Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros

Specialized knowledge of Mathematics teacher educator to discuss order relation in the set of integer numbers

Marieli Vanessa Rediske de Almeida
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Brasil
marieli.almeida@outlook.com

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Brasil
cmribas78@gmail.com

Resumo. As pesquisas com foco no formador de professores de Matemática, com abordagens diversas, vêm ganhando destaque na área de Educação Matemática nos últimos anos. Em particular, pesquisas sobre o conhecimento do formador têm dado origem a diferentes modelos de conhecimento. Nesse trabalho, buscamos compreender o conhecimento de um matemático, a partir da observação de sua prática em sala de aula como formador de professores de Matemática no Brasil, no contexto de uma disciplina de Teoria dos Números. A investigação se configura como um estudo de caso instrumental, no qual se pretende compreender o conhecimento revelado e mobilizado pelo sujeito. As informações foram coletadas por meio da gravação em áudio e vídeo de uma aula e foram analisadas buscando identificar o conhecimento especializado desse matemático enquanto formador de professores. Entre os resultados, são apresentados indicadores do Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge*) do formador, bem como elementos do seu Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*). Os indicadores obtidos constituem mais um passo na elaboração de um modelo de conhecimento especializado do formador de professores de Matemática.
Palavras-chave: relação de ordem; conhecimento do formador; *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*; Teoria dos Números.

Abstract. Studies regarding the Mathematics teacher educator have been receiving spotlights in the last years. In particular, the research on the Mathematics teacher educator's knowledge has led to the construction of different models of knowledge. In this work, we attempt to understand the knowledge of a mathematician considering the observation of his classroom practice as Mathematics teacher educator in a Brazilian Number Theory undergraduate course. The chosen research method was the instrumental case study, whose goal is to understand the revealed and mobilized subject's

knowledge. The data were collected by audio and video recording of a chosen class, which was analyzed in the perspective of identifying the specialized knowledge of this mathematician as a teacher educator. Among the results are indicators of the teacher educator's Mathematical Knowledge, as well as elements of his Pedagogical Content Knowledge. The obtained indicators constitute a new step in the elaboration of a Specialized Knowledge model for the Mathematics teacher educator.
Keywords: order relation; teacher educator's knowledge; Mathematics Teachers' Specialized Knowledge; Number Theory.

Recebido em fevereiro de 2019
Aceite para publicação em dezembro de 2019

Introdução

Atualmente o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores de Matemática é um objeto de pesquisa intensiva (Guala & Boero, 2017). Considerando que uma parte considerável desse conhecimento é adquirida na formação inicial, fica evidenciada a importância de pesquisas que buscam compreender como se desenvolve o conhecimento do futuro professor nessa etapa de sua formação.

No contexto brasileiro começa a discutir-se recentemente qual é o papel da Matemática nos cursos de licenciatura (e.g., Fiorentini & Oliveira, 2013; Moreira, 2012). Conforme Moreira (2012), ao analisar os planos curriculares de algumas das maiores universidades brasileiras (e.g., UFMG, UFPE; UFRJ; UNICAMP, USP) foi possível constatar que os conteúdos científicos, tais como Matemática, Física e Estatística ocupam entre 45 e 55% do tempo de formação. As disciplinas de conteúdo específico (e.g., Cálculo, Álgebra, Análise) costumam ser ministradas de forma independente das demais disciplinas relacionadas ao ensino (e.g., Didática da Matemática, Tendências em Educação Matemática, Estágio Supervisionado), que costumam ser ministradas nas faculdades de educação das universidades (Moreira, 2012). No Brasil, o curso de Matemática tem duas vertentes (curso de licenciatura[1] e curso de bacharelado[2]) e nestas encontramos dois cenários: exatamente as mesmas disciplinas de Matemática para ambos os cursos, ou cada curso com uma grade curricular específica, mas onde as ementas dessas disciplinas são muito semelhantes (Fiorentini & Oliveira, 2013).

Uma dessas disciplinas, comum a ambos os cursos, é a disciplina de Teoria dos Números. Usualmente esta é a primeira de duas disciplinas do campo da Álgebra, incluindo tópicos como divisibilidade, números primos ou congruências lineares. Ela propicia aos estudantes revisitar processos matemáticos básicos, fazendo com que reflitam sobre o próprio conhecimento matemático (Zazkis & Campbell, 1996).

Ainda que os conhecimentos envolvidos nessa disciplina sejam muito relevantes para uma ampla compreensão da Matemática e muitos de seus processos, as pesquisas focadas no ensino de Teoria dos Números, especialmente no contexto da formação de professores, são escassas (Bair & Rich, 2011; Oliveira & Fonseca, 2017).

Dentre as possíveis dificuldades encontradas pelos futuros professores ao cursar Teoria dos Números, pesquisas apontam dificuldades relacionadas com a compreensão da primalidade e do Teorema Fundamental da Aritmética (Oliveira & Fonseca, 2017; Zazkis & Campbell, 1996), relacionadas com a compreensão sobre divisibilidade (Zazkis, Sinclair, & Liljedahl, 2013), com números primos e suas propriedades (Zazkis & Liljedahl, 2004), assim como dificuldades para estabelecer conexões entre as relações de ordem, que são usadas no dia-a-dia, por meio de comparações, com o conceito formal de relação de ordem (Akdemir, Narh, & Kaşıkçı, 2015).

Assumindo que o conhecimento do professor que ensina Matemática é especializado (Carrillo et al., 2018), e que os principais agentes de promoção desse conhecimento são os docentes encarregados dessa formação, optamos por investigar o conhecimento especializado do formador que ensina Teoria dos Números na formação inicial. Como formadores de professores de Matemática, no contexto brasileiro, entendemos aqueles docentes da universidade que atuam na licenciatura, seja nas disciplinas didático-pedagógicas ou nas disciplinas específicas (Coura & Passos, 2017).

Neste artigo, a partir da análise da prática de sala de aula de um formador que ensina Teoria dos Números a estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática, buscamos compreender o conhecimento especializado mobilizado ao abordar a relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Referencial teórico

Iniciamos esta secção discutindo a noção de ordem ao longo do currículo escolar brasileiro, e a posterior formalização do conceito de relação de ordem no Ensino Superior. Discutimos posteriormente as principais dificuldades apresentadas por futuros professores no âmbito da Teoria dos Números e o papel do formador frente a estas dificuldades, e terminamos discutindo o conhecimento do formador no âmbito da relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Das noções de ordem na Educação Básica até a formalização do conceito de relação de ordem no Ensino Superior

Conforme a Base Nacional Comum Curricular[3] – BNCC (Ministério da Educação, 2018), documento que oferece orientações curriculares para a Educação Básica (Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – toda a escolaridade até a universidade), a noção de ordem, juntamente com as noções de equivalência, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, constituem as ideias fundamentais relacionadas com os distintos campos que compõem a Matemática: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Na BNCC, a ideia de ordem aparece nos anos iniciais do Ensino Fundamental (6-10 anos), na unidade temática Números, na qual se espera dos alunos o desenvolvimento de habilidades relacionadas com a leitura, escrita e ordenação de números naturais e racionais. Por exemplo, no 2.º ano, consta a habilidade EF02MA01 – "Comparar e ordenar números naturais (até à ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero)" (Ministério da Educação, 2018, p. 239).

Nos anos finais do Ensino Fundamental (11-14 anos), também na unidade temática Números, se espera que os alunos desenvolvam habilidades para reconhecer, comparar e ordenar números reais. Por exemplo, no 7.º ano, consta a habilidade EF07MA07 – "Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica" (Ministério da Educação, 2018, p. 261). Para o Ensino Médio (15-17 anos), a BNCC não explicita habilidades relacionadas com ordem, ordenação ou relação de ordem.

Nos cursos universitários de Matemática, as noções de ordenação adquiridas na Educação Básica são formalizadas no conceito de relação de ordem, o qual pode ser estudado em disciplinas como Lógica Matemática, Fundamentos de Matemática, Teoria de Conjuntos, Teoria dos Números, entre outras possibilidades. Uma relação de ordem é definida matematicamente da seguinte forma:

> Considere um conjunto A não vazio e $R \subseteq A \times A$ uma relação de A em A. A relação R é uma *relação de ordem parcial* se satisfizer as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva. Ademais, se R satisfizer também a propriedade dicotomia, então se diz que R é uma *relação de ordem total*.

No contexto da Teoria dos Números, a relação $R \coloneqq \{(a,b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, sendo uma relação de ordem parcial de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Além disso, quaisquer dois números inteiros são comparáveis segundo R, sendo válida a propriedade da dicotomia. Assim, R é uma relação de ordem total de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

A compreensão da relação de ordem nos números inteiros é fundamental no contexto da disciplina de Teoria dos Números e será necessária na compreensão de uma série de resultados subsequentes, tais como a existência de elemento mínimo e o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana (TADE). Conhecer a relação de ordem nos números inteiros e, de forma mais ampla, no conjunto dos números reais, é imprescindível no trabalho dos futuros professores de Matemática e, portanto, também é um conhecimento essencial ao formador.

A Teoria dos Números e o papel do formador na formação inicial de professores de Matemática

A disciplina de Teoria dos Números, tanto em cursos de licenciatura quanto em cursos de bacharelado, geralmente aborda tópicos relacionados com a divisibilidade, primalidade, congruências lineares, equações diofantinas, entre outros. Relacionados a cada um desses tópicos estão resultados matemáticos que precisam ser validados, o que acontece principalmente por meio de demonstrações. Dessa forma, na disciplina de Teoria dos Números, assim como em outras disciplinas de Matemática, as demonstrações estão presentes, não como tópico, mas como forma de validação ou justificação de resultados matemáticos.

Apesar da possível grande relevância da Teoria dos Números na formação de professores, esta possui uma abordagem prioritariamente formal e axiomática, com ênfase no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, não direcionada para a formação do futuro professor (Resende, 2007). Tal abordagem formal e axiomática empregada no ensino de Teoria dos Números (o mesmo pode ser considerado para outras disciplinas da formação de professores) está relacionada com o fato de os formadores tipicamente responsáveis por essas disciplinas no contexto brasileiro serem matemáticos e, além disso, a legislação brasileira não exigir e nem prever nenhuma preparação específica desses profissionais para atuação nos cursos de licenciatura (Almeida, Ribeiro, & Fiorentini, 2018).

Já há mais de duas décadas Zazkis e Campbell (1996) apontavam a fragilidade da formação de professores de Matemática em relação a conceitos como o de primalidade e a resultados como o Teorema Fundamental da Aritmética, destacando, por exemplo, a imensa dificuldade de futuros professores em compreender a unicidade da decomposição de números inteiros em fatores primos. Em pesquisas mais recentes foram identificadas dificuldades similares de futuros professores (Zazkis & Liljedahl, 2004) sobre os números primos e suas propriedades, incluindo dificuldades na aplicação do conceito de primalidade. Nesse sentido, apesar de ocupar uma parte considerável do currículo escolar, o estudo dos números naturais e inteiros não parece receber um tratamento correspondente na formação do professor de Matemática (Oliveira & Fonseca, 2017; Resende & Machado, 2012).

Para que esse tratamento dos tópicos matemáticos seja direcionado à formação de professores – de modo a que estes possam atribuir sentido e significado ao que fazem nas disciplinas da licenciatura com relação à matemática que vão ensinar, objetivando que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem – torna-se essencial colocar o foco no formador de professores, buscando compreender seu conhecimento matemático, conhecimento pedagógico e suas crenças relativamente à Teoria dos Números, ao seu ensino e sua aprendizagem. Em particular, aqui estamos interessados no conhecimento matemático e no conhecimento pedagógico do formador.

No contexto da Teoria dos Números, a demonstração não é tipicamente um tópico, mas empregue como uma forma de validar resultados, o que pode ser configurado como uma opção pedagógica dos formadores associada à própria disciplina. Gabel e Dreyfus (2017) apontam algumas lacunas no conhecimento pedagógico do formador de professores de Matemática sobre estratégias para o ensino de demonstrações, inclusive em matemáticos experientes. Os autores ressaltam, dessa forma, a necessidade de diálogo com matemáticos acerca de considerações pedagógicas que possam potencializar o ensino de Teoria dos Números para futuros professores de Matemática. É responsabilidade do formador desenvolver esse tipo de conhecimento nos futuros professores de Matemática e, entre os diversos profissionais atuantes na licenciatura, podemos distinguir, por sua formação relacionada com a Matemática, os matemáticos, os educadores matemáticos e os professores de Matemática que recebem e orientam os alunos da licenciatura nas escolas (Contreras, Montes, Muñoz-Catalán, & Joglar, 2017). Para que essa responsabilidade seja assumida e desenvolvida uma prática formativa com ela alinhada, é essencial que o formador de professores detenha um conhecimento especializado que contribua para desenvolver nos futuros professores de Matemática um conhecimento especializado (Carrillo et al., 2018) que lhes permita relacionar as aprendizagens provenientes de um curso de Teoria dos Números com sua futura prática matemática.

O conhecimento do formador de professores de Matemática

A caracterização do conhecimento do formador de professores de Matemática vem ganhando destaque na última década (e.g., Contreras et al., 2017; Zopf, 2010), e diversos modelos para caracterizar esse conhecimento vêm sendo propostos. Para discutir o conhecimento do formador tomamos por base o *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK[4] (Carrillo et al., 2018) focando, em particular, o *Mathematical Knowledge*[5] – pois o formador de professores é também um professor de Matemática – e a conceitualização do *Pedagogical Content Knowledge*[6] do formador de professores de Matemática considerada por Escudero-Ávila, Montes e Contreras (no prelo).

É importante salientar que se assume como conhecimento de um indivíduo "a informação que este tem disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas, ou desenvolver qualquer tarefa. Note-se que, de acordo com esta definição, o conhecimento não tem de ser necessariamente correto!" (Schoenfeld, 2010, p. 25). Assim, não pretendemos avaliar a correção ou não do conhecimento do sujeito, mas sim compreender o conteúdo desse conhecimento.

O conhecimento matemático e o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática

Tendo por base os trabalhos de Shulman (1986, 1987) e algumas pesquisas posteriores focando no conhecimento do professor de Matemática, Carrillo et al. (2018) apresentam uma conceitualização do conhecimento do professor como especializado – *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK, tanto no domínio matemático quanto pedagógico. Este modelo considera três domínios: o *Mathematical Knowledge*, o *Pedagogical Content Knowledge* e as crenças. Aqui focamo-nos no *Mathematical Knowledge* para discutir o conhecimento matemático revelado por um formador.

O MK é subdividido em três subdomínios: *Knowledge of Topics*[7] (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics*[8] (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics*[9] (KPM).

O KoT integra um conhecimento aprofundado de tópicos matemáticos, relativo a procedimentos, definições, propriedades, modelos e representações, significados, problemas e contextos, levando em conta a complexidade dos objetos matemáticos que podem estar presentes em sala de aula. No âmbito do tópico aqui abordado, considera-se parte deste subdomínio de conhecimento do professor e do formador saber que a relação $R \coloneqq \{(a,b)|a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaz a propriedade reflexiva.

O KSM compreende o conhecimento de conexões entre elementos matemáticos. Essas conexões podem ser relacionadas com o sequenciamento de conteúdos matemáticos; com o aumento ou diminuição da complexidade; e ser inter-conceituais, relacionadas com a demarcação de objetos matemáticos. Um exemplo de um conhecimento de conexões tanto do professor como do formador é conhecer que uma relação de ordem no conjunto das funções $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser construída a partir da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$: $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X \subseteq \mathbb{R}$.

O KPM sustenta-se na ideia de prática matemática como a atividade matemática realizada sistematicamente apoiada em uma base lógica a partir da qual regras podem ser extraídas. Contém o conhecimento do professor relativo a, por exemplo, saber definir, demonstrar, justificar, fazer deduções e induções, dar exemplos e compreender o papel de contraexemplos. Forma parte deste subdomínio conhecimento dos diferentes tipos de demonstração das propriedades de uma relação de ordem (e.g., por absurdo, direta, por contraexemplo) tanto do professor como do formador.

O Pedagogical Content Knowledge (PCK) do formador de professores de Matemática

Tendo por base as especificidades do conhecimento pedagógico do professor consideradas na conceitualização do MTSK, Escudero-Ávila et al. (no prelo) buscam avançar nas discussões sobre o PCK do formador de professores de Matemática. Esse avanço é efetuado considerando as especificidades do conhecimento pedagógico do formador à luz do trabalho profissional, que se assume terá de efetuar/promover o desenvolvimento do MTSK do (futuro) professor.

Dessa forma são considerados três subdomínios no PCK do formador: *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*[10], *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*[11] e *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes*[12].

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* considera o conhecimento do formador relativamente à caracterização do desenvolvimento profissional dos (futuros) professores; às mais prováveis dificuldades na sua especialização enquanto professores de Matemática; à sequência ou foco mais apropriado para a construção e desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; ao ponto de partida em que os (futuros) professores se encontram – em termos de conhecimento – ao iniciarem a formação. Como exemplo, inclui-se conhecer que os estudantes devem ser capazes de abstrair conceitos já conhecidos e buscar representações não convencionais, por exemplo, para os números naturais, decidindo sobre o foco mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores.

Fazem parte do subdomínio *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes* conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento das especificidades do conhecimento profissional do professor; conhecer as limitações e potencialidades de cada tarefa a explorar; conhecer o *design* e utilização de várias metodologias de avaliação; conhecer as características mais importantes de cada tópico potenciando o desenvolvimento desse conhecimento e das conexões entre elas.

No *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes* inclui-se o conhecer os padrões curriculares tanto do curso em que atua como formador, quanto dos níveis de ensino em que os (futuros) professores irão atuar. Há que considerar que a demanda de conhecimento matemático pode variar de acordo com o perfil do formador e que esse conhecimento depende do contexto (e.g., departamento, universidade, país) em que o formador desenvolve seu trabalho, e pode incluir conhecer como a formação é conduzida em outros países, bem como estar apto a estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos (futuros) professores.

Contexto e método

Essa pesquisa se insere em um contexto mais amplo, que busca compreender o conhecimento especializado de formadores de professores de Matemática que ministram Teoria dos Números na formação inicial. Em particular, aqui focamos o conhecimento de um formador no tópico de Divisibilidade e, com esse intuito, foi realizada uma investigação do tipo estudo de caso, numa perspectiva instrumental, buscando assim compreender um fenômeno mais amplo a partir do caso considerado, que pode oferecer *insights* sobre o assunto (Alves-Mazzotti, 2006) e permitir agregar informações à teoria (Stake, 1995).

Os sujeitos da investigação são dois formadores que ministram Teoria dos Números na graduação em Matemática (licenciatura e bacharelado) em uma universidade no Brasil. Aqui focamos a prática de um desses sujeitos, Benny (pseudônimo), investigando seu conhecimento especializado revelado no âmbito do ensino da relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Benny é matemático há mais de 20 anos, possuindo vasta experiência em disciplinas de graduação e pós-graduação e suas pesquisas estão centradas na área de Álgebra. As informações foram coletadas em uma disciplina de Teoria dos Números (de 60 horas), que era já a sexta vez que Benny lecionava, e que forma parte da grade curricular da licenciatura e bacharelado em Matemática. Foram coletadas informações durante oito aulas, gravadas em áudio e vídeo, centradas na prática do formador no início do segundo semestre de 2018; efetuadas duas entrevistas semiestruturadas (no início e no final do semestre); entrevistas breves depois de cada aula e notas de campo durante a observação não participante.

Nesse artigo analisamos e discutimos o conhecimento revelado por Benny em uma aula de introdução da relação de ordem no conjunto dos números inteiros, tendo a gravação do áudio da aula sido transcrita e posteriormente complementada com a visualização do vídeo e dividida em episódios fenomenologicamente coerentes (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2012). Em cada um desses episódios foi identificado o conhecimento revelado pelo formador e posteriormente organizadas as evidências e conteúdo desse conhecimento, estruturado pelo subdomínio a que se refere. Aqui efetuamos inicialmente a discussão dos subdomínios do MK e posteriormente do PCK.

Para as transcrições, foram empregados os seguintes padrões: i) "Benny" indica uma fala do formador; ii) "estudantes" indica uma fala dos estudantes; iii) "..." indica uma breve pausa na fala do sujeito; iv) "[...]" indica supressão de um trecho; v) "[]" indica uma ação do formador; e vi) "()" indica um comentário da pesquisadora (primeira autora). Um exemplo de transcrição considerando os padrões descritos é apresentado a seguir.

Benny:	Qual seria a prova disso?
Estudante:	(Inaudível).
Benny:	Não, não. Mas, ainda não sei o que é tricotomia. Tudo bem... Vamos ver, já está pouquinho, mas vocês estão andando demais. [...] estou pedindo a vocês que provem isto [Aponta para a propriedade escrita na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$], a partir destas coisas, que nós já sabemos.

Para a análise do conteúdo do MK revelado recorremos às categorias propostas por Carrillo et al. (2018), onde os indicadores receberam um acrônimo composto pela sigla do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial (Tabela 1).

Tabela 1. Subdomínios e categorias do MK (adaptado de Carrillo et al. (2018, pp. 242-245))

Subdomínios	**Categorias**	**Indicadores**
KoT	*Definitions, properties and foundations*[13]	KoTd1
	Phenomenology and applications[14]	KoTph1
	Procedures[15]	KoTp1
	Registers of representation[16]	KoTr1
KSM	*Connections based on simplification*[17]	KSMs1
	Connections based on increased complexity[18]	KSMc1
	Auxiliary connections[19]	KSMa1
	Transverse connections[20]	KSMt1
KPM	*How to define*[21]	KPMd1
	How to prove[22]	KPMp1
	How to justify[23]	KPMj1
	How to make deductions and inductions[24]	KPMdi1
	How to give examples[25]	KPMe1
	Role of counterexamples[26]	KPMrc1

Quanto ao PCK do formador recorremos aos conhecimentos elencados por Escudero-Ávila et al. (no prelo). Por se tratar de um modelo ainda em desenvolvimento, para cada subdomínio consideramos uma lista de conhecimentos (e não de categorias) do formador e os indicadores são formados pela sigla do subdomínio seguida de um número sequencial (Tabela 2).

Por forma a entender melhor o contexto da aula apresentamos uma descrição sintética do que ocorreu na aula anterior e na aula que será analisada. Na aula anterior, Benny efetuou uma discussão focada em propriedades dos números inteiros; introduziu um subconjunto dos números inteiros para se referir ao conjunto dos números naturais ($\mathcal{P}$) e discutiu a ideia intuitiva do algoritmo da divisão euclidiana. Nesta segunda aula, que iremos analisar, Benny começa por relembrar que o conjunto dos números inteiros, munido com as operações de adição e multiplicação usuais, é um anel, e retoma a definição do subconjunto $\mathcal{P}$ introduzindo algumas das suas propriedades. Continua introduzindo a relação de ordem, relembrando a notação ($<$ e $\leq$), seu significado e propriedades, pontuando as diferenças entre elas; discute as semelhanças e diferenças entre as relações $\leq$ e $\subseteq$ (entre elementos de conjuntos – em particular $\mathcal{P}$ – e entre conjuntos). Benny então nomeia a relação $\leq$ como relação de ordem sobre os números inteiros e explica aos estudantes que dizer que uma relação é de ordem implica dizer que ela apresenta as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica.

Optámos por apresentar a análise e discussão de forma a trazer evidências do conhecimento revelado por Benny nos diferentes subdomínios e, portanto, essa apresentação não segue uma ordem cronológica, mas com um foco no conteúdo de cada um desses subdomínios do MK e do PCK – considerando os indicadores no MK (Tabela 1) e os conhecimentos do PCK (Tabela 2).

Tabela 2. Subdomínios e categorias do PCK (adaptado de Escudero-Ávila et al. (no prelo))

Subdomínios	Conhecimentos	Indicadores
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecer aspectos do desenvolvimento profissional dos futuros professores	KFPDMT1
	Conhecer as dificuldades mais prováveis em termos da especialização do conhecimento enquanto professores de matemática	KFPDMT2
	Conhecer sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento, identidade e para desenvolver as habilidades dos futuros professores	KFPDMT3
	Saber o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4
Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes	Conhecer um repertório de atividades para o desenvolvimento do conhecimento, identidade e prática profissional do futuro professor	KTCIMTEP1
	Saber das limitações e potencialidades de cada atividade	KTCIMTEP2
	Conhecer formas de desenvolver a identidade e habilidades profissionais	KTCIMTEP3
	Conhecer o *design* e utilização de métodos de avaliação dos programas de formação inicial e contínua	KTCIMTEP4
	Saber dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	KTCIMTEP5
Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1
	Conhecer os padrões curriculares dos níveis de ensino em que os futuros professores irão atuar	KSMTEP2
	Conhecer, estabelecer, explicar e avaliar os objetivos de aprendizagem dos futuros professores	KSMTEP3

Análise e discussão

De um modo geral, a análise da prática de Benny mostra uma predominância de evidências no âmbito do MK, o que era já, de certa forma, esperado tanto pelo contexto da disciplina específica (estudantes de Matemática da licenciatura e do bacharelado) quanto pela própria formação e foco do formador.

O *Mathematical Knowledge* de Benny

O formador relembra a notação $<$ introduzida na aula anterior [KoTr1 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros] e o significado da expressão $a < b$ [KoTd1 – sabe que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis, ou seja, que um número é menor do que outro].

Benny: Se temos dois elementos, em $\mathbb{Z}$, eu tinha dito, que eu vou denotar assim [escreve na lousa $a < b$], este símbolo [escreve na lousa $<$], o que vai significar para nós... que significa isso para nós?
Estudantes: Que a é menor que b.
Benny: Quê? Não. Que $b - a$ vai estar onde? Nesse $\mathcal{P}$ da vida. Nesse aí vai estar, por definição, está bem?

Ao questionar os estudantes sobre o significado do símbolo <, Benny não aceita a resposta dos estudantes (que a é menor que b), evidenciando esperar que utilizassem uma expressão equivalente.

Na sequência, Benny introduz a notação $\leq$ [KoTr2 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros], com objetivo de reforçar a definição que está sendo adotada para o símbolo $<$, e retoma o significado do operador 'ou' [KoTd2 – conhece a definição do operador lógico $\vee$], que supõe ser de conhecimento dos estudantes.

Benny: Se eu falo a menor ou igual que b [Escreve na lousa $a \leq b$], que significa isso? O que significaria isso, de forma natural? Que a é igual a b ou, este ou vou escrever assim também [Escreve na lousa $a < b$]. [Indica na lousa]. Ou isso, ou isso, certo? Isso é lógica, não? Verdadeiro, verdadeiro, que me dá? Se lembram de lógica, não? Verdadeiro, verdadeiro. Verdadeiro, falso.

Benny introduz a propriedade antissimétrica [KoTd3 – sabe que os números inteiros satisfazem a propriedade antissimétrica, ou seja, se um número inteiro é menor ou igual a outro e esse outro é menor ou igual que o primeiro, então eles são iguais]. No entanto, ao enunciar essa propriedade, faz uso de uma linguagem que não é a mais adequada em termos de correspondência entre a validade matemática e a correspondente na linguagem natural [KoTr3 – saber que para além de diferentes representações entre $\wedge$ e "e" estes têm também diferentes significados na linguagem correspondente].

Benny: Então, se eu tiver dois elementos, digamos a e b, com essas condições, onde a menor igual que b [Escreve na lousa $a \leq b$] e, o e da vida, o 'e' lógico, digamos [Escreve na lousa $a \leq b \wedge$], b menor igual que a [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow$], então, qual seria minha conclusão?
Estudante: $a = b$.
Benny: $a = b$. Então era isso que se esperaria. [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$].

Quando Benny pergunta aos estudantes como seria a prova desse fato e um deles sugere que a demonstração envolva tricotomia, Benny pontua que isso ainda não foi definido e pede que os estudantes utilizem os resultados que estão disponíveis até ao momento (e.g., propriedades do anel dos números inteiros) [KoTp1 – sabe que a demonstração da propriedade antissimétrica pode ser efetuada recorrendo a propriedades do anel dos números inteiros].

Benny: Qual seria a prova disso?
Estudante: (Inaudível).

Benny: Não, não. Mas, ainda não sei o que é tricotomia. Tudo bem... Vamos ver, já está pouquinho, mas vocês estão andando demais. [...] estou pedindo a vocês que provem isto [Aponta para a propriedade escrita na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$], a partir destas coisas, que nós já sabemos.

Benny não demonstra a propriedade transitiva da relação $\leq$, mas afirma sua validade [KoTd4 – conhece a propriedade transitiva da relação $\leq$ a qual se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro], considerando a semelhança com a demonstração da transitividade da relação $<$, demonstrada num momento anterior da aula.

Num momento posterior, o formador estabelece conexões entre a relação $\leq$ e a relação $\subseteq$ de inclusão de conjuntos [KoTd5 – conhece a definição da relação $\subseteq$], afirmando que a comparação de conjuntos é feita a partir da relação $\subseteq$, enquanto a relação $\leq$ permite comparar elementos do conjunto $\mathcal{P}$. Ao estabelecer características comuns entre estas duas relações (entre conjuntos e elementos de conjuntos), Benny estabelece uma conexão transversal entre as relações, ao apontar as características comuns entre elas [KSMt1 – sabe que existe um conjunto de características transversais à relação de ordem entre elementos de um conjunto e à inclusão de conjuntos], estabelecendo assim uma conexão transversal entre $\subseteq$ e $\leq$.

Esta conexão transversal encontra-se sustentada no seu conhecimento das propriedades das relações $\subseteq$ e $\leq$, em particular de que a relação $\subseteq$ entre conjuntos possui a propriedade reflexiva [KoTd6 – conhece a propriedade reflexiva da relação de inclusão entre conjuntos que se refere à relação de um conjunto com ele mesmo], e que a relação $\leq$ entre elementos de um conjunto também possui essa mesma propriedade [KoTd7 – conhece a propriedade reflexiva da relação $\leq$ que se refere à relação de um elemento do conjunto dos números inteiros com ele mesmo]. Ao efetuar esta discussão, parece assumir que, relembrando uma, vai contribuir para que os estudantes atribuam sentido à outra.

Benny: O assunto é que esta [escreve na lousa $A \subseteq A$] é verdade, não é? Claro que A está contido em A. Isto estaria... É verdade ou não? Sim! Como eu faria para obter uma coisa similar visando este [se refere a $\leq$]? Ou seja, utilizando minha notação, [...] eu pergunto, este aqui [aponta para $A \subseteq A$] qual seria a simbologia aqui? Eu poderia dizer a menor igual que a. Sim? Isso sim teria sentido, ou não? Por que, o que estou dizendo ali? [se refere a $a \leq a$ escrito na lousa].
Estudante: Que a menor que a.
Benny: Que a menor que a, ou a igual a a. Mas a menor que a é falso, [...] então em outras palavras, está nos trinques, por que a é igual a a.

No seguimento, apesar de não demonstrar a transitividade da relação $\leq$, Benny afirma que a relação apresenta essa propriedade e pontua que ambas as relações, $\subseteq$ e $\leq$, apresentam a propriedade transitiva [KoTd8 – conhece a propriedade transitiva da relação $\subseteq$, a qual se estabelece entre três conjuntos de tal forma que se o primeiro está contido no segundo e este está contido em um terceiro, então o primeiro conjunto está contido no terceiro].

Benny:	Depois essa... esse que está aqui [aponta para ⊆], o que satisfaz? Se A está contido em B, e B está contido em C, então... A está contido em C, não é? [...] Bom, você vai ter nesse a menor igual que b [escreve $a \leq b$] e b menor igual que c implica que a menor igual que c. Está bem? Já tenho isso [aponta para a propriedade reflexiva escrita na lousa], e tenho isso [aponta para a propriedade transitiva escrita na lousa].

Continuando a buscar relações entre as propriedades de ⊆ e ≤, Benny enuncia a propriedade antissimétrica da relação de inclusão entre conjuntos [KoTd9 – sabe que se um conjunto está contido em outro conjunto e este outro conjunto está contido no primeiro, então esses conjuntos só podem ser iguais, que é denominada de propriedade antissimétrica da relação ⊆] e refere que, para demonstrar essa propriedade, é necessário mostrar que os conjuntos estão contidos um no outro [KoTp2 – sabe que para demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão, é necessário mostrar que os conjuntos devem estar contidos um no outro]. Como, em um momento anterior da aula, a propriedade antissimétrica já havia sido demonstrada para a relação ≤ [KoTd10 – conhece a propriedade antissimétrica da relação ≤, segundo a qual se um número inteiro é menor ou igual que outro número inteiro, que por sua vez é menor ou igual que o primeiro número inteiro, então eles são iguais], Benny refere que esta relação imita a relação de inclusão, reforçando a conexão transversal já estabelecida entre as duas relações [KSMt1].

Benny:	Do que vocês sentiriam falta, nos conjuntos, para poder botar tudo nos trinques, que nós já botamos aqui? Se A está contido em B, e B está contido em A, então...
Estudantes:	A igual a B.
Benny:	A igual a B. Perfeito. Para eu poder provar que dois conjuntos, se lembram,...? Se você quer provar que dois conjuntos são iguais, você tem que provar que esse [indica A] está contido nesse [indica B], e que esse [indica B] está contido... se lembram? Então como escrevemos isso aqui? [Escreve na lousa $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$] a, menor igual que b, e b menor igual que a, implica a igual a b. Ou seja, [...] isso que temos visto aqui [indica o símbolo ≤] ele imita o dos conjuntos.

Benny discute a relação ≤ como relação de ordem sobre os números inteiros [KoTd11 – conhece a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, sabe que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica] e as suas três propriedades. Ademais revela um conhecimento associado à diferenciação da relação de ordem entre conjuntos e entre elementos de um conjunto ao referir que a inclusão de conjuntos define uma relação de ordem nos conjuntos [KoTd12 – conhece que a relação de ordem existente entre conjuntos é distinta da relação de ordem entre elementos de conjuntos].

Benny:	Isso seria uma... estivemos dizendo uma relação de ordem, certo? Ou seja, este [aponta para o símbolo ≤ escrito na lousa] define uma

> relação de ordem. Vamos ver que isso vai ser uma relação de ordem sobre $\mathbb{Z}$. Então, por exemplo, você falaria assim... A inclusão de conjuntos define uma relação de ordem nos conjuntos, estamos de acordo? Aqui [aponta para o símbolo $\leq$ escrito na lousa] você diria que esta relação, menor igual, o que significa? a igual a b, ou a diferença em $\mathcal{P}$, não é? Define uma..., se eu falo só isto [escreve na lousa: $\leq$ define uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$], significa tudo isso, entende? [indica as propriedades escritas na lousa $a \leq a$, $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ e $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$].

Relativamente ao KPM do formador, aspetos do seu conteúdo foram identificados apenas em dois momentos desta aula: ao demonstrar que o inverso aditivo de um elemento de $\mathcal{P}$ não está em $\mathcal{P}$ e a propriedade antissimétrica da relação $\leq$; ao fornecer um exemplo de dois subconjuntos não comparáveis. Para demonstrar que o inverso aditivo de um elemento em $\mathcal{P}$ não está em $\mathcal{P}$, Benny escolhe a técnica de demonstração por contradição [KPMp1 – conhece a demonstração por contradição de que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais], utilizando-se da propriedade do fechamento de $\mathcal{P}$ em relação à adição e do fato de que zero não pertence a $\mathcal{P}$.

Benny:	Nessas condições uma observação é que se eu tiver a em $\mathcal{P}$, digamos, se eu tiver um cara que está nesse conjunto, então automaticamente seu... o inverso aditivo, ele não pode estar, ou seja, ao ter essas características, essas condições, isso seria uma consequência, entendem? Se eu falo em uma prova, para provar isso, bom, no momento é... não faz mal, como eu faria a prova?
Estudantes:	[inaudível].
Benny:	Isso. Então, suponhamos que ele vai estar, então que faço?
Estudante:	Somo.
Benny:	Somo, estão se este está [aponta para a] e esse está [aponta para $-a$] (em $\mathcal{P}$), então eu teria $a + (-a)$, ele quanto daria?
Estudante:	Zero.
Benny:	Zero. Então isso significaria, olhem, por esta propriedade [aponta para a propriedade escrita na lousa: $a, b \in \mathcal{P} \Rightarrow a + b \in \mathcal{P}$], ele vai estar, mas por essa propriedade [aponta para $0 \notin \mathcal{P}$ escrita na lousa], ele não deveria estar, entendem?

Ao discutir como demonstrar a propriedade antissimétrica da relação $\leq$ ($a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$), Benny sugere negar a tese revelando conhecer a demonstração e que ela é feita por contradição, ou redução ao absurdo [KPMp2 – conhece a demonstração (por contradição) da propriedade antissimétrica da relação $\leq$ que envolve considerar $a \neq b$ em $a \leq b \wedge b \leq a$].

Benny:	Então, se eu tiver dois elementos, digamos a e b, com essas condições, [aponta para $a \leq b \wedge b \leq a$ escrito na lousa], qual seria minha conclusão?
Estudante:	$a = b$.
Benny:	$a = b$. Então é isso o que se esperaria. Então agora qual seria a prova desse fato? . . . queremos provar isso, não? Então..., suponhamos que não seja verdade. Se eu tenho $a = b$, qual é a negação disso? Que este seja diferente [escreve $a \neq b$], está bem?

O *Pedagogical Content Knowledge* revelado por Benny

Benny revela conhecimento incluído no *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* ao utilizar, por exemplo, o subconjunto denotado por $\mathcal{P}$ para se referir ao conjunto dos números naturais [KFPDMT4 – sabe que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e que, portanto, já possuem uma imagem mental desse conceito]. Com esta opção, pretende utilizar esse conhecimento como um trampolim para o entendimento das propriedades dos números naturais apresentadas na sequência. A opção por nomear o conjunto por $\mathcal{P}$ (representação diferente da usual) traz para o foco o objetivo de contribuir para que os estudantes não se apeguem a uma 'nomenclatura' única que já conhecem, mas sejam capazes de abstrair esses conceitos [KFPDMT3 – conhece as dificuldades de abstração dos estudantes de conceitos já trabalhados] e, nesse sentido, faz uso de uma representação não convencional [KFPDMT4 – conhece a necessidade de se usar uma representação não convencional para os números naturais por forma a desenvolver a abstração dos estudantes].

> Benny: . . . estou colocando o $\mathcal{P}$ assim..., abstrato, para que vocês pensem que esse $\mathcal{P}$ pode ser qualquer coisa que vocês pensem..., que ocorra a vocês.

O *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* também é evidenciado por Benny quando, embora já esteja nomeando os símbolos $<$ e $\leq$ como menor e menor ou igual, mostra uma preocupação constante com a importância da abstração no conceito de relação de ordem entre elementos de $\mathbb{Z}$ [KFPDMT4 – sabe que os estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas].

> Benny: O que eu quero observar é que essa relação, menor ou igual, podemos chamar, isto [aponta para o símbolo $\leq$ escrito na lousa], o que acontece é que eu não queria dar nome. Como chamam essa relação? [aponta para a relação $a < b$] a, menor que b, não seria? Esse seria o nome que vocês dão no colégio, não? Esta coisa, eu estou simplesmente esquecendo de nomes, este a relacionado com b, qual é a definição? O b menos a está em $\mathcal{P}$. Estou fazendo algo assim como uma axiomatização. Eu separo um $\mathcal{P}$, e esse $\mathcal{P}$ satisfaz isso. Uma vez que tenho esse $\mathcal{P}$ separado ali, estou definindo uma certa coisa, que chamo a simbolinho b. a simbolinho... esse simbolinho [aponta para $<$ escrito na lousa] estou chamando assim (menor que).

Ao considerar a relação de inclusão da teoria de conjuntos, Benny mostra a expectativa de que os estudantes estejam familiarizados com essa relação, que é comumente estudada no Ensino Médio [KFPDMT4 – sabe que os estudantes estão, ou deveriam estar, familiarizados com a relação de inclusão entre conjuntos].

Benny também mobiliza seu *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes,* ao retomar a definição do operador lógico "ou", que o formador supõe ser conhecido dos estudantes (inclusive porque Lógica Matemática é um tópico discutido em disciplinas anteriores do curso de Matemática) [KSMTEP1 – sabe que os alunos devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou" que é um operador binário utilizado na lógica proposicional].

Discussão geral do conhecimento revelado por Benny

Em nenhum momento nesta aula ou nas aulas seguintes, o formador definiu relação de ordem parcial ou total, ainda que seu conhecimento sobre ambas as definições possa ser depreendido, por exemplo, sobre ordem parcial, considerando que as três propriedades da relação $\leq$ escolhidas para serem demonstradas (propriedade reflexiva, propriedade antissimétrica e propriedade transitiva) são exatamente as que fazem com que uma relação seja denominada relação de ordem parcial [KoTd13 – conhece a definição de relação de ordem parcial nos números inteiros].

Já os indicativos do conhecimento de Benny sobre relação de ordem total surgem quando o formador declara que um conjunto pode não estar contido em outro, isto é, nem sempre dois conjuntos são comparáveis. Considerando que uma relação de ordem é total quando quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis por essa relação, Benny revela conhecer que a relação $\subseteq$ não é de ordem total [KoTd14 – sabe que a propriedade dicotomia não é válida para a relação de inclusão entre conjuntos], enquanto a relação $\leq$ nos números inteiros é de ordem total [KoTd15 – sabe que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem total, que é equivalente a dizer que no conjunto dos números inteiros, além das propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, vale também a dicotomia].

> Benny: Vamos olhar para conjuntos, e vamos olhar para essa relação. Vejam, peguem todos os conjuntos, todos os conjuntos imagináveis..., e se dois conjuntos se comparam, assim como estou falando aqui, dois conjuntos se comparam, aqui seria dois elementos se comparam se a menor ou igual que b, está bem? Se a menor ou igual que b.

Saber que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem parcial e total, discutindo as propriedades associadas, em consonância com a capacidade de estabelecer conexões entre a relação de ordem nos elementos de um conjunto ($\mathbb{Z}$) e a relação de ordem entre conjuntos são exemplos do que Zopf (2010) identifica como um conhecimento mais desenvolvido e aprofundado do formador, em relação ao conhecimento esperado do professor. No caso de Benny, essa maior profundidade também decorre de sua experiência como matemático, e aqui contribui para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes.

Benny define relação de ordem com o objetivo de garantir a existência de um elemento mínimo em todo conjunto de números inteiros não negativos, ou seja, estabelecer o Princípio da Boa Ordenação [KoTd16 – sabe que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe um elemento menor que todos os outros]. A existência deste elemento mínimo será fundamental para caracterizar um conjunto auxiliar que será utilizado na demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana. Dessa forma, Benny evidencia ainda elementos do *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes,* no qual são considerados conhecimentos referentes à identificação das características mais importantes dentro de um determinado tópico e encontrar conexões entre essas características [KTCIMTEP5 – Sabe quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE) e encontra conexões entre essas características, como entre a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação]. Tomando como tópico o Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides (TADE), o conhecimento de Benny lhe permite saber que, na demonstração do TADE, os conceitos de ordem e Princípio da Boa Ordenação estão conectados [KSMa1 – sabe que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordenação são conceitos auxiliares na demonstração do TADE].

Na Tabela 3, sintetiza-se o conhecimento matemático revelado por Benny ao discutir relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Tabela 3. Subdomínios, categorias e indicadores do *Mathematical Knowledge* de Benny

Subdomínio	Categorias	Indicadores de conhecimento
KoT	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd1 – sabe que quaisquer dois números inteiros distintos são comparáveis, ou seja, que um número é menor do que outro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd2 – conhece a definição do operador lógico $\vee$
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd3 – sabe que os números inteiros satisfazem a propriedade antissimétrica, ou seja, se um número inteiro é menor ou igual a outro e esse outro é menor ou igual que o primeiro, então eles são iguais
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd4 – conhece a propriedade transitiva da relação $\leq$, a qual se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto de tal forma que se o primeiro tem relação com o segundo e este tem relação com um terceiro, então o primeiro elemento tem relação com o terceiro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd5 – conhece a definição da relação $\subseteq$
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd6 – conhece a propriedade reflexiva da relação de inclusão entre conjuntos que se refere à relação de um conjunto com ele mesmo
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd7 – conhece a propriedade reflexiva da relação $\leq$ que se refere à relação de um elemento do conjunto dos números inteiros com ele mesmo

	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd8 – conhece a propriedade transitiva da relação ⊆ a qual se estabelece entre três conjuntos de tal forma que se o primeiro está contido no segundo e este está contido em um terceiro, então o primeiro conjunto está contido no terceiro
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd9 – sabe que se um conjunto está contido em outro conjunto e este outro conjunto está contido no primeiro, então esses conjuntos só podem ser iguais, que é denominada de propriedade antissimétrica da relação ⊆
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd10 – conhece a propriedade antissimétrica da relação ≤, segundo a qual se um número inteiro é menor ou igual que outro número inteiro, que por sua vez é menor ou igual que o primeiro número inteiro, então eles são iguais
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd11 – conhece a definição da relação de ordem nos números inteiros, isto é, sabe que em $\mathbb{Z}$ valem as propriedades reflexiva, transitiva e antissimétrica
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd12 – conhece que a relação de ordem existente entre conjuntos é distinta da relação de ordem entre elementos de conjuntos
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd13 – conhece a definição de relação de ordem parcial nos números inteiros
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd14 – sabe que a propriedade dicotomia não é válida para a relação de inclusão entre conjuntos
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd15 – sabe que em $\mathbb{Z}$ vale a relação de ordem total, que é equivalente a dizer que no conjunto dos números inteiros, além das propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, vale também a dicotomia
	Definições, propriedades e fundamentos	KoTd16 – sabe que em todo conjunto de números inteiros não negativos existe elemento menor que todos os outros
	Registros de representação	KoTr1 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros (<)
		KoTr2 – conhece uma das formas de representar a comparação de dois números inteiros (≤)
		KoTr3 – sabe que para além de diferentes representações entre ∧ e "e", estes têm também diferentes significados na linguagem correspondente
	Procedimentos	KoTp1 – sabe que a demonstração da propriedade antissimétrica pode ser efetuada recorrendo a propriedades do anel dos números inteiros
		KoTp2 – sabe que para demonstrar a propriedade antissimétrica para a relação de inclusão é necessário mostrar que os conjuntos devem estar contidos um no outro
KSM	Conexão transversal	KSMt1 – sabe que existe um conjunto de características transversais à relação de ordem entre elementos de um conjunto e à inclusão de conjuntos
	Conexão auxiliar	KSMa1 – sabe que os conceitos de relação de ordem e Princípio da Boa Ordenação são conceitos auxiliares na demonstração do Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides

KPM	Como demonstrar	KPMp1 – conhece a demonstração por contradição de que o inverso aditivo de um número natural não faz parte do conjunto dos números naturais
		KPMp2 – conhece a demonstração (por contradição) da propriedade antissimétrica da relação $\leq$ que envolve considerar $a \neq b$ em $a \leq b \wedge b \leq a$

O conteúdo do *Pedagogical Content Knowledge* evidenciado na aula analisada é sintetizado na Tabela 4.

Tabela 4. Subdomínios e conhecimentos do *Pedagogical Content Knowledge* de Benny

Subdomínio	**Conhecimento**	**Indicador**
Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers	Conhecimento de sequências ou focos que podem ser mais apropriados para a construção do conhecimento dos futuros professores de matemática	KFPDMT3 – conhece as dificuldades de abstração dos estudantes de conceitos já trabalhados.
	Conhecimento sobre o que os futuros professores usualmente sabem antes de ingressar na formação inicial	KFPDMT4 – sabe que os estudantes já conhecem o conjunto dos números naturais das experiências escolares anteriores e que, portanto, já possuem uma imagem mental desse conceito
		KFPDMT4 – conhece a necessidade de se usar uma representação não convencional para os números naturais por forma a desenvolver a abstração dos estudantes
		KFPDMT4 – sabe que os estudantes já conhecem os símbolos $<$ e $\leq$ como relação de ordem entre quantidades representadas por números e que pode ser difícil pensarem neles como representativos de relações abstratas
		KFPDMT4 – sabe que os estudantes estão, ou deveriam estar, familiarizados com a relação de inclusão entre conjuntos
Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes	Conhecimento sobre como dividir um tópico em suas características mais importantes, encontrando conexões entre elas, e desenvolvendo esse conhecimento nos estudantes	KTCIMTEP5 – sabe quais são as características ou pontos mais importantes no Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides e encontra conexões entre essas características, quais sejam, a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação
Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes	Conhecer os padrões curriculares do curso em que atua como formador	KSMTEP1 – sabe que os alunos devem estar familiarizados com a definição do operador lógico "ou", que é um operador binário utilizado na lógica proposicional

Comentários finais

Considerando as dificuldades evidenciadas por alunos do Ensino Fundamental em compreender a relação de ordem entre os números inteiros no momento em que os números negativos são introduzidos (Schindler & Hußmann, 2013), é essencial desenvolver no futuro professor de Matemática um conhecimento especializado, tornando-o capaz de compreender, por exemplo, as dificuldades de ensino e aprendizagem subjacentes ao ensino dos números negativos, os exemplos mais e menos adequados a serem utilizados em uma discussão sobre a ordem nos números inteiros, diferentes representações potentes para ilustrar a relação de ordem, como a reta numérica e representação simbólica, perceber conexões entre a relação de ordem e a subtração, entre diversos outros conhecimentos necessários para a abordagem do tema. Esse conhecimento especializado do futuro professor de Matemática precisa ser promovido pelo formador que, por sua vez, necessita de um conhecimento especializado próprio.

Dessa forma, buscamos compreender o conhecimento de um formador de professores de Matemática, considerando o tema relação de ordem nos números inteiros, para identificar seu *Mathematical Knowledge* (Carrillo et al., 2018) e seu *Pedagogical Content Knowledge* (Escudero-Ávila et al., no prelo), evidenciados em uma aula de Teoria dos Números. Com relação ao MK, o formador mobiliza prioritariamente o KoT, evidenciando conhecimentos sobre propriedades, definições, procedimentos e registros de representação. Também são evidenciados conhecimentos relacionados com o KSM, por meio da manifestação de uma conexão transversal, e com o KPM, referentes a como demonstrar resultados matemáticos.

Com relação ao PCK do formador, foi mobilizado prioritariamente o *Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers*, quando ele demonstra estar atento às dificuldades de abstração dos estudantes e aos conhecimentos prévios que trazem da matemática escolar, tais como o conhecimento a respeito dos números naturais, dos símbolos $<$, $\leq$ e da relação $\subseteq$ entre conjuntos. Também foi evidenciado o *Knowledge of teaching the content of initial mathematics teacher education programmes*, quando o formador identifica características importantes dentro do tópico Divisibilidade, em particular com relação ao Teorema do Algoritmo da Divisão de Euclides, estabelecendo conexões entre a relação de ordem e o Princípio da Boa Ordenação. O *Knowledge of the standards of mathematics teacher education programmes,* por sua vez, é evidenciado pelo formador ao mostrar que conhece a grade curricular do curso de Matemática, destacando que a relação $\subseteq$ entre conjuntos já deveria ter sido estudada em outras disciplinas do curso.

Uma característica fundamental de Benny manifestada nessa aula é a busca pela promoção da abstração. Mesmo considerando o conjunto dos números naturais e as relações $<$, $\leq$ como algo que os estudantes já conhecem, Benny se esforça para evitar uma compreensão e utilização procedimental desses conceitos. Essa característica é particularmente contributiva para a formação dos licenciandos, já que se não for trabalhada na formação inicial, a ênfase procedimental adquirida na escola tende a se perpetuar na prática futura (Almeida, Ribeiro, & Albrecht, 2018).

Um fator que chama atenção em nossa análise da prática de Benny nesta aula são as poucas evidências de KPM e KSM do formador. Considerando que o sujeito é um matemático, se poderia esperar uma presença mais marcante desses dois subdomínios, e uma questão importante que fica em aberto é se a mobilização desses conhecimentos depende do contexto, do tema que está sendo ensinado, dos objetivos do formador em cada aula, entre diversas outras possibilidades. Da mesma forma, enquanto formador, se poderia esperar maiores evidências dos subdomínios do PCK, ficando em aberto se e como o PCK de um formador que é matemático se diferencia do PCK de um formador com outro perfil.

Com relação à compreensão do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, um longo caminho ainda deve ser percorrido, por meio de outras análises, para que se possa abarcar a complexidade de seu PCK relacionado com o ensino de Teoria dos Números e também para melhor entender como se diferencia o MK do formador e do professor que ensina Matemática. No entanto, os indicadores de conhecimento especializado de Benny obtidos a partir dessa investigação constituem mais um passo na elaboração de um modelo de conhecimento especializado do formador de professores de Matemática (Escudero-Ávila et al., no prelo).

Considerando que diversos atores participam da formação do professor de Matemática, tais como matemáticos, educadores matemáticos e professores de Matemática que os recebem nas escolas (Beswick & Chapman, 2012; Escudero-Ávila et al., no prelo), nossa contribuição nesse artigo é aportar resultados sobre o conhecimento especializado de um matemático que atua como formador.

A análise da prática de Benny traz evidências de seu *Mathematical Knowledge* e *Pedagogical Content Knowledge* relacionados ao tema específico da relação de ordem no conjunto dos números inteiros. Porém, análises e investigações posteriores são necessárias para compreender como esses conhecimentos se relacionam entre si, como se relacionam com as crenças do formador, e como o *Mathematical Knowledge* do matemático pode ser articulado com o do formador de professores de Matemática para a melhoria da formação matemática oferecida na licenciatura.

Notas

[1] Curso voltado para a formação de professores de Matemática que irão atuar no Ensino Fundamental (11-14 anos) e no Ensino Médio (15-17 anos).

[2] Curso voltado para a formação de futuros pesquisadores e docentes do Ensino Superior na área de Matemática.

[3] Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica brasileira (Ministério da Educação, 2018).

[4] Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida a nível internacional. Uma vez que os subdomínios do modelo foram denotados em inglês desde a

primeira publicação (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013), manter essa escrita ajuda a identificar melhor os subdomínios.
[5] Conhecimento Matemático.
[6] Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.
[7] Conhecimento dos Tópicos.
[8] Conhecimento da Estrutura da Matemática.
[9] Conhecimento da Prática Matemática.
[10] Conhecimento das características do desenvolvimento profissional de professores de Matemática.
[11] Conhecimento do ensino do conteúdo dos programas de formação inicial de professores de Matemática.
[12] Conhecimento dos padrões dos programas de formação de professores de Matemática.
[13] Definições, propriedades e fundamentos.
[14] Fenomenologia e aplicações.
[15] Procedimentos.
[16] Registros de representação.
[17] Conexões de simplificação.
[18] Conexões de complexificação.
[19] Conexões auxiliares.
[20] Conexões transversais.
[21] Como definir.
[22] Como demonstrar.
[23] Como justificar.
[24] Como fazer deduções e induções.
[25] Como dar exemplos.
[26] Papel do contraexemplo.

Referências

Akdemir, M., Narlı, S., & Kaşıkçı, M. (2015). The transition from informal to formal understanding of the concept of order in abstract mathematics. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 2271-2272). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, A. J., & Albrecht, E. (2018). Perfil conceitual de equação e o conhecimento matemático para o ensino: Estabelecendo relações num estudo com professores em formação inicial. *Quadrante*, *XXVII*(1), 47–67.

Almeida, M. V. R., Ribeiro, M, & Fiorentini, F. (2018). Conhecimento especializado do formador de professores de matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Org.), *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas* (pp. 194-214). Brasília: SBEM.

Alves-Mazzotti, A. J. (2006). Usos e abusos dos estudos de caso. *Cadernos de Pesquisa*, *36*(129), 637–651.

Bair, S. L., & Rich, B. S. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and Number Theory. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(4), 292–321. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.608345

Beswick, K., & Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. Paper presented at the *12th International Congress on Mathematics Education*, Seoul, Korea.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquia: Middle East Technical University and ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., & Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. In J. Carrillo & L. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). Huelva: CGSE.

Coura, F. C. F., & Passos, C. L. B. (2017). Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. *Zetetiké*, *25*(1), 7-26.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L. C. (no prelo). What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos, & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges*. Springer.

Fiorentini, D., & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: Que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, *27*(47), 917–938.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence: A case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 187–205. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9746-z

Guala, E., & Boero, P. (2017). Cultural analysis of mathematical content in teacher education: The case of Elementary Arithmetic Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 207–227. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9767-2

Ministério da Educação (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Moreira, P. C. (2012). 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema*, *26*(44), 1137–1150. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003

Oliveira, G. P., & Fonseca, R. V. (2017). A teoria dos números na formação de professores de matemática: (In)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. *Ciência & Educação (Bauru)*, *23*(4), 881–898. https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015

Resende, M. R. (2007). *Re-Significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na licenciatura* (Tese de doutoramento não publicada). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Resende, M. R., & Machado, S. D. A. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: A disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática em Pesquisa*, *14*(2), 257–278.

Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. C. C. R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *RELIME*, *15*(1), 93–121.

Schindler, M., & Hußmann, S. (2013). About student's individual concepts of negative integers – In terms of the order relation. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 373-382). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207–218.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164–186.

Zazkis, R., Sinclair, N., & Liljedahl, P. (2013). *Lesson play in mathematics education*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3549-5

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (Unpublished doctoral dissertation). University of Michigan, USA. http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf