indicar uma tendência dos estudantes em selecionarem um maior número de afirmações para cada um dos processos. De facto, na tarefa inicial, 43% dos estudantes atribuíram apenas um processo para cada afirmação; na tarefa final, esta percentagem foi de 11%.

Há, ainda, que ter em consideração o facto de, na tarefa inicial, um número significativo de estudantes ter distribuído as afirmações pelos processos sem nunca as repetir, fazendo uma associação ao processo que, eventualmente, consideraram predominante e não à totalidade dos processos envolvidos. Por exemplo, na afirmação B, o facto de os processos justificar e classificar terem maior percentagem, comparativamente ao de generalizar, pode significar que os estudantes os consideraram mais marcantes nesta afirmação, identificando o processo de classificar em "O quadrado é um losango" e o de justificar em "porque tem os lados todos iguais". Ainda no que respeita a esta afirmação, os estudantes parecem ter-se dividido relativamente ao processo que, provavelmente, consideraram predominante, com percentagens idênticas em justificar e classificar. Por conseguinte, as percentagens mais reduzidas podem não significar uma falta de compreensão sobre o processo em causa, mas sim unicamente que não foi selecionada como ilustração do processo.

Tabela 2. Respostas dos participantes para a Questão 2(a)

A - soma dos números pares

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	16	57%	19	68%	4	14%	2	7%
Tarefa final	20	77%	20	77%	4	15%	1	4%

B - todo quadrado é losango

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	9	32%	14	50%	0	0%	16	57%
Tarefa final	8	31%	16	62%	1	4%	18	69%

C - 0 é elemento neutro da adição

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	15	54%	1	4%	21	75%	2	7%
Tarefa final	25	96%	5	19%	18	69%	0	0%

D - ângulos opostos do paralelogramo

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	13	46%	0	0%	2	7%	21	75%
Tarefa final	16	62%	2	8%	0	0%	20	77%

E - relação entre os lados do paralelogramo

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	3	11%	8	29%	23	82%	3	11%
Tarefa final	11	42%	9	35%	24	92%	8	31%

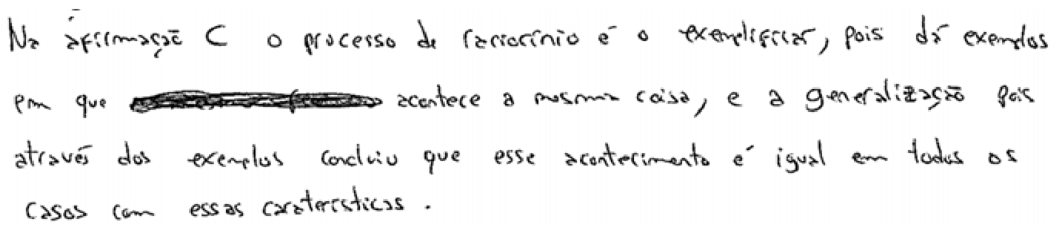
F - quadrilátero côncavo

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	3	11%	22	79%	1	4%	7	25%
Tarefa final	2	8%	22	85%	2	8%	15	58%

G - arestas do prisma pentagonal

	Generalizar		Justificar		Exemplificar		Classificar	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Tarefa inicial	7	25%	18	64%	2	7%	6	21%
Tarefa final	7	27%	22	85%	0	0%	10	38%

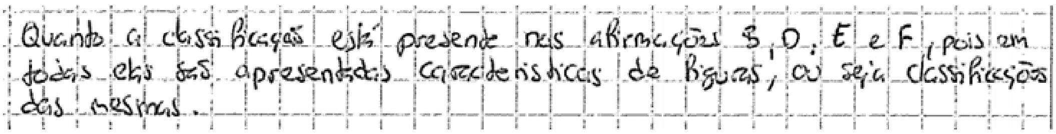
No caso do processo de generalizar, merece destaque a afirmação C, que teve o maior aumento na comparação entre as duas tarefas, indo de 54% para 96%. Entendemos que essa situação se deve, em grande medida, ao estabelecimento de uma relação, por parte dos estudantes, entre os processos de exemplificar e generalizar, que passa pelo reconhecimento de regularidades ou padrões. A resposta de Laura, destacada na Figura 6, exemplifica essa situação.



Na afirmação C o processo de raciocínio é o exemplificar, pois dá exemplos em que acontece a mesma coisa, e a generalização pois através dos exemplos conclui que esse acontecimento é igual em todos os casos com essas características.

Figura 6. Justificação de Laura para a afirmação C na tarefa final

Outras leituras que chamam a atenção na Tabela 2 dizem respeito ao processo de classificar no caso da afirmação D, com percentagens em torno de 75% nas duas tarefas, e da afirmação E, cuja percentagem praticamente triplicou, indo de 11% para 31%. Entendemos que as características do paralelogramo presentes nas afirmações D e E levaram os participantes a associá-las ao processo de classificar, ou seja, consideraram a identificação de características como uma forma de classificação. Tal pode relacionar-se com as vivências anteriores enquanto estudantes em que a classificação se enquadra, sobretudo na geometria e se prende essencialmente com a identificação das propriedades das figuras geométricas e não tanto com a atividade de fazer grupos, identificando critérios de inclusão e exclusão desses grupos. Estes resultados revelam que não existe um conhecimento claro por parte dos estudantes sobre em que consiste o processo de classificar, já que associam a identificação de propriedades comuns de objetos matemáticos a este processo apesar da ausência de uma organização envolvendo mais do que uma classe. A justificação da estudante Alice, destacada na Figura 7, corrobora essa perspetiva.



Quanto a classificação está presente nas afirmações B, D, E e F, pois em todas elas são apresentadas características de figuras, ou seja classificaçãoes das mesmas.

Figura 7. Justificação de Alice para o processo de classificar na tarefa final

Em relação ao processo de justificar, a mudança de 4% para 19% na afirmação C também se destaca na Tabela 2. Não encontramos nas respostas dos cinco estudantes uma ilustração deste processo com recurso a esta afirmação, pelo que não conseguimos inferir o que pode estar na base desta subida de percentagem.

Segue-se uma análise dos processos do raciocínio solicitados na Questão 2(b).

Explicitando o que são processos de raciocínio

Nesta seção, a partir das respostas dos estudantes nas duas tarefas, apresentamos a sua análise para cada um dos processos. No que se segue, apresentamos as tabelas obtidas, discutindo e exemplificando as categorias mais relevantes.

Sobre o processo de Generalizar

A Tabela 3 apresenta as categorias identificadas sobre o processo de generalizar. Na tarefa inicial, as percentagens mostram-se divididas, com destaque para as categorias *Ideia de estender características/propriedades* para mais casos (54%), *Apresentar uma regra* (32%) e *Exemplificar como apoio ao generalizar* (29%).

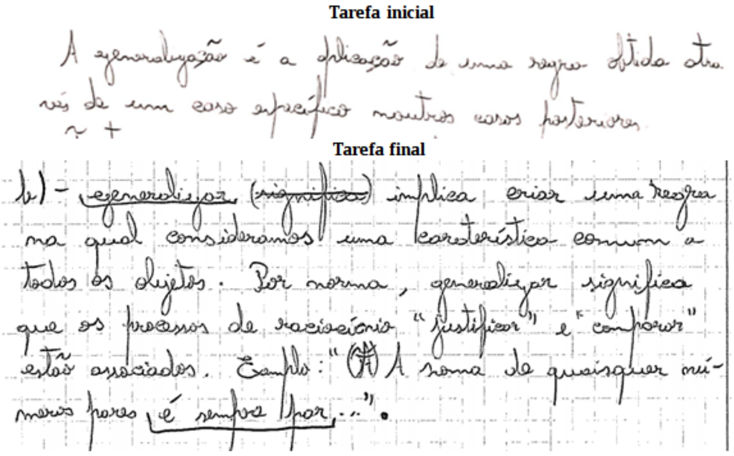
Tabela 3. Categorias relacionadas com o processo de generalizar

Categorias	**Tarefa inicial***		**Tarefa final***	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Ideia de estender características/propriedades para mais casos	15	54%	21	81%
Exemplificar como apoio ao generalizar	8	29%	9	35%
Apresentar uma regra	9	32%	5	19%
Relaciona generalizar com justificar	1	4%	4	15%
Respostas circulares / Não responderam	4	15%	2	8%

*Uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma categoria, por isso a soma das percentagens não é 100%.

Na tarefa final, destaca-se o aumento significativo da categoria *Ideia de estender características/propriedades para mais casos*, que passou de 54% para 81% e a diminuição da categoria *Apresentar uma regra*, que caiu de 32% para 19%. Não obstante a apresentação de uma regra seja inerente ao processo de generalizar, o facto de esta ideia ter decrescido nas respostas da tarefa final pode relacionar-se com o conteúdo da experiência de formação que, ao incidir em produções de alunos do 1.º CEB, não lidou com situações de apresentação de uma regra. Estas percentagens indicam que boa parte dos estudantes incorporou nas suas interpretações um elemento essencial sobre a ideia do processo de generalizar, designadamente a extensão de propriedades ou características matemáticas a domínios mais vastos.

Além disso, as respostas da tarefa final revelam um maior conhecimento dos participantes na relação entre o generalizar e outros processos do raciocínio matemático, como evidenciam os 35% associados à categoria *Exemplificar como apoio ao generalizar* e os 15% da categoria *Relaciona generalizar com justificar*, destacados na Tabela 3. Na tarefa inicial, a relação entre generalizar e demais processos do raciocínio ficou restrita aos 29% do *Exemplificar como apoio ao generalizar* e aos 4% da categoria *Relaciona generalizar com justificar*. A resposta de Nuno na tarefa final, destacada na Figura 8, traz elementos de três das categorias identificadas na Tabela 3.



(Tarefa inicial) A generalização é a aplicação de uma regra obtida através de um caso específico noutros casos posteriores.
(Tarefa final) b) – generalizar implica criar uma regra na qual consideramos uma característica comum a todos os objetos. Por norma, generalizar significa que os processos de raciocínio "justificar" e "comparar" estão associados. Exemplo "A soma de quaisquer números pares é sempre par...".

Figura 8. Respostas de Nuno para o processo de generalizar

Nuno apresenta as ideias de estender características para outros casos e a elaboração de uma regra; além disso, relaciona o processo de generalizar com os processos de justificar e comparar, indicando um conhecimento mais inter-relacionado sobre o desenvolvimento dos processos do raciocínio matemático. Quando refere "Por norma, generalizar significa que os processos de raciocínio "justificar" e "comparar" estão associados", parece querer indicar a associação de comparar e justificar ao processo de generalizar. O exemplo ilustrativo que colocou é a afirmação A, tendo transcrito apenas a parte inicial relativa ao processo de generalizar sendo que a parte restante representada pelas reticências diz respeito ao processo de justificar. Assim, Nuno parece compreender que a identificação de uma característica comum a vários objetos matemáticos implica comparar esses objetos relativamente à característica em causa (no caso da afirmação A, comparar a paridade das somas de dois números pares), a qual antecede a extensão a todo o domínio, extensão esta destacada por Nuno ao sublinhar "é sempre par". Por outro lado, Nuno evidencia atribuir importância ao binómio generalizar-justificar ao selecionar a afirmação A que ilustra esse binómio: o aluno que formulou esta afirmação preocupou-se não apenas em formular uma generalização, mas avançou para um processo de justificar a generalização, apresentando uma razão pela qual esta é verdadeira.

Além disso, se comparada com a resposta apresentada na tarefa inicial, quando Nuno sustenta que "A generalização é a aplicação de uma regra obtida através de um caso específico noutros casos posteriores" (Figura 8), nota-se um evidente refinamento do conhecimento deste participante com relação a este processo na tarefa final.

Sobre o processo de Justificar

A Tabela 4 apresenta as categorias relativas ao processo de justificar e respetivas frequências.

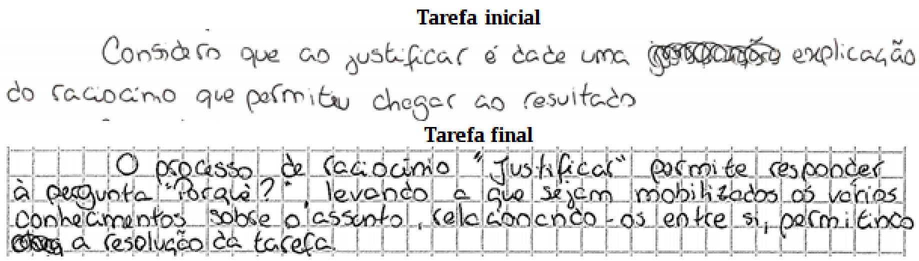
Tabela 4. Categorias relacionadas com o processo de justificar

Categorias	Tarefa inicial*		Tarefa final*	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Ideia de argumentar	19	68%	22	85%
Relacionam justificar com exemplificar	3	11%	4	15%
Ideia de verdade	3	11%	1	4%
Ideia do formal/prova	5	18%	-	-
Respostas circulares / Não responderam	4	15%	2	8%

*Uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma categoria, por isso a soma das percentagens não é 100%.

A *Ideia de argumentar*, categoria que engloba as respostas que enquadram o justificar como uma construção de encadeamentos lógicos conduzindo a uma conclusão, obteve maior destaque nas duas tarefas, com crescimento significativo na tarefa final, indo de 68% para 85%.

A estudante Daniela relacionou, nas duas tarefas, a ideia de argumentar com o processo de justificar, conforme destacado na Figura 9; entretanto, na tarefa final, podemos observar um aprimoramento do conhecimento da estudante, uma vez que ela incorpora ideias sobre o estabelecimento de relações e a articulação entre "vários conhecimentos" ao definir o processo de justificar.



(Tarefa inicial) Considero que ao justificar é dada uma explicação do raciocínio que permitiu chegar ao resultado.
(Tarefa final) O processo de raciocínio "justificar" permite responder à pergunta "Porquê?", levando a que sejam mobilizados os vários conhecimentos sobre o assunto, relacionando-os entre si, permitindo a resolução da tarefa.

Figura 9 – Respostas de Daniela para o processo de justificar

Por outro lado, ideias que relacionam o justificar com a noção de verdade e com a noção de formal/prova, que tiveram algum destaque na tarefa inicial, são praticamente abandonadas pelos participantes na tarefa final. A relação entre o justificar e o exemplificar, embora a sua percentagem tenha crescido na tarefa final, permaneceu uma ideia pouco destacada pelos participantes, conforme indicam os 11% e 15% mencionados na Tabela 4.

Assim, a grande maioria dos estudantes, sobretudo na tarefa final, associou este processo a uma argumentação de natureza racional, enfatizando a função explicativa em detrimento da função verificativa, pelo seu potencial de promoção da compreensão matemática.

Sobre o processo de Exemplificar

Da análise das respostas apresentadas pelos estudantes para o processo de exemplificar emergiram as categorias apresentadas na Tabela 5. As respostas da tarefa final indicam uma melhoria da ideia do exemplificar como um processo auxiliar de outros processos; as percentagens relacionadas com o *exemplificar para justificar*, que subiu de 68% para 74%, e do *exemplificar para generalizar*, de 7% para 18%, confirmam esta perspetiva.

Tabela 5. Categorias relacionadas com o processo de exemplificar

Categorias	**Tarefa inicial***		**Tarefa final***	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Exemplificar para justificar	19	68%	19	73%
Exemplificar como algo concreto (em oposição ao genérico)	8	29%	6	23%
Exemplificar para generalizar	2	7%	5	19%
Exemplificar em oposição ao demonstrar	2	7%	1	4%
Respostas circulares / Não responderam	4	14%	3	12%

*Uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma categoria, por isso a soma das percentagens não é 100%.

Por outro lado, ideias sobre o exemplificar em oposição ao genérico (*Exemplificar como algo concreto*) e em oposição ao demonstrar, embora tenham apresentado diminuição nas respostas da tarefa final, também merecem destaque. As respostas do estudante Nuno, apresentadas na Figura 10, são exemplos de categorias apresentadas na Tabela 5.

Nuno coloca, na tarefa inicial, o exemplificar como um processo auxiliar do generalizar, perspetiva que fica caracterizada na passagem “que corroborem para um determinado enunciado ou lei (regra)”. Na tarefa final, ele relaciona o exemplificar com o processo de justificar, começando por opô-lo ao processo de demonstrar, para explicitar, em seguida que, no exemplificar, a justificação reporta-se a exemplos concretos. Ao ilustrar o seu entendimento do processo de exemplificar com a afirmação E, Nuno parece interpretar este processo não como um suporte a generalizar (depois de verificar uma relação em lados concretos de paralelogramos), mas como uma forma de justificar a veracidade de uma generalização, apoiada em exemplos concretos. Uma vez que contrapõe o exemplificar ao demonstrar, Nuno parece assumir que o processo de demonstrar envolve a generalidade do universo em causa e que uma justificação empírica não constitui um meio adequado de validação.

Tarefa inicial

Exemplificar significa enunciar vários exemplos, vários resultados, métodos e estratégias que corroborem para um determinado enunciado ou lei (regra).

Tarefa final

- Exemplificar não significa demonstrar. Exemplificar tem que ver com a adequação da justificação em relação a exemplos concretos. Exemplo: "... comprimento, por exemplo..."

(Tarefa inicial) Exemplificar significa enunciar vários exemplos, vários resultados, métodos e estratégias que corroborem para um determinado enunciado ou lei (regra).
(Tarefa final) Exemplificar não significa demonstrar. Exemplificar tem que ver com a adequação da justificação em relação a exemplos concretos. Exemplo: "... comprimento, por exemplo. ..."

Figura 10. Respostas de Nuno para o processo de exemplificar

Sobre o processo de Classificar

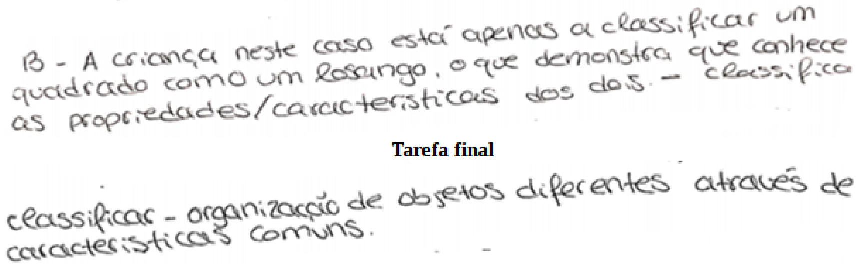
Ideias sobre *observar propriedades/características* de objetos matemáticos e de *formar grupos* foram destacadas pelos estudantes nas duas tarefas, contudo houve um aumento significativo nas percentagens dessas duas categorias na tarefa final, conforme destacado na Tabela 6.

Tabela 6. Categorias relacionadas com o processo de classificar

Categorias	Tarefa inicial*		Tarefa final*	
	Fr. abs.	%	Fr. abs.	%
Ideia de observar propriedades/características	17	61%	22	85%
Ideia de formar grupos	5	18%	9	35%
Respostas circulares	7	25%	-	-
Não responderam	3	11%	4	15%

*Uma resposta pode ser enquadrada em mais de uma categoria, por isso a soma das percentagens não é 100%.

Além disso, a análise da tarefa inicial apontou uma percentagem significativa de 25% de *Respostas circulares*, categoria que não foi identificada na tarefa final. E, embora 15% dos participantes não tenham apresentado uma resposta do processo de classificar na tarefa final, a comparação entre os dois momentos de aplicação da tarefa indica uma melhoria sensível do conhecimento dos participantes em identificar características associadas a este processo.


Tarefa inicial

B - A criança neste caso está apenas a classificar um quadrado como um losango, o que demonstra que conhece as propriedades/características dos dois. - classifica

Tarefa final

classificar - organização de objetos diferentes através de características comuns.

(Tarefa inicial) B – A criança neste caso está apenas a classificar um quadrado como um losango, o que demonstra que conhece propriedades/características dos dois – classifica.
(Tarefa final) Classificar – organização de objetos diferentes através de características comuns.

Figura 11. Respostas de Andrea para o processo de classificar

A estudante Andrea relacionou, nas duas tarefas, o processo de classificar com a *ideia de observar propriedades/características* comuns entre objetos matemáticos, conforme destacado na Figura 11. Ainda, na resposta dada na tarefa final, podemos identificar uma *ideia de formação de grupos* a partir da identificação de propriedades, que fica caracterizada pela expressão “organização de objetos”. Nesse sentido, há um refinamento das ideias da estudante sobre o classificar, pois ela incorpora novos elementos à sua resposta.

Discussão e conclusão

Concluímos que a maior parte dos estudantes participantes neste estudo, futuros professores, tem um conhecimento razoável sobre raciocínio matemático, considerando-o como uma capacidade que permite obter novo conhecimento a partir de outras afirmações matemáticas (Jeannotte & Kieran, 2017), bem como dos seus processos específicos, quer antes quer depois da experiência de formação. Verifica-se alguma melhoria no seu desempenho após a experiência de formação com uma explicitação mais clara e/ou refinada dos vários processos pedidos para serem evidenciados, principalmente dos processos que consideramos centrais (generalizar e justificar).

No que concerne aos processos de generalizar e de justificar, observamos, globalmente, na tarefa final, um acréscimo de acertos na associação, ou não, das afirmações a este processo. A ideia essencial inerente à compreensão do que consiste o processo de generalizar, a de estender as características identificadas em alguns casos para além do domínio em causa (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2017), é explicitada por um maior número de estudantes após a experiência de formação. O acréscimo evidenciado no processo de justificar na tarefa final parece, por um lado, conferir-lhe um maior grau de importância, e por outro, associar-lhe sobretudo uma dimensão argumentativa, de modo a alcançar uma conclusão.

Os resultados relativos aos processos de justificar e classificar parecem relacionar-se com as experiências escolares anteriores. Por um lado, enquanto na tarefa inicial, alguns estudantes associam o processo de justificar à prova como meio de verificar a verdade de uma dada afirmação matemática, parecendo ter sido um processo que, provavelmente, lhes foi solicitado anteriormente na sua vida escolar, na tarefa final, a categoria da prova não surge em nenhuma das respostas e a ideia da verdade regista um decréscimo, o que se pode relacionar com o facto de as produções de alunos de 1.º CEB, analisadas na experiência de formação, conterem justificações de natureza argumentativa, visando sobretudo a fundamentação do porquê (Lannin et al., 2011; Stylianides et al., 2013), e não propriamente provas de verificação da verdade das afirmações matemáticas. Por outro, o processo de classificar constitui um elemento crítico do conhecimento destes estudantes, verificando-se a manutenção de percentagens elevadas e/ou de acréscimo, na tarefa final, na associação, a este processo, de afirmações que consideramos não o ilustrarem. Trata-se de afirmações alusivas a propriedades de figuras geométricas, mas que não comportam uma organização envolvendo mais do que uma classe (Brunheira, 2019), o que nos leva a considerar que, provavelmente, os estudantes associavam a classificação à caracterização das propriedades das figuras geométricas nas suas experiências anteriores. A seleção destas afirmações, em específico, e o facto da categoria *Ideia de observar propriedades/características* ser a categoria com maior percentagem no conjunto das respostas dos estudantes, leva-nos a concluir que esta ideia predomina na forma como estes estudantes entendem o processo de classificar, principalmente após a experiência de formação, comparativamente com a ideia de formar grupos segundo critérios baseados em propriedades matemáticas que, não obstante ser uma ideia fundamental inerente a este processo manteve uma percentagem reduzida na tarefa final.

No que respeita ao processo de exemplificar, os estudantes exprimiram sobretudo a ideia deste processo suportar outros, designadamente generalizar e justificar, tal como referido por Jeannotte e Kieran (2017), registando-se um acréscimo na tarefa final, com destaque para a relação entre este processo e o de justificar. Também houve na tarefa final um acréscimo de estudantes que relacionaram outros processos de raciocínio, nomeadamente generalizar e justificar (na medida em que importava justificar as generalizações produzidas). Esta última associação é convergente com a perspetiva de Stylianides (2009) e Stylianides et al. (2013) de sublinhar a importância de estabelecer conhecimento matemático, quer investigando ideias matemáticas conducentes a generalizações, quer investigando as razões que as justificam como forma de dar sentido a esse mesmo conhecimento.

Se grande parte dos professores dos primeiros anos tem um conhecimento reduzido sobre o raciocínio matemático, de acordo com o referido por Stylianides et al. (2013), os estudantes do presente estudo revelaram conhecimento sobre esta capacidade, evidenciando um maior refinamento após a experiência de formação. A reduzida clarificação do significado do processo de classificar evidenciada por estes estudantes pode informar o Ciclo 2 da experiência de formação, no sentido de se dar uma maior atenção ao que consiste este processo, nomeadamente focando a dimensão de formar grupos. No que respeita à centralidade dos processos de generalizar e justificar, consideramos que o Ciclo 2 deve manter esta orientação, focando sobretudo estes dois processos.

Como implicações deste estudo, reforçamos a importância de priorizar, na formação inicial dos futuros professores dos primeiros anos, o desenvolvimento de experiências de formação significativas que permitam, por um lado, aprofundar de forma interrelacionada o seu conhecimento sobre o raciocínio matemático com o conhecimento dos alunos e das práticas de ensino, e por outro, desenvolver capacidades de interpretação dos processos de raciocínio dos alunos, bem como das ações promotoras dos mesmos. Efetivamente, uma das razões que poderá estar relacionada com a evolução destes futuros professores, evidenciada na tarefa final, é o facto de o trabalho incidente nos processos de raciocínio ter sido ancorado em casos concretos de aulas do 1.º CEB, e estreitamente ligado à discussão e reflexão sobre a prática docente. Será pertinente, pois, estudar futuramente como podem estes futuros professores desenvolver o seu conhecimento didático sobre as ações docentes a conduzir nas aulas para promover o raciocínio matemático nos alunos de 1.º CEB.

Agradecimentos

A investigação teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Referências

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: NCTM.

Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo* (4.ª ed). Lisboa: Edições70.

Brunheira, L. (2019). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos.* (Tese de doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/38922

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72-113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia, Spain: PME.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 3, pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc. & NCTM.

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74,* 26–37. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(3), 201-222.

Jeannotte, D, & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kilpatrick, J, Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar.* Lisboa: Gradiva.

Maaß, J., & Schloglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results*. Rotterdam: Sense Publishers.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, *32*(62), 781-801. https://doi.org/10.1590/19804415v32n62a02

MES – Ministry of Education Singapore (2012). Mathematics syllabus - Primary One to Six. Recuperado de https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Matemática.* Lisboa: DGE.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 2014)

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem-solving, and explanation in mathematics teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 223-236). New York: Springer.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., Serrazina, L, Guimarães, H. M., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME, DGIDC.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (2012). A integração curricular da demonstração. *Da Investigação às Práticas: Estudos de Natureza Educacional, 2*(2), 53-77. https://doi.org/10.25757/invep.v2i2.50

Schultz-Ferrel, K., Hammond, B., & Robles, J. (2007). *Introduction to reasoning and proof: Grades Prek-2*. Portsmouth: Heinemann.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validation of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). Prague, Czech Republic: PME.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237-253.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258-288. https://doi.org/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(3), 145–166.

Stylianides, G., Stylianides, A., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463-1490.

Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(5), 1115-1135.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.