Flexibilidade de cálculo aditivo suportada por relações numéricas

Additive calculation flexibility supported by number relations

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo. Este artigo tem como objetivo discutir o modo como alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico desenvolvem a flexibilidade de cálculo aditivo, interligando-a com a evolução na construção do conceito de número. São apresentadas duas tarefas, uma explorada numa turma do 1.º ano e outra no 2.º ano na mesma turma, com a mesma professora. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada pela videogravação e posterior transcrição das atividades desenvolvidas. Na análise de dados procura-se compreender como é que os alunos abordam cada uma das situações de modo a resolverem o problema e como isso está interligado com o seu desenvolvimento concetual e a flexibilidade de cálculo aditivo. Nas duas turmas, os alunos começaram por explorar as tarefas autonomamente, seguindo-se um momento de discussão coletiva. Os dados evidenciam evolução na flexibilidade de cálculo dos alunos interligada com o seu desenvolvimento concetual. Os alunos estabelecem relações numéricas, nomeadamente fazendo múltiplas decomposições do 13, no 1.º ano, e usando factos numéricos conhecidos para deduzir valores desconhecidos, no 2.º ano.
Palavras-chave: flexibilidade de cálculo aditivo; relações numéricas; desenvolvimento concetual; primeiros anos.

Abstract. This article aims to discuss how students in the first cycle of basic education develop the additive calculation flexibility, interconnecting it with the evolution in the construction of number concept. Two tasks are presented, one explored in a first grade and another in the second grade in the same class, with the same teacher. The data were collected through participant observation, supported by video recording and subsequent transcription of the activities developed. In the data analysis we try to understand how the students approach each of the situations in order to solve the problem and how this is intertwined with their conceptual development and the additive calculation flexibility. In both classes, the students began by exploring the tasks autonomously, followed by a moment of collective discussion. The data show an evolution in the students' flexibility of calculation interconnected with their conceptual development. Students establish numerical relationships, namely, in the first grade, the various possibilities of decomposition of 13 and the understanding of the commutative property of addition, and in the second grade, the relationships between different decompositions of the numbers that are used to deduce unknown values.

Keywords: additive calculation flexibility; number relations; conceptual development; early years.

Recebido em janeiro de 2019
Aceite para publicação em outubro de 2019

Introdução

Este artigo[1] insere-se no Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo*, conduzido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre e que tinha como objetivo caracterizar a evolução do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos entre os 6 e os 12 anos e descrever e analisar práticas dos professores que facilitem essa evolução. O artigo visa discutir de que modo alunos, nos 1.º e 2.º anos, desenvolvem a flexibilidade de cálculo, interligando-a com o desenvolvimento concetual de número. Embora a problemática da flexibilidade de cálculo, em alunos do 1.º ciclo do ensino básico, tenha vindo a ser investigada (Heinze, Marschick, & Lipowsky, 2009; Heirdsfield & Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer & Green, 2015), tal não é feito no quadro da formação de conceitos, como proposto por Sfard (1991). Este artigo pretende, pois, contribuir para o conhecimento da forma como se relaciona o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo com a evolução da construção, pelos alunos, do conceito de número, com base nos quadros teóricos de Threlfall (2009) e de Sfard (1991).

Segundo Brocardo (2014), as estratégias de cálculo podem ser usadas pelos alunos de forma mecanizada, sem atender ao contexto da tarefa ou aos números envolvidos. Daí que a capacidade para aplicar adequadamente numa situação o conhecimento que foi adquirido numa outra situação seja fundamental para o desenvolvimento da proficiência matemática (NCTM, 2000). Para Threlfall (2009), as variáveis contextuais de uma dada tarefa, ou as suas características específicas, bem como as características individuais dos alunos afetam o modo como os problemas são resolvidos quando aqueles mobilizam um cálculo mental flexível.

No presente artigo, apresentamos a análise da exploração e discussão de duas tarefas integradas em sequências de tarefas elaboradas no âmbito do projeto (ver discussão do *design* de tarefas em Serrazina e Rodrigues (2014)). Uma foi realizada numa turma do 1.º ano, a meio do ano letivo, e a outra aconteceu no início do 2.º ano, na mesma turma.

Flexibilidade de cálculo e desenvolvimento concetual

A ideia de flexibilidade de cálculo está associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Estes podem ser resolvidos mentalmente de diferentes maneiras, designadas normalmente por estratégias. Resolver uma situação de cálculo de modo flexível passa por reparar nos números envolvidos, no modo como eles se podem relacionar, e mobilizar ou construir estratégias que tirem partido das características observadas nos números (Threlfall, 2009). Para Baroody e Rosu (2006), a flexibilidade de cálculo relaciona-se com a descoberta de padrões e relações à medida que os alunos desenvolvem o sentido de número, construindo uma rede de relações numéricas. Vários autores (Heinze et al., 2009; Heirdsfield & Cooper, 2004; Star & Newton, 2009) definem flexibilidade de cálculo como a capacidade de usar estratégias diversificadas e de escolher a mais eficiente para um dado problema, entendida como a que requer o menor número de passos intermédios e o menor esforço mental. A este modelo que tem por base a escolha de estratégias (presente nesta última definição), Threlfall (2009) contrapõe um outro alternativo, o *zeroing-in*, processo não totalmente consciente, que envolve reparar nos números e realizar cálculos exploratórios parciais, em simultâneo, até emergir a estratégia e a solução do problema, os quais envolvem relações numéricas e propriedades das operações. Assumindo uma perspetiva similar, e considerando o contexto sociocultural, Verschaffel, Luwel, Torbeyns e Dooren (2009, p. 343) definem a flexibilidade/adaptabilidade estratégica como "a seleção consciente ou inconsciente e uso da solução estratégica mais apropriada num dado item ou problema matemático, para um dado indivíduo, num dado contexto sociocultural". A estratégia mais apropriada depende do contexto mas também das características individuais dos alunos. Embora se situem numa perspetiva idêntica à de Threlfall (2009), estes autores distinguem-se pelo facto de assumirem que a estratégia é selecionada enquanto Threlfall (2009) refere que a estratégia emerge, não sendo objeto de escolha deliberada. Este último autor considera ainda que para que o reparar nos números aconteça, é necessária uma profunda compreensão dos números, considerando também esta um pré-requisito para a flexibilidade. Threlfall (2009) afirma ainda que um aluno pode não ter os conhecimentos necessários para sustentar todas as estratégias de cálculo que emergem do seu reparar e dos cálculos exploratórios parciais. Isso pode "surgir de um conhecimento concetual inadequado de número" (p. 551).

Em termos concetuais, o número pode ser concebido estruturalmente como um objeto mas também operacionalmente como processo, sendo ambas as abordagens complementares. Sfard (1991) e Tall (2013) consideram os processos e os objetos matemáticos duas faces da mesma moeda, sendo que para Sfard (1991), a conceção operacional constitui a primeira etapa na construção de novas noções matemáticas. Pensando no número, o processo operacional que conduz a esse objeto matemático é a contagem, do ponto de vista histórico mas também psicológico (Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991). Assim, Sfard (1991) propõe três etapas hierárquicas no desenvolvimento de um conceito, como o de número : (1) *interiorização*; (2) *condensação*; e (3) *reificação.* Durante a interiorização, os alunos necessitam de usar materiais concretos para se tornarem competentes nos processos (como é o caso do processo de contagem que conduz aos números naturais). Esta fase dura até os alunos conseguirem efetuar os processos através de representações mentais. Na fase de condensação, os alunos conseguem pensar num dado processo como um todo, comprimindo as sequências longas de operações em unidades mais manejáveis, e tornando as ideias matemáticas mais simples (Gray & Tall, 1994). Tal acontece, por exemplo, quando os alunos invertem a adição, obtendo uma subtração, e não necessitam de olhar para a subtração como um novo processo. Generalizando este tipo de relações, chegam à relação da adição e subtração como operações inversas. É esta fase que permite aos alunos fazer comparações e generalizações, combinando esse processo com outros processos, o que conduz a uma maior facilidade em lidar com diferentes representações do conceito. Assim, nesta fase, desenvolver a flexibilidade de cálculo envolve a compreensão relacional dos números. A passagem para a terceira fase de reificação é repentina e coincide com a solidificação de um processo num objeto, numa estrutura estática, sendo que os alunos são capazes de ver por um novo prisma algo familiar. As várias representações do conceito tornam-se unificadas semanticamente e o objeto assume a sua significação enquanto elemento de uma certa categoria que pode ser investigada relativamente às relações entre os seus elementos e também quanto às suas propriedades gerais. Nesta fase, evoluir na flexibilidade de cálculo envolve desenvolver uma teia de relações numéricas, em que os números se tornam objetos de pensamento (Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer, & Stiphout, 2016). As somas e diferenças tornam-se assim objetos matemáticos com os quais os alunos podem agir e raciocinar.

Gray e Tall (1994) propõem o constructo *proceito* formado por três componentes: (1) processo que produz um dado objeto matemático; (2) objeto matemático produzido por esse processo; e (3) símbolo representativo do processo ou do objeto. Tal como Sfard (1991), os autores consideram a combinação cognitiva de processo e conceito. Assim, na sua perspetiva, o pensamento procetual implica a flexibilidade de encarar o simbolismo como representação simultânea do processo e do objeto. Por exemplo, 4+5 é simultaneamente o processo de adicionar dois números e o objeto matemático correspondente à soma 9. Deste modo, o número 9, ao ser reificado, torna-se um objeto mental cuja composição e decomposição efetuadas de modo flexível permitem aos alunos considerarem múltiplas representações do 9 como representações do mesmo objeto, unificando-as no seu significado enquanto número. Todas estas diferentes estruturas procetuais permitem que o número 9 seja composto e recomposto numa variedade de formas quer como processo quer como objeto. Deste modo, as diferentes formas combinam-se numa estrutura concetual rica na qual o símbolo 9 "expressa todas estas ligações, as concetuais e as processuais, os processos e os produtos desses processos" (Gray & Tall, 1994, p. 8). É nesta perspetiva que Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997) consideram que para o desenvolvimento do processo de estruturação numérica, é fundamental justificar a exaustão das decomposições de um número natural.

Assim, os professores devem ajudar os alunos a construir ideias fortes (*big ideas*), como as de composição e decomposição de números em duas parcelas, utilizando materiais, sempre que necessário, mas também a estabelecer relações entre os números e as operações, nomeadamente a relação entre adição e subtração. Serrazina e Rodrigues (2017), num estudo realizado no 1.º ano, relatam que o facto de a professora solicitar novas formas de realizar um dado cálculo e encorajar o estabelecimento de novas relações numéricas promoveu o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo nos alunos. Na memorização dos factos básicos, os professores devem encorajar os seus alunos a olhar para padrões e relações, usando estas descobertas para construir estratégias. Um estudo realizado com alunos de 3.º ano, embora tenha como foco a multiplicação, releva igualmente a importância do desenvolvimento de relações numéricas quando conclui que "os procedimentos usados pelos alunos evoluíram de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos sofisticados e potentes, baseados nas relações numéricas e nas propriedades da multiplicação (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2016, pp. 70-71), associando esta evolução ao modo como foram geridas as discussões coletivas ds tarefas. Um outro estudo realizado no 3.º ano e focado na compreensão de número racional também enfatiza a importância "do uso de diferentes representações para expressar um mesmo número", entre outros aspetos, para "a construção da compreensão da noção de grandeza de número racional" (Morais, Serrazina, & Ponte, 2018, p. 42). Para Fosnot e Dolk (2001), é necessário, mas não suficiente, compreender o que significa operar com uma dada operação aritmética, dado que, por exemplo, muitas vezes os alunos compreendem o que significa adicionar dois números naturais e mostram essa compreensão usando os dedos, cubos ou outro material, mas não são capazes de estabelecer relações entre os factos básicos de modo a facilitar o cálculo. Fosnot e Dolk (2001) apresentam diversas estratégias que são importantes auxiliares no desenvolvimento de relações numéricas, e, consequentemente do cálculo mental, de que destacamos a ideia de dobro e "quase dobro", desenvolvendo a partir daí cadeias de cálculo. Por exemplo, começando com o dobro de 5 — 5+5 (10) — então 11 (10+1 ou 5+5+1) é um "quase dobro". Esta relação pode também ser usada em sentido inverso —

11-5 = 6, pois 6 = 5+1 e 5 é metade de 10, estabelecendo assim a relação dobro/metade. Gray e Tall (1994) distinguem "factos conhecidos" de "factos deduzidos". Por exemplo, a partir do facto conhecido 5+5=10, o aluno chega a que 6+5 é mais 1 e portanto 11. Os autores afirmam ainda que factos conhecidos não conduzem necessariamente à dedução de novos factos, a qual depende da flexibilidade de usar factos conhecidos.

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), as múltiplas representações dos números constituem um componente importante do conhecimento e destreza com os números. A mesma ideia é referida por Gravemeijer et al. (2016), quando afirmam que "números, somas e diferenças transformam-se em objetos mentais que se podem compor e decompor de diferentes modos, os quais por sua vez constituem a base para uma aritmética flexível e um alargamento a números maiores, e mais tarde aos números inteiros e à álgebra" (p. 37). Nesta perspetiva, o importante é desenvolver nos alunos a capacidade de produzir novo conhecimento aritmético a partir do conhecimento numérico anterior. A ideia de flexibilidade de cálculo de Threlfall (2009), que adotamos neste artigo, tem intrínseca uma boa compreensão dos números, como perceber qualidades dos números, como podem ser manipulados, divididos em partes, aproximados, combinados, alterados, como se pode operar com eles, ou seja, depende da profundidade e extensão do conhecimento numérico. É nesse sentido que relacionamos esta perspetiva com o desenvolvimento concetual de Sfard (1991), sendo que será nas fases de condensação e de reificação que a flexibilidade de cálculo tem lugar, evoluindo das múltiplas representações numéricas para uma teia de relações numéricas em que os números se tornam objetos mentais.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa visando a descrição e a explicação interpretativa de um fenómeno educacional (Erickson, 1986). A sua metodologia de *design research* visa produzir teorias locais de ensino e sequências de ensino que possam contribuir para informar as práticas dos professores (Gravemeijer, 2015). No presente artigo, focamo-nos nos alunos pois consideramos que o conhecimento dos seus processos de aprendizagem é um elemento essencial na produção de teorias locais de ensino.

Os dados foram recolhidos numa turma com 26 alunos, numa escola pública de um dos bairros da periferia de Lisboa, em dois anos letivos consecutivos, 2014-15 e 2015-16, quando a mesma se encontrava no 1.º ano e 2.º ano, respetivamente. Por razões éticas, os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade. A professora da turma é experiente e empenhada no seu desenvolvimento profissional. Dispôs-se a colaborar com a equipa do projeto, discutindo as tarefas e aplicando-as na sua sala de aula ao ritmo de uma por semana. Na sua prática letiva, a professora valoriza o desenvolvimento do cálculo mental.

A equipa do projeto definiu duas sequências de tarefas a serem implementadas nesta turma, uma para o 1.º ano e outra para o 2.º ano, com o objetivo de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de adição e subtração. Neste artigo, analisamos a realização de duas tarefas (em anexo): *Pintainhos,* realizada em 5 de março (1.º ano); e *Cartões com números*, realizada em 28 de outubro (2º ano). Com a escolha destas duas tarefas, pretendemos dar visibilidade à evolução da flexibilidade de cálculo por parte dos alunos da turma.

Na tarefa *Pintainhos*, o desafio consiste em apresentar diferentes decomposições do número 13, tendo em conta o contexto da tarefa. Esta era a terceira de uma sequência de cinco tarefas em que a primeira correspondia à estruturação do número 5 e a segunda à do número 9. A tarefa tinha como objetivo trabalhar as diferentes decomposições do número 13, em dois grupos, de modo que os alunos avançassem na estruturação numérica. Foram disponibilizados 13 círculos em todas as mesas de trabalho para que os alunos os usassem, caso sentissem necessidade.

Na tarefa *Cartões com números,* foram distribuídos aos alunos 18 cartões. Em seguida, cada um dos alunos recebeu uma folha, onde deveria registar as expressões dos cartões. O objetivo desta tarefa é usar factos conhecidos para estabelecer relações numéricas e calcular de modo flexível. Conhecer as características dos números implica usar, de modo dinâmico, o conhecimento do número e das suas relações, vendo as expressões apresentadas como números e não como um cálculo a efetuar, daí o aparecerem sem o sinal de igual no final da expressão. Com base no conhecimento da turma por parte da professora, procurou-se que os cartões contemplassem expressões com valores conhecidos (envolvendo múltiplos de 10 ou a relação do dobro/metade, como, por exemplo, 50-30, 100-50) e expressões com números próximos dos anteriores para que os alunos pudessem deduzir os seus valores, relacionando-os com os conhecidos (por exemplo, 50-29 e 52-29; 100-52 e 100-48).

Ambas as tarefas têm em comum o trabalho com as diferentes representações simbólicas dos números, numa abordagem focada na sua estrutura. Assim, como se pretendia que na primeira tarefa o 13 fosse expresso de diferentes formas pelos alunos, também os cartões, na segunda tarefa, apresentavam diferentes representações dos mesmos números (por exemplo, 50 expresso como 25+25 e como 100-50). A dinâmica de aula foi semelhante nas duas tarefas, sendo ambas resolvidas em trabalho autónomo pelos alunos organizados em pares e realizada posteriormente a discussão coletiva.

Como técnicas de recolha de dados, foi usada a observação participante, complementada com notas de campo e com a videogravação das atividades observadas, e recolha documental (as produções dos alunos[2]). A videogravação incidiu, no momento da exploração autónoma, em três pares de alunos (Ilda e Joana; Luís e Lúcia; Mónica e Paulo) na turma do 1.º ano; e em dois pares de alunos (Luís e Lúcia; João e Paulo[3]) na do 2.º ano, selecionados por habitualmente expressarem os seus raciocínios, sendo também videogravada a discussão com toda a turma.

Para analisar os dados foram usadas categorias analíticas (Tabela 1), mobilizando e cruzando os quadros teóricos de Threlfall (2009) e de Sfard (1991), uma vez que pretendemos compreender como é que os alunos abordam cada uma das situações e alcançam a solução do problema, e como isso está interligado com o seu desenvolvimento concetual e a sua flexibilidade de cálculo aditivo.

Tabela 1. Categorias analíticas

Categorias	**Subcategorias**		**Descrição**
Abordagem ao problema	Procedimento operacional	Interiorização	Aborda o problema, utilizando materiais manipuláveis ou contagem pelos dedos.
	Processo de reparar	Condensação	Repara nos números e nas relações que se podem estabelecer entre eles, fazendo comparações e generalizações e usando diferentes representações de um mesmo número.
		Reificação	Repara nos números e nas relações que se podem estabelecer entre eles, unificando diferentes representações de um mesmo número e criando uma teia de relações numéricas.
Solução do problema	Procedimento operacional	Interiorização	Alcança a solução do problema, utilizando materiais manipuláveis ou contagem pelos dedos.
	Relações numéricas	Condensação	Relaciona os números, através de comparações, (de)composições e recomposições, para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
		Reificação	Relaciona os números, em teias numéricas, para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
	Estratégias de cálculo	Condensação	Relaciona as operações e usa as suas propriedades, através de generalizações, e estratégias de (de)composição, recomposição e de compensação, para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
		Reificação	Relaciona as operações e usa as suas propriedades, através de estratégias construídas com base em teias numéricas, para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

Tarefa "Pintainhos" - 1.º ano

Exploração da tarefa

Ao introduzir a tarefa, a professora constata que o contexto não é nada familiar aos alunos da turma. O par Luís e Lúcia realiza a tarefa rapidamente (em quatro minutos), dando-a por terminada ainda antes de a professora colocar os círculos na mesa. Segue a *estratégia* da sequência decrescente dos ovos do 13 até ao 0 e da sequência crescente dos pintainhos do 0 até ao 13. Assim, os alunos parecem atender ao contexto, uma vez que na situação inicial ainda nenhum pintainho eclodira dos ovos. Embora pareçam mobilizar sobretudo a contagem regressiva e progressiva através da *relação numérica de N-1 e N+1,* concretizam a tarefa registando os pares de números que compõem o 13 (13-0, 12-1, 11-2, etc.). Por vezes, Luís verbaliza os números registados como que a comprovar que a sua soma é 13. Ambos os alunos trabalham a um ritmo semelhante, com Lúcia a adiantar-se no registo, concluindo a tarefa um pouco antes de Luís. A produção deste par encontra-se na Figura 1. A frase "14 é mais um do que 13" foi registada após a discussão coletiva.

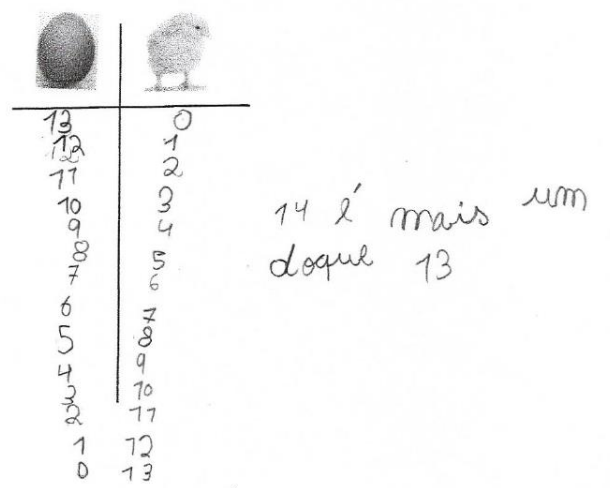


Figura 1. Resolução do par Luís e Lúcia

A adoção desta estratégia, além de modelar a situação de eclosão gradual dos ovos, pode ter sido influenciada pelo facto de na tarefa anterior de decomposição do 9 em dois grupos, os alunos da turma terem concluído, no final da discussão coletiva, que a forma de não se esquecerem de nenhum par de números era escrever os números em sequência, uma decrescente e a outra crescente. O par Luís e Lúcia concretiza rapidamente a tarefa, sem os círculos, revelando facilidade na decomposição organizada do 13, e evidenciando encontrar-se na fase de *condensação*. Quando a investigadora se aproxima do par questionando como é que sabem que têm todas as hipóteses, Luís justifica a exaustão das decomposições com a ordem decrescente/crescente das sequências, apontando para os números registados na tabela, do 13 ao 0, e inversamente do 0 ao 13.

O par Ilda e Joana adota a mesma *estratégia* da sequência decrescente/crescente com o apoio da manipulação dos círculos. Ilda começa por separar para o lado direito um círculo e procede depois à contagem dos círculos restantes, fazendo de seguida o registo na tabela. Depois, junta mais um círculo ao círculo anterior, totalizando agora 2, e conta os restantes, e assim sucessivamente até terminar toda a sequência, chegando a uma produção idêntica à do par Luís e Lúcia apresentada na Figura 1. Ilda revela dificuldade em estabelecer a *relação numérica de N-1* pois insistentemente sente necessidade de contar cada vez que retira um círculo do conjunto situado à esquerda, chegando a repetir várias vezes as contagens. Ilda parece revelar ainda não ter ultrapassado a fase de *interiorização*, uma vez que necessita repetir as contagens em cada nova situação. Por sua vez, Joana não acompanha a colega no processo de contagem. Por vezes, manipula os círculos, contando-os após separá-los em dois grupos, mas sem um critério de ordem nessa separação. Por fim, copia a tabela por Ilda, começando pela possibilidade 12-1 e terminando na possibilidade 6-7. Joana parece encontrar-se também na fase de *interiorização,* embora num nível mais prematuro do que a colega, pois limita-se a contar círculos, sem uma intencionalidade de encontrar várias decomposições do 13.

O par Mónica e Paulo usa a estratégia dos pares comutativos. Começa por representar o par 10-3 e, logo a seguir, o seu comutativo, 3-10 ("ao contrário", na linguagem destes alunos). Vai registando cada novo par de números à medida que se lembra de um novo modo de decompor o 13 ("Tem que tudo dar 13", diz Paulo a Mónica), sem um critério de ordenação (Figura 2). Após terem registado 12 possibilidades na tabela, a professora interpela os alunos do par sobre a existência de mais hipóteses, e Paulo acaba por registar o último par comutativo 12-1; 1-12, exclamando, no final: "Acabámos!".

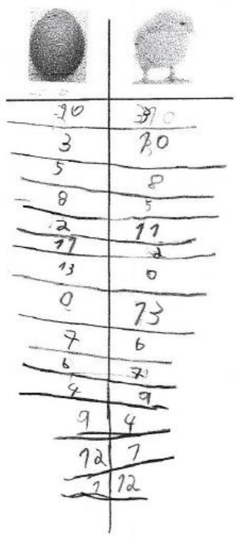


Figura 2. Resolução do par Mónica e Paulo

Apesar de Mónica e Paulo se terem desligado do contexto, já que ignoram uma sequenciação inerente à eclosão gradual dos ovos, os mesmos revelam ter consciência da propriedade comutativa da adição (por exemplo, 11+2=13 e 2+11=13) e de que a comutatividade, neste caso, corresponde a situações diferentes (ter 11 ovos e 2 pintainhos já nascidos é diferente de ter apenas 2 ovos e 11 pintainhos nascidos) e que por esse motivo, têm de ser contempladas como possibilidades diferentes. Este par dispensa o uso dos círculos e aplica um critério de organização nas múltiplas decomposições do 13, estando aparentemente numa fase de *condensação*.

Discussão da tarefa

Na fase de discussão da tarefa, a professora começa por pedir aos alunos para indicarem o número pelo qual iniciaram o registo na tabela e para explicarem o motivo da escolha desse número. Vários alunos explicam a razão de terem começado pelo 13:

Jaime:	Porque era o número de ovos e queríamos fazer a sequência.
Marta:	Porque eram 13 ovos.
Nélia:	Porque primeiro ainda não tinha nascido nenhum ovo.

A justificação de Jaime é de natureza matemática, o querer fazer uma sequência que facilite a perceção da exaustão das possibilidades. As outras alunas apresentam um motivo de natureza contextual.

Procurando perceber a razão de outros terem começado pelo 12 e 1, a professora questiona:

Professora:	Mas o total tem de ser quantos, ovos e pintos?
Alunos:	13.

A focalização da questão na constância da soma assume importância na consciencialização pelos alunos da decomposição do número em causa, o 13.

Os alunos que começaram pela possibilidade 10 e 3 (como o par Mónica e Paulo) têm dificuldade em explicar porque o fazem, sendo que alguns verbalizam que é por serem "números amigos". Esta expressão provavelmente é utilizada para referir os números que resultam da decomposição decimal de um número. Estes alunos explicam que fizeram "ao contrário", querendo reportar-se à estratégia dos pares comutativos. A professora coloca à consideração da turma a escolha da organização a colocar na tabela do quadro ("Quem é que sugere fazer ao contrário? Quem é que sugere fazer outra organização?") e vai pedindo novas possibilidades a cada um dos grupos, registando-as no quadro. Apesar de alguns se manifestarem no sentido de fazer de modo diferente, os vários pares de alunos indicam as novas possibilidades, seguindo o critério das sequências decrescente/crescente, mesmo que não tenha sido essa a estratégia utilizada na exploração autónoma. Após o registo de 11 e 2, a professora interpela:

Professora: O que diriam a seguir? Eu sei que a vossa sequência não é esta. O que vocês fariam a seguir? O que faz mais sentido agora ali?
Guilherme: Pode ser 6 mais 7.
Nádia: Nos ovos, 10 e nos pintainhos 3. (a professora regista no quadro)
Professora: Porquê, Nádia, esta e não a do Guilherme, 6 em ovos e 7 em pintainhos? Porquê Nádia? Porquê? Essa do 6 e do 7 não está correta, Nádia?
Nádia: Está.
Professora: Está. Então porque é que agora faz mais sentido esta?
Nádia: Porque os ovos estão a diminuir. Menos um.
Professora: Menos um. E o que acontece do lado dos pintainhos?
Nádia: Está a crescer.
Professora: Quanto?
Nádia: Um.

Assim, a professora direciona a participação dos alunos no sentido de não atenderem simplesmente à correção das possibilidades correspondentes às múltiplas decomposições do 13 em dois grupos, mas de atenderem à sequenciação lógica presente no contexto da situação proposta. Nádia, perante o questionamento da professora, identifica as *relações numéricas* N-1 e N+1, estabelecendo uma *estratégia* de compensação, se os ovos diminuem 1, os pintainhos aumentam 1.

A professora continua a solicitar decomposições do 13. Após um dos pares indicar a possibilidade 6 ovos e 7 pintainhos, vários alunos reagem reparando tratar-se de um par comutativo ao da linha anterior:

Alunos: Está ao contrário!
Professora: Porquê?
Luís: Porque vai mudar.
Professora: O que é que vai mudar? Vem cá explicar, Luís.
Luís: Este número (aponta para o 5 da coluna dos pintainhos) vai passar para aqui (aponta para o local à esquerda na coluna dos ovos).
Professora: Porquê?
Luís: Porque… porque vai passar a ser cinco ovos.
Professora: Mas porque é que a partir daqui (marca com a mão o espaço entre 7-6 e 6-7) começa a mudar?
Luís: Porque aqui é o meio. (aponta para o espaço entre 7-6 e 6-7)
Professora: Porque aqui é o meio do quê?
Luís: Dos números.
Professora: Da sequência. (dirige-se para a turma, mantendo a mão a marcar o local identificado pelo Luís como meio). Há mais alguma hipótese de que apareçam outros números, sem ser ao contrário?
Alunos: Não.
Alunos: Sim. O 4. (a professora aponta para o 4 na coluna dos pintainhos)
Aluna: Tem que ser o contrário… já não há mais hipóteses.
Professora: Já não há mais hipóteses?
Alunos: Há!
Professora: Só que a partir daqui… a partir daqui, já não há mais nenhuns números que possam usar e que não estejam aqui sem ser a trocar. Então se calhar podemos separar aqui a sequência. (a professora traça com uma linha a divisória entre 7-6 e 6-7).

Apesar de, nesse momento, a tabela apresentar apenas 8 das possibilidades, Luís já consegue explicar a simetria das possibilidades existentes, correspondendo à comutatividade das possibilidades de 13 a 7 ovos/0 a 6 pintainhos, identificando o meio da sequência. A professora questiona a turma com a preocupação de socializar a descoberta de Luís de modo a que os restantes alunos compreendam que já têm registados no quadro todos os números de 0 a 13. A marcação da simetria com um traço por baixo da possibilidade 7 ovos e 6 pintainhos (Figura 3) reforça a ideia de que por baixo ficarão os 7 pares comutativos, garantindo assim a exaustão das possibilidades.

Após os diferentes pares dizerem as 14 possibilidades, e de serem todas registadas no quadro, a professora questiona a turma sobre o significado contextual da última hipótese:

Professora:	Se isso acontecesse, queria dizer o quê? Os pintainhos…
Alunos:	Já estavam todos fora.

Seguidamente, a professora incide a discussão sobre a organização da tabela, registada no quadro (deixando de fora o contexto a que correspondia):

Professora:	Quem é que seguiu esta organização?
Alunos:	(pondo o braço no ar) Eu.
Professora:	Qual é que acham que é mais fácil? Esta, para não nos perdemos, ou a outra que vocês usaram de trocar, logo a seguir?
Aluno:	Trocar…
Professora:	A de trocar?
Alunos:	Sim.
	. . .
Professora:	Diz lá porquê, Paulo. Qual é a que faz mais sentido? Está alguma errada? Ou estão ambas certas?
Paulo:	Estão todas certas.
Professora:	Estão ambas certas. Qual é a que faz mais sentido?
Paulo:	(impercetível)
Professora:	Ó Paulo, lembras-te que eu fui aí ao teu grupo e vocês estavam com dificuldade em descobrir mais uma das hipóteses? Porquê Paulo?
Paulo:	Porque estávamos a usar a troca.
Professora:	Vocês estavam a fazer a troca, e depois estavam com dificuldade em descobrir aquela que faltava. Se eu usar esta sequência, seria mais fácil?
Paulo:	Sim.
Professora:	Penso que sim, Paulo. Olhem, o Luís diz que tem uma descoberta. Luís.

Depois de a professora orientar para a conclusão de a estratégia das sequências decrescente/crescente ser mais eficaz para não se esquecerem de nenhuma das possibilidades, Luís vai ao quadro partilhar a regularidade identificada: "Aqui os números iguais estão na diagonal" (apontando para os números 13-13, 12-12...). Depois de justificarem esta regularidade com a ordenação inversa das duas colunas, é a vez de Maria partilhar a sua descoberta: a localização dos pares comutativos. A professora traça arcos nos pares identificados pela aluna (Figura 3) que comenta, no final "Parece um arco-íris!".

Por fim, a professora conclui a discussão da tarefa com uma incidência na paridade dos números:

Professora:	Olha lá Jaime, há alguma hipótese em que o número de ovos seja igual ao número de pintainhos? Ao mesmo tempo? Porquê Jaime?
Jaime:	Porque 13 é um número ímpar. É um quase dobro.

Professora: É um quase dobro. Então não pode acontecer haver o mesmo número de ovos e o mesmo número de pintainhos.
Dario: Só se fosse o 26 é que ficava 13 num lado e 13 no noutro.
Professora: E o que é que é o 26 que não é o 13?
Dario: É par.
Professora: Não querem colocar mais nenhuma questão? Olhem, para terminar, quantas são as hipóteses?
Alunos: 14! (a professora regista 14 no quadro) É mais um do que os ovos.
Professora: É mais um do que o número de ovos.

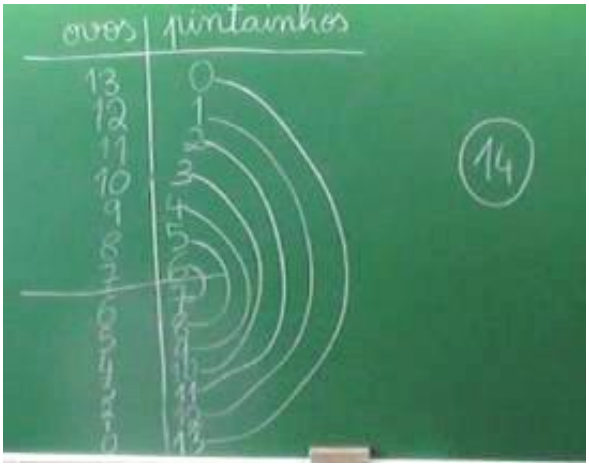


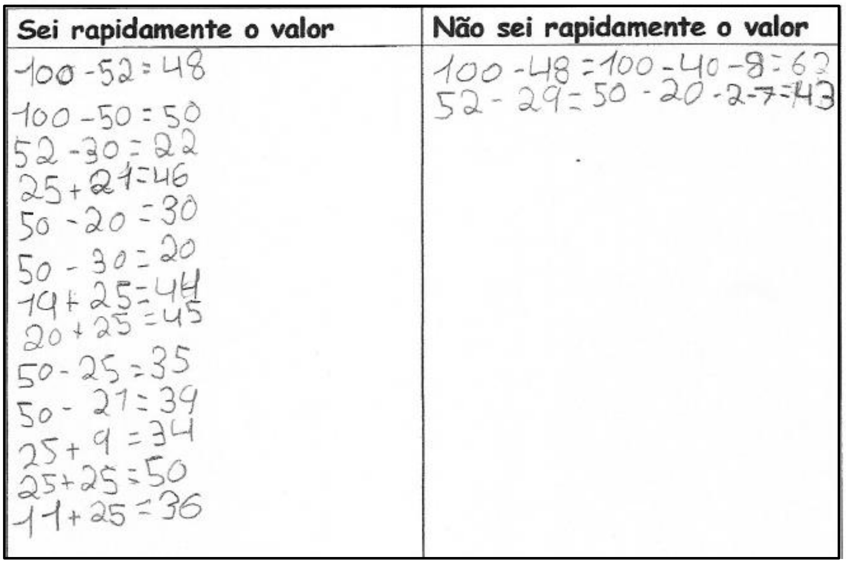
Figura 3. Registo final no quadro da exaustão das possibilidades

Os alunos, além da estruturação numérica do 13, estabelecem outro tipo de relações como a impossibilidade de decomposição em dois grupos iguais por ser um número ímpar e relacionam o número total de possibilidades com o número objeto de decomposição, embora não tenham explorado a justificação para esse facto. A *relação numérica* dobro/metade é aqui também associada à ideia de par e de ímpar com Dario a identificar 13 como metade de 26. Esta discussão favoreceu a construção de uma teia de relações à volta do número 13, quer incidindo nas suas (de)composições quer relacionando-o com outros números (o seu dobro), contribuindo assim para a evolução dos alunos para uma fase de *reificação* para números desta ordem de grandeza.

Tarefa “Cartões com números” - 2.º ano

Exploração da tarefa - Par Luís e Lúcia

O par Luís e Lúcia, à medida que tira os cartões, regista na folha as expressões e respetivos resultados (Figura 4).



Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor
100-52=48	100-48=100-40-8=62
100-50=50	52-29=50-20-2-7=43
52-30=22	
25+21=46	
50-20=30	
50-30=20	
19+25=44	
20+25=45	
50-25=35	
50-21=39	
25+9=34	
25+25=50	
11+25=36	

Figura 4. Produção do par Luís e Lúcia

Luís revela um cálculo muito rápido, antecipando-se a Lúcia, e assim todos os resultados são verbalizados por Luís, sendo que, na maior parte dos casos, Lúcia limita-se a escrever o resultado indicado por Luís. O único cartão cujo cálculo é efetuado por Lúcia é 25+9, que conta um a um a partir de 25 com o apoio dos dedos, não utilizando pois qualquer estratégia de cálculo mental. Isto é indicador de se encontrar na fase de *interiorização* para valores numéricos desta ordem de grandeza. De facto, Lúcia, após ter registados todos os cálculos na coluna da esquerda, verbaliza: “Eu só sabia uma. O resto era tudo difícil para mim”. No entanto, ainda contribui para o cálculo de 25+25, referindo com grande segurança ser 50 após Luís verbalizar inicialmente 40, e revelando, assim, dominar o facto básico 25+25=50.

De entre as expressões colocadas na coluna da esquerda, a maior parte é objeto de uma resposta imediata por Luís. Note-se que duas delas apresentam erros de cálculo (“50-25=35”; e “50-21=39”), sem que os alunos se tenham apercebido dos mesmos. Relativamente aos cartões 100-52 e 19+25 justificam:

Luís:	(falando para Lúcia, com o cartão 100-52 na mão) Já sei quanto é! É 42. Ai, é 48! 100-52 é 48.
Professora:	(aproxima-se do par) Porquê?
Luís:	Porque 100-50 é 50, menos 2, é 48.
	. . .
Luís:	(falando para Lúcia) 19+25, 30... (aponta para o 25 no cartão), 40, dá 44. 44. Dá 44.

No cartão 100-52, apesar da precipitação inicial de Luís quando verbaliza 42, muito rapidamente este retifica para 48. Infere-se que Luís começa por *reparar* que 52 é mais dois que 50, e usa o facto básico 100-50=50 (sem relacionar com o cartão seguinte, ainda não retirado) na *estratégia* da compensação, retirando 2 ao resultado 50. Para deduzir o 48, Luís estabelece várias *relações numéricas* (entre 50 e 52 e entre 100 e 50). Em 19+25, Luís parece *reparar* no número 25, realizando mentalmente os cálculos exploratórios parciais 25+5=30 e 19=10+(5+4). Assim, Luís adiciona, sucessivamente, à soma 30, os restantes componentes resultantes da decomposição do 19 (30+10=40; 40+4=44), por meio da *estratégia* da decomposição de uma das parcelas (19) da expressão em causa e da aproximação de uma das parcelas (25) à dezena mais próxima, envolvendo as *relações numéricas* entre 25 e 30 e entre 19 e os seus componentes. Em ambos os casos, encontramos alguma evidência da emergência das estratégias, numa simultaneidade de processos própria do *zeroing-in*, ao invés de uma escolha deliberada de uma dada estratégia.

Relativamente às expressões colocadas à direita, vejamos como foram as mesmas resolvidas:

Luís:	(referindo-se a 100-48 e pegando no cartão 100-50) Menos dois. (impasse) 100-40 é 60. Menos 8, 62.
	. . .
Luís:	(referindo-se a 52-29) Olha, 30. 50-20, é o que temos de fazer. Dá 30.
	. . .
Lúcia:	Menos 9, menos 2.
Luís:	Dá 30. Agora, 32-9 dá... Olha, pensa... 52-9. Quanto é 52-9? 52-9? 52-2, dá...
	. . .
Luís:	Não, dá 50. Olha, nove menos dois? Eu sei quanto é. É 7. Agora, menos 7, dá 43. Ou seja, igual a 50-20-2-7. É 43 (regista na folha).

Em 100-48, Luís parece *reparar* que 48 é menos dois que 50, mas não consegue lidar com a dificuldade associada à compensação aditiva (de natureza inversa à diferença expressa no cartão, e que não ocorrera para o cartão 100-52), usando 100-50. Assim, Luís acaba por optar pela *estratégia* da decomposição, tanto nesta expressão como na seguinte, 52-29. Em 100-48, erra o cálculo de 60-8, sem se dar conta de que estava a obter um número maior do que 60, já que atendeu simplesmente à decomposição do 10 em 8 e 2, esquecendo que teria de retirar uma dezena a 60. Em 52-29, Luís começa por operar com as dezenas ("50-20 . . . Dá 30"), mas parece ter realizado o cálculo exploratório parcial 52-20=32 pois decide subtrair 9 a 32, o que daria um resultado correto. Face à dificuldade em calcular 32-9, Luís opta por subtrair 9 ao aditivo considerado no seu todo (52-9) e segue-se alguma confusão, com Luís a focar-se em 52-2, até que parece voltar a incidir na decomposição do número nas ordens, determinando agora a diferença entre as unidades (2-9= -7; "menos 7"), o que o levou a alcançar 43 após subtrair 7 de 50. Se tivesse retomado o procedimento inicial de obtenção de 30 (50-20=30) e subtraído depois 7, teria obtido o resultado correto. O registo efetuado revela também a confusão associada a este cálculo com o registo de "-2-7" que acabou por não ser efetuado, em "52-29 = 50-20-2-7 = 43" (Figura 4).

Na exploração da tarefa, Luís evidencia encontrar-se na fase de *condensação*, dispensando o uso de recursos concretos para determinar os valores expressos nos cartões, e conseguindo realizar comparações entre as expressões e factos básicos conhecidos para deduzir novos valores, como aconteceu com 100-52. No caso das somas expressas nos cartões, foram todas colocadas corretamente, de forma imediata, como factos conhecidos na coluna da esquerda, mesmo que, eventualmente, tivessem sido interpretadas com recurso à estratégia da compensação, como seria o caso de 25+9 ou 11+25. Luís não avalia criticamente os resultados obtidos em 100-48 e 52-29 por recurso à *estratégia* de decomposição, o que pode ter sido agravado pelo cansaço decorrente da exploração da tarefa com tantos cartões, uma vez que o cálculo com estes dois cartões foi realizado já no final. No entanto, revela ter já *reificado* somas e diferenças envolvendo os múltiplos de 10 e as relações de dobro/metade.

Exploração da tarefa - Par João e Paulo

Relativamente ao par João e Paulo, é Paulo que assume um maior protagonismo. Este vai registando na coluna da esquerda e dizendo o resultado, de modo imediato, secundado por João que faz também o mesmo registo na sua folha (Figura 5)[4]. Paulo regista, sem dúvidas, 50-25=25 enquanto João regista, por lapso, 50-25=45. Para 52-30, Paulo verbaliza "Esta é 18", sem se dar conta do erro.

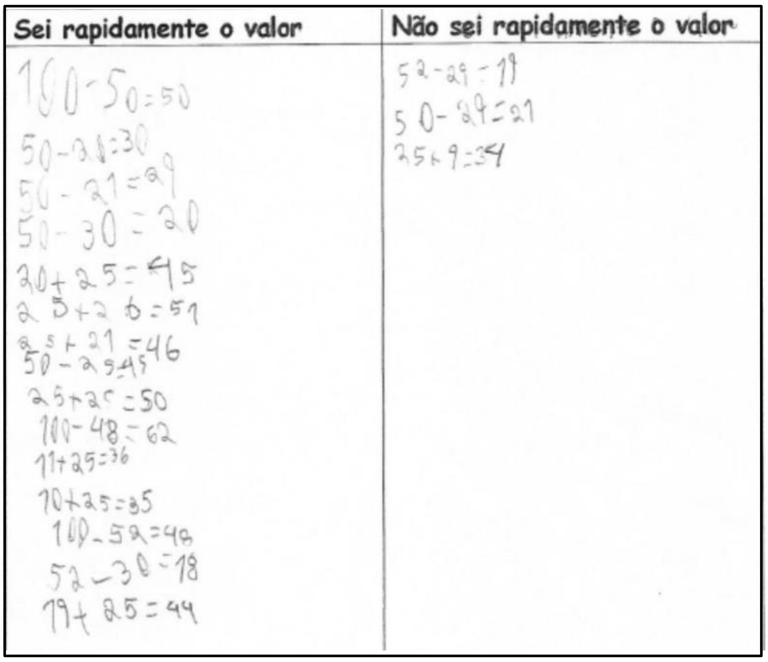


Figura 5. Produção do par João e Paulo

Segue-se o extrato alusivo a algumas das expressões colocadas à esquerda:

Paulo: (referindo-se a 50-21) 50 menos 21, vai dar 29. Sabendo que 50 menos 20 é igual a 30, 50 menos 21, acrescenta-se 1, 29. Isto é tão fácil!

...

Paulo: (referindo-se a 100-48) É 62. Sabes porquê? Porque se fosse 10, 10 menos 4, 6. Menos 8, sobravam 2 do 60. Ia dar 2.

. . .
Paulo: (referindo-se a 100-52) Espera, olha lá esta. 50, 100 menos 50, 50.
João: Menos 2...
João e Paulo: 48!

As expressões da direita são calculadas, à medida que surgem, de modo intercalado com as da esquerda. Vejamos o extrato respetivo:

Paulo: (referindo-se a 52-29) Esta não sei rapidamente. Agora, pensa lá quanto é que é . . . 50 menos 20 igual a 30. Menos 2 (aponta para o 52) é igual a 28… tirámos aqui 2… tirámos aqui 8 (apontando para o 29) fica… é igual a 19. Olha aqui: 50 menos 20 igual a 30, menos 2 é igual a 28, não é?… Se tirares 8 do 9, só sobra 1 do 9, fica 20, menos 1, igual a 19.
. . .
Paulo: (referindo-se a 50-29) Vai ficar 30. Menos 9... (contando pelos dedos) 29, 28, 27, 26, 25, . . . 24, 23, 22, 21.
. . .
Paulo: (referindo-se a 25+9 e verbalizando de modo imediato) É igual a 34.

Para os cartões 52-30, 100-48, 100-52, 52-29 e 50-29, , Paulo parece usar a *estratégia* da decomposição dos números nas suas ordens, pois começa sempre por subtrair do aditivo o número de dezenas do subtrativo: 100-40; 100-50 e 50-20. Por fim, subtrai, sucessivamente, da diferença parcial o número de unidades do aditivo ("Menos 2 é igual a 28" em 52-29) e do subtrativo (28-9, em 52-29, "Se tirares 8 do 9, só sobra 1 do 9, fica 20, menos 1, igual a 19"). Apesar de Paulo não ter verbalizado o processo de determinação de 52-30, pressupomos que usou um processo análogo ao usado em 52-29: 52-30=20; 20-2=18. Paulo revela não ter compreendido, ainda, que teria de adicionar as unidades do aditivo e de subtrair as do subtrativo. Quando o número de unidades é reduzido, a subtração faz-se fácil e rapidamente, como aconteceu com o cartão 100-52 (é de assinalar a participação mais ativa de João neste caso). Quando o número de unidades é elevado (perto de 10), a subtração levanta alguma dificuldade, como no caso de 50-29, em que Paulo usa a contagem regressiva pelos dedos, ou no caso de 100-48, em que parece esquecer a diferença em causa, entre 60 e 8, para se focar apenas na diferença entre 10 e 8 ("Ia dar 2"), chegando à solução de 62, em vez de 52. É de notar a analogia que faz entre 10 e 100, transpondo o cálculo básico até 10 para o cálculo até 100 ("se fosse 10, 10 menos 4, 6": assim, 100-40=60).

Em 50-21, Paulo *repara* que 21 é mais 1 do que 20 ("acrescenta-se 1"), usa o facto conhecido 50-20=30 e usa a *estratégia* da compensação, subtraindo 1 a 30. Provavelmente, foi um processo similar ao que ocorreu para o cartão 25+9, embora o processo de raciocínio, neste caso, não tenha sido verbalizado por Paulo. Curiosamente, esta expressão foi colocada na coluna da direita enquanto expressão cujo valor os alunos não sabem rapidamente, mas a sua determinação foi efetuada de modo imediato por Paulo ("é igual a 34"). Teria Paulo reparado que 9 é menos 1 do que 10 e depois compensado com menos 1, dado o facto conhecido de 25+10?

Na exploração da tarefa, Paulo evidencia encontrar-se na fase de *condensação*, estabelecendo comparações, como a analogia entre 10 e 100. O facto de ter usado a contagem pelos dedos unicamente num dos cartões é indicador de já ter ultrapassado a fase de *interiorização*. Revela um domínio de um elevado número de factos numéricos que parecem já encontrar-se *reificados,* como sejam as somas e as diferenças envolvendo a relação dobro/metade (50-25; 25+25; 100-50) e envolvendo os múltiplos de 10 (como é o caso de 50-20). Por exemplo, Paulo parece encarar já o 50 e o 100 como objetos mentais, unificando, no seu significado numérico e relacional, as suas diferentes representações. No que respeita a João, não existem dados que nos permitam aferir a fase de desenvolvimento concetual numérico, uma vez que manteve uma participação mais apagada, não chegando a verbalizar o seu raciocínio, ou sequer a efetuar os vários cálculos, na maioria dos cartões, dada a rapidez de cálculo de Paulo.

Discussão da tarefa

São afixados todos os cartões no quadro. A professora inicia a discussão, pedindo para os alunos indicarem quais os cartões mais difíceis e quais os que podem ajudar. Pede ao par Gil e Mónica para ir ao quadro. São retirados os cartões 100-48 e 100-52 como tendo sido difíceis, relacionando-os com 100-50. Apresentamos o extrato do diálogo que se segue.

Alexandre:	(respondendo à professora quando esta questiona por que razão 100-50 ajuda) Porque este (apontando para 50) é metade deste (apontando para 100).
Professora:	Porque 50 é metade de 100. Quanto é que dá 100-50, Mónica?
	. . .
Alexandre:	Este (apontando para 100) menos 50 vai dar 50.
Professora:	(regista "=50" à frente do cartão 100-50) Como é que este pode ajudar a fazer 100-48? Vamos pensar.
Alexandre:	100-52 é 48.
Professora:	Como sabes?
Alexandre:	Se 100-50 é 50, então tira-se mais 2 e vai dar 48.
Professora:	Tira-se 2, aonde?
Alexandre:	(apontando para o resultado de 100-50) Ao 50.
Renato:	(apontando para 100-48) Aqui é 52.
Professora:	Porquê?
Renato:	Porque 100-50 vai dar 50. E como 48 é menos 2, vai dar 52.

Os alunos conseguem deduzir novos resultados a partir do facto conhecido 100-50=50, assente na *relação* de dobro/metade, estabelecendo *relações numéricas* de mais 2 e menos 2 do que 50 (número expresso em 100-50), pelo processo de *reparar* nas relações entre o subtrativo 50 e os subtrativos dos outros dois cartões.

Seguidamente, a professora chama a atenção dos alunos para a relação entre os cartões 100-52 e 100-48. Para conseguirem explicitar essa relação, os alunos propõem dar outros exemplos em que se verifique o mesmo tipo de relação. Com base no exemplo de Alexandre (Figura 6), o diálogo prossegue.

Professora: Então, porque é que aparece trocado? Já perceberam que se pode trocar. Porquê? Porque é que se pode trocar?

(Os alunos não respondem por um breve momento.)

Professora: Se calhar, se pensarmos ao contrário, ajuda um bocadinho...
Luís: (dirige-se ao quadro e aponta para os números quando os verbaliza) Porque 49 mais 51 dá 100 e 51 mais 49 dá 100. (aponta para os cartões de cima) 48 mais 52 dá 100. E 52 mais 48 dá 100.
. . .
Luís: E acontece em tudo.

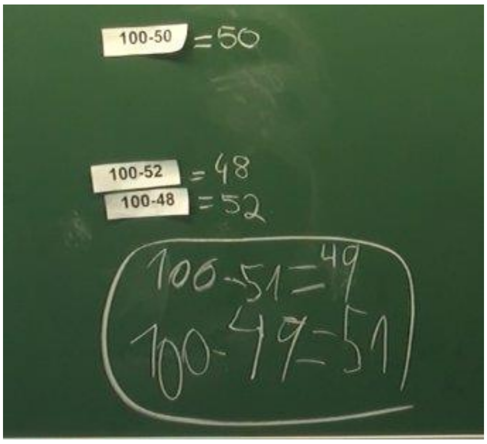


Figura 6. Exemplo ilustrativo da relação parte-todo

A professora questiona os alunos sobre o porquê de se poder trocar numa subtração o subtrativo e a diferença, e perante algum impasse, sugere que pensem na operação inversa ("se pensarmos ao contrário"). Assim, Luís justifica essa troca com a explicitação da propriedade fundamental da subtração, verbalizada através do exemplo: o aditivo é igual à soma do subtrativo com a diferença. Poderemos inferir que, implicitamente, Luís compreende que se retirar uma parte x a um todo, obtendo y, então se retirar a parte y a esse todo, irá obter x, já que a união das duas partes constitui o todo. Parece verificar-se também uma compreensão implícita da propriedade comutativa da adição na explicitação da propriedade da subtração: $x + y = y + x$ ("Porque 49+51 dá 100 e 51+49 dá 100"). Apesar de Luís se apoiar em exemplos concretos, ele generaliza a todas as situações do mesmo tipo quando verbaliza "E acontece em tudo". Assim, no decurso da discussão, Luís mostra dominar a decomposição do 100 em diferentes componentes, embora na exploração da tarefa não tenha evidenciado essa compreensão, já que determinara corretamente o valor de 100-52 mas não o de 100-48.

Esta discussão contribui para a *reificação* do 100, isto é, para a construção de uma rede de relações numéricas em torno do número de referência 100, suportada pelas relações entre a parte e o todo, em que os números são decompostos e recompostos de diversas maneiras, bem como pela relação entre a subtração e a adição. Por um lado, o 100 é visto como objeto mental expresso de múltiplos modos: 50+50, 52+48, 48+52, 51+49, e 49+51.

Por outro lado, a professora conduz a discussão de modo a que os alunos compreendam que tanto podem usar a adição como a subtração para expressar essas relações.

A professora dá continuidade à discussão da tarefa. O par João e Paulo vai ao quadro. São colocados os cartões 52-29 e 50-29 como difíceis, relacionando-os com 50-30.

Professora: Quanto é 50-30?
Paulo: É 20 (escreve no quadro à frente do cartão).
Professora: Quanto é 50-29? (Paulo regista 19 no quadro à frente do respetivo cartão) 19? (aproxima-se do quadro) 50 menos 30 é 20. Aqui tiras menos 1 (aponta para 29), tem de lá ficar. (Paulo retifica para 21) O que é que se passa daqui (aponta para 50 no cartão 50-29) para aqui (aponta para 52)?
Paulo: É mais 2.
Professora: Numa subtração, nós já vimos que se queremos manter o resultado, o que eu faço no aditivo, tenho de fazer no subtrativo (aponta para os respetivos números). Se eu só estou a fazer no aditivo, o resultado vai mudar. Se eu estou a pôr mais 2, o que vai acontecer aqui (aponta para o local à frente do sinal de igual em 52-29)?
Paulo: É mais 2 ou menos 2?
Professora: Boa questão, Paulo! Vai-se tirar 2 ou vai-se pôr 2? Nós já vimos que na subtração – vocês fazem isso no número do dia – que quando eu aumento 1 ao aditivo, tenho que aumentar 1 ao subtrativo. Daqui para aqui (aponta para os cartões 50-29 e 52-29), não estou a mexer no subtrativo (aponta para os cartões 50-29 e 52-29), estou a mexer aqui (aponta para o aditivo nos dois cartões). Faço mais 2. Mas aqui (aponta para o subtrativo nos dois cartões) não faço mais 2. O que é que acontece na resposta? Vai mudar.
Aluno: É 23. (Paulo regista 23)
Professora: Se eu estou a pôr mais 2 aqui (aponta para 52), estou a tirar o mesmo (aponta para 29), fico com mais 2, é o que está a dizer (refere-se ao aluno que disse 23 cujo nome é inaudível).

A Figura 7 apresenta os cartões que foram relacionados para calcular 52-29 e 50-29.

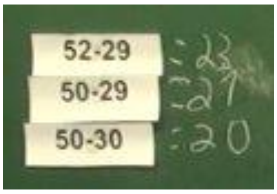


Figura 7. Relações numéricas a partir do cartão 50-30

Os diferentes efeitos da compensação, consoante a alteração seja no aditivo ou no subtrativo, suscita alguma dificuldade aos alunos. Em 50-29, é retirado 1 ao subtrativo (de 50-30), e o resultado tem de ser compensado com mais 1. Em 52-29, é acrescentado 2 ao aditivo (de 50-29), e o resultado tem de ser compensado também acrescentando 2. A professora começa por lembrar a propriedade da invariância do resto para os alunos compreenderem que se só se alterar um dos termos da subtração, então essa alteração tem de ser compensada na diferença. Tenta, ainda, que os alunos entendam o efeito da compensação simplesmente pelo significado do subtrativo ("Aqui tiras menos 1, tem de lá ficar") e do aditivo ("Se eu estou a pôr mais 2 aqui, estou a tirar o mesmo, fico com mais 2"), sem sentir necessidade de exemplificar com situações contextuais. Também aqui é de sublinhar o papel da professora ao guiar os alunos no estabelecimento de relações numéricas associadas à estratégia da compensação.

Seguidamente, é o par Santiago e Nádia que vai ao quadro apresentar uma outra forma de usar os cartões para alcançar as respostas que não sabiam (100-52 e 52-29). A sua resolução encontra-se na Figura 8.

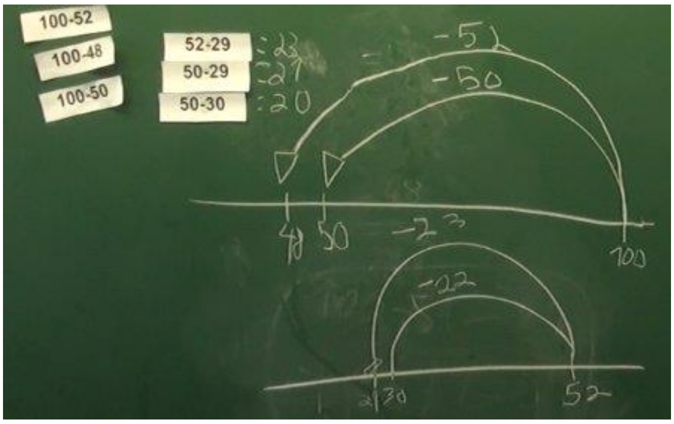


Figura 8. Saltos na linha numérica para encontrar as soluções

Para 100-52, os alunos partem do facto de estarem a dar um salto maior (+2) para trás do que em 100-50, chegando a 48 (dois números à esquerda de 50, na linha numérica). Em 52-29, estes termos são colocados na linha numérica, sendo que a diferença é encontrada pela distância entre eles, ou seja, pelo salto. Assim, após posicionarem os números na linha, o par coloca o 30 à direita de 29, colocando -22 por cima da seta, determinando assim que 52-22=30. Finalmente, efetuam o salto -23 como o que dista entre 29 e 52, já que 29 está apenas um número à esquerda de 30. A professora pergunta ao par por que motivo 52-23 ajuda a calcular 52-29 se esse cartão não existe. Luís levanta-se e justifica voltando a verbalizar a propriedade fundamental da subtração:

Luís: Porque 29 mais este (aponta para 23), igual a este (aponta para 52).
Professora: (explicitando os números envolvidos) Porque 29 mais 23 vai dar 52. Se eu sei que 52 menos 23 é 29, então 52 menos 29 é igual a 23.

Como podemos verificar, a dimensão visual é aqui um auxiliar nas relações de compensação que, no caso da subtração, se tornam complexas para os alunos. Os subtrativos são colocados em locais distintos: no arco do salto, no caso de 100-52; na linha numérica, no caso de 52-29. Embora o procedimento habitual de cálculos subtrativos com a linha numérica não tenha sido seguido, esta diferenciação denota flexibilidade dos alunos no modo como usam a linha para tirar partido dos factos numéricos conhecidos (100-50, no primeiro caso; 52-30, no segundo). O modo diferenciado acaba por suscitar a explicitação da relação parte-todo que Luís tinha generalizado anteriormente, ilustrada aqui com mais um exemplo: 52-23=29; 52-29=23.

Conclusões

Os resultados obtidos permitem-nos avançar na compreensão da forma como evolui a flexibilidade de cálculo, dada a relação estreita evidenciada entre a evolução das estratégias de cálculo e o desenvolvimento concetual relativo aos números. Já no 1.º ano, os alunos começam a familiarizar-se com as três componentes dos números (Gray & Tall, 1994; Tall, 2013): o processo aditivo de combinar dois grupos para formar um outro (neste caso, o 13), o entendimento de número enquanto soma (objeto-número) e as múltiplas expressões simbólicas representativas de ambos (processo e objeto). Por exemplo, a expressão 6+7 representa tanto o número 13 como uma forma de operar no âmbito de uma estrutura aditiva que resulta no objeto matemático 13. Como é afirmado por diversos autores (Sfard, 1991; Tall, 2013), conceito e processo constituem dois lados da mesma moeda. Também no 2.º ano, objeto (número representado por diferentes expressões) e processo operatório (para alcançar uma dada solução por recurso a uma estratégia) surgem de forma simultânea (Tall, 2013).

Relativamente aos pares de alunos apresentados neste artigo, podemos inferir existirem diferentes níveis de desenvolvimento concetual (Sfard, 1991). O par Ilda e Joana encontra-se na fase de interiorização, evidenciada pela necessidade do recurso aos círculos para realizar contagens. Em ambas as tarefas, os outros dois pares parecem encontrar-se na fase de condensação, atendendo à ordem de grandeza dos números envolvidos. Existem evidências de uso de diferentes expressões como representações do mesmo número (por exemplo, 6+7; 12+1; 2+11; ou 25+25; 100-50). De notar que estes alunos efetuam generalizações, como no caso da relação parte-todo associada à decomposição dos números, e fundada na propriedade comutativa da adição e na relação entre adição e subtração (resultando na compressão das ideias matemáticas, tal como sugerido por Gray e Tall, 1994). Tanto Luís como Paulo evidenciam um maior grau de participação nas tarefas do que os colegas com quem trabalham, e ambos revelam o domínio de factos numéricos, durante a aula observada de 2.º ano, parecendo ter reificado os números, propostos na respetiva tarefa, envolvendo a relação de dobro/metade e os múltiplos de 10. Assim, o domínio destes factos numéricos permite-lhes estabelecer relações numéricas e deduzir valores desconhecidos. Por exemplo, o modo como Luís chega às soluções de 100-52 e 19+25, estabelecendo relações numéricas em processos que ocorrem em simultâneo, parece evidenciar o processo *zeroing-in* descrito por Threlfall (2009). A relação metade/dobro, associada à noção de par/ímpar, surge como uma propriedade dos números mas também como um elemento-chave na forma como os alunos vão desenvolvendo um cálculo flexível. No 1.º ano, a meio do ano letivo, esta relação encontrava-se em construção. No início do 2.º ano, encontra-se já reificada para números até 100, para estes dois alunos.

A flexibilidade associada às relações numéricas distingue-se claramente dos procedimentos processuais (Gravemeijer et al., 2016; Mendes et al., 2016) utilizados, por exemplo, por Lúcia quando usa o processo de contagem pelos dedos ou por Luís quando realiza o procedimento da decomposição dos números em ordens. Este último procedimento parece ser usado de forma mecanizada, independentemente das características dos números em causa (Brocardo, 2014), pois os alunos operam com as dezenas e depois com as unidades, não tirando partido dos casos em que os números podem ser arredondados à dezena mais próxima com compensações decorrentes das transformações numéricas. Esta mecanização conduz os alunos a: (i) não repararem nos erros cometidos (assumindo sem reflexão crítica, por exemplo, 50-21=39), mesmo que os números obtidos sejam destituídos de sentido; e (ii) ignorarem as relações numéricas que poderiam estabelecer com factos conhecidos (por exemplo, 50-21 poderia ter sido relacionado com 50-20; e 52-29 e 50-29 com 50-30). É de referir, a este respeito, a diferença de desempenho dos alunos no trabalho autónomo e na fase de discussão, como aconteceu com Luís que evidenciou um maior sentido numérico durante a discussão conduzida pela professora.

O facto de, na exploração da tarefa *Cartões com números*, os alunos oscilarem entre o estabelecimento de relações numéricas e o uso do procedimento mecanizado de decomposição releva a importância da socialização do uso das relações com valores conhecidos, dado o seu potencial para o desenvolvimento nos alunos da flexibilidade de cálculo. Neste estudo, a professora mostra uma preocupação constante nesse sentido. É de salientar o seu papel no modo como gere as discussões coletivas, solicitando sistematicamente novas formas de relacionar os números e as operações, o que consideramos ser um contributo para a gradual construção de uma rede de relações numéricas como suporte da flexibilidade de cálculo e para a posterior evolução dos alunos para uma fase de reificação. Assim, a professora promove o desenvolvimento nos alunos da flexibilidade de cálculo quando, no caso da tarefa *Pintainhos,* solicita justificações para as decomposições do 13 apresentadas pelos alunos e a sua relação com o contexto da tarefa, ou coloca à discussão as vantagens de usar uma organização como forma de garantir a apresentação de todas as possibilidades na tabela. As relações numéricas estabelecidas no âmbito de um cálculo flexível, adaptado aos números em causa, são construídas com base na estruturação numérica (Baroody & Rosu, 2004; Morais et al., 2018), pelo que justificar a exaustão das decomposições de um número natural (Cobb et al., 1997) torna-se um elemento essencial no processo de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo aditivo. O mesmo acontece no caso de *Cartões com números,* quando a professora foca a discussão no uso da estratégia de compensação, a qual permite gerar novo conhecimento. Deste modo, os alunos reparam nos números envolvidos nas expressões e, com base no seu conhecimento numérico, estabelecem relações para alcançar os valores desconhecidos. Parece, pois, existir uma associação entre a evolução dos alunos e a forma como as tarefas são discutidas coletivamente, tal como é sugerido noutros estudos (por exemplo, Mendes et al., 2016). A flexibilidade encontra-se plasmada nas diferentes formas de compensar consoante os números a transformar correspondam ao aditivo ou ao subtrativo, bem como no modo variável como a solução é alcançada, dependendo das características dos números ou do conhecimento numérico pessoal (Threlfall, 2009). Concluímos, assim, que a flexibilidade de cálculo é substantivamente suportada pela criação e expansão de uma rede de relações numéricas (Gravemeijer et al., 2016, Serrazina & Rodrigues, 2017) realizadas nas fases de condensação e reificação presentes no modelo de Sfard (1991).

Notas

[1] Versão revista e ampliada de comunicações apresentadas em Encontros.
[2] Antes da discussão da tarefa, era recolhida a folha de um dos elementos do par de modo a garantir que a respetiva produção não fosse alterada durante a discussão.
[3] Os pares selecionados para videogravação nos dois anos letivos são os mesmos: Luís e Lúcia; e João e Paulo. No entanto, na aula de 5 de março, João não se encontrava presente e Paulo trabalhou com Mónica. O trabalho do par Ilda e Joana foi captado nessa aula pela videogravação, tendo sido também analisado.
[4] A produção deste par, inserida na Figura 5, corresponde à digitalização do trabalho de João, recolhido antes da discussão da tarefa, pois o de Paulo tem os resultados retificados após a discussão.

Referências

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations — The number sense view. In A. J. Baroody & T. Torbeyns (chairs), *Developing adaptive expertise in elementary school arithmetic*. *Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco, California.

Brocardo, J. (2014, setembro). Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning. *Paper apresentado em ECER*, Porto, Portugal.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research of Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense*. *Addition, and subtraction*. Heinemann: Portsmouth.

Gravemeijer, K. (2015). Design research as a research method in education. In A. A. V. Pereira, C. Delgado, C. G. da Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, & M. P. Alves (Coords.), *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto* (pp. 5-19). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(1), 25–44. http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107821

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: Adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41*(5), 591–604.

Heirdsfield, A., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). Especificidades e desafios da design research: o exemplo de uma experiência de ensino no 1.º ciclo. *Quadrante, 25*(2), 50-75.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Números racionais no 1.º ciclo: compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante*, *27*(1), 25-45.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2015). Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 339-345). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Serrazina, L., & Rodrigues, M. (2017). 'Day number': A promoter routine of flexibility and conceptual understanding. *Journal of Mathematics Education, 10*(2), 67-82. doi.org/10.26711/007577152790013.

Serrazina, L., & Rodrigues, M. (2014). A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. In J. Brocardo, A. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2014)* (pp. 109–120). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, *22*, 1-36.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 557-567.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives)*. Cambridge: Cambridge University Press.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Dooren, W. V. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), 335-259.

Anexo

Tarefa *Pintainhos*

Pintainhos

Esta galinha começou a chocar treze ovos. Os pintainhos não saem da casca ao mesmo tempo. De cada um dos ovos vai sair um pintainho.

Mostra todas as situações possíveis com os números.


Tarefa *Cartões com números*

Cartões disponibilizados aos alunos:

11 + 25   50 - 25   19 + 25   25 + 21   100 - 52

25 + 25   50 - 21   50 - 30   52 - 30   100 - 48

25 + 9   50 - 20   100 - 50

50 - 29   20 + 25   25 + 26   52 - 29   10 + 25

Enunciado da tarefa:

Separa os cartões de que sabes o valor daqueles que não sabes.

Consegues chegar ao valor dos que não sabes, utilizando os cartões que sabes? Como?

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor