Cálculo mental com números racionais e desenvolvimento do sentido de número

Mental computation with rational numbers and number sense development

Renata Carvalho
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. O desenvolvimento do cálculo mental dos alunos está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número. Neste artigo, procuramos perceber que componentes do sentido de número estão refletidos nas estratégias de cálculo mental com números racionais de alunos do 6.º ano, centrando esta análise no seu conhecimento e destreza acerca dos números e suas operações e no respetivo uso em situações de cálculo. A metodologia é qualitativa com uma abordagem de investigação baseada em design com a participação de 39 alunos do 6.º ano, duas professoras e uma investigadora. Os dados foram recolhidos através de gravações áudio e vídeo de aulas de cálculo mental e posteriormente transcritos para análise. Os resultados mostram que as estratégias dos alunos no cálculo mental com número racionais evidenciam que estes possuem sentido de número. Estas estratégias centram-se no uso de relações numéricas como a relação entre representações dos números racionais e operações, o que lhes permite comparar números e compreender a sua grandeza. A mudança de representação assume um papel importante na construção de estratégias de cálculo mental com números racionais evidenciando sentido de número por parte dos alunos.
Palavras-chave: cálculo mental; sentido de número; números racionais; estratégias dos alunos.

Abstract. The development of students' mental computation is closely related to the development of number sense. In this article, we aim to understand which number sense components are reflected in grade 6 students' mental computation strategies with rational numbers. The analysis stands on the knowledge and skills that students show about numbers and their operations, and on its use in computational situations. The methodology is qualitative with a design-based research approach. The participants are 39 grade 6 students, two teachers and a researcher. The data were collected through audio and video recordings of mental computation lessons that were later transcribed for

analysis. The results show that students' mental computation strategies with rational numbers reflect number sense. These strategies focus on the use of a diversity of numerical relationships, among them the relation between different rational numbers representations and operations, which allows students to compare numbers and understand their magnitude. Changing representations has an important role in the construction of mental computation strategies with rational numbers showing students' number sense.
Keywords: mental computation; number sense; rational numbers; students' strategies.

Recebido em fevereiro de 2019
Aceite para publicação em julho de 2019

Introdução

O desenvolvimento do sentido de número é um aspeto central na aprendizagem dos números e das operações e, no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (PMEB, 2007), era assumido como propósito principal de ensino ao longo de toda a escolaridade básica. Este propósito perdeu-se com a entrada em vigor do Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013), que não faz qualquer referência à sua importância. No entanto, "Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (PMEB, 2007, p. 13) é basilar na aprendizagem dos números e na preparação dos jovens, isto porque desenvolver o sentido de número é promover um modo de pensar transversal a todo o processo de ensino-aprendizagem (Reys, 1994).

Assumimos que o cálculo mental, enquanto capacidade transversal, cujo desenvolvimento deve ser integrado no processo de ensino-aprendizagem dos alunos em todos os temas matemáticos e ao longo da escolaridade, está "intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número" (PMEB, 2007, p. 10). Desenvolver o cálculo mental dos alunos contribui para o desenvolvimento do sentido de número. Neste sentido, o nosso objetivo é perceber que componentes do sentido de número estão refletidos nas estratégias de cálculo mental com números racionais de alunos do 6.º ano de escolaridade. Este estudo surge a partir de problemas identificados na prática, pela primeira autora (doravante designada por investigadora), onde a mobilização de aprendizagens envolvendo números racionais se mostrava complexa para os alunos no 6.º ano e em que o cálculo mental com números racionais envolvendo várias representações era inexistente. Paralelamente, a investigação sobre cálculo mental com números racionais em Portugal era escassa, enquanto, a nível internacional, surgem diversas recomendações para o aprofundamento desta temática (e.g., Caney & Watson, 2003). É neste contexto que este estudo traz contributos para a investigação em Educação Matemática e para a valorização do cálculo mental com números racionais a nível nacional e internacional.

Sentido de número

O conceito de sentido de número assume uma variedade de interpretações, o que decorre da sua complexidade e grande variedade de componentes. Na perspetiva de McIntosh, Reys e Reys (1992), ter sentido de número

> refere-se ao conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. (p. 4)

O seu desenvolvimento é um processo lento e gradual que se inicia, no caso dos números racionais, antes do ensino formal destes números (McIntosh et al., 1992), onde a conexão entre diferentes formas de representação assume um papel importante. O sentido de número desenvolve-se diariamente na sala de aula aquando da abordagem dos diversos tópicos matemáticos, contudo, as experiências pessoais dos alunos fora da escola representam também um importante complemento para este desenvolvimento. É um processo que se desenvolve e se consolida com experiência e conhecimento (Reys, 1994).

Berch (2009) considera que os componentes do sentido de número revelam uma determinada consciência, intuição, reconhecimento, conhecimento, capacidade, desejo, sentir, expectativa, processo, estrutura conceptual, ou linha numérica mental, o que, de certo modo, vai ao encontro da perspetiva de Reys (1994) quando associa o sentido de número a um modo de pensar. Para Berch (2009), de entre cerca de trinta componentes, ter sentido de número é ter capacidade, por exemplo, para comparar a grandeza dos números, decompor números naturais, reconhecer o efeito das operações sobre os números, ter fluência e flexibilidade com números, compreender os números e suas relações, reconhecer números de referência, compreender e usar representações e expressões equivalentes, de acordo com o contexto em que se insere, mostrar conhecimento sobre números em vez de olhar para estes apenas para realizar algoritmos e aplicar procedimentos.

Reys (1994) considera que o sentido de número pode ser descrito através da análise do seu valor e uso. Neste sentido, sugere que um aluno com sentido de número analisa um problema holisticamente antes de confrontar detalhes (e.g., para adicionar $1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$, o aluno recorre mentalmente à propriedade comutativa e adiciona de imediato $1\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$); procura relações entre números e operações tendo em conta o contexto do problema proposto (e.g., se pretende comprar 4 cadernos sendo o valor de cada caderno de 0,39€, percebe que, uma vez que o preço unitário é inferior a 0,50€, os 2€ que tem são suficientes para a compra); seleciona ou cria uma estratégia que apoia a compreensão de relações entre números e operações e que lhe permite optar pela representação mais "eficiente" (e.g., supondo que pelo menos 75% de uma turma com 30 alunos necessita de aprovar o plano para uma viagem de estudantes, um aluno poderá pensar em 75% como 50% mais 25% ou, metade mais metade da metade); recorre a números de referência para julgar a magnitude dos números (e.g., $\frac{2}{5}$ de 49 é inferior a metade de 49 uma vez que $\frac{2}{5}$ é inferior a $\frac{1}{2}$); e, por fim, reflete acerca da razoabilidade de um resultado (e.g., $3{,}2 \times 4{,}8$ não poderá ser 153,6, uma vez que o resultado deverá ser próximo do produto de 3 por 5, ou seja 15, o que significa que provavelmente foi cometido um erro no posicionamento da vírgula no produto).

McIntosh et al. (1992) propõem um quadro de referência para a análise do sentido de número que envolve o conhecimento e destreza com números, conhecimento e destreza com operações, e aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo. No conhecimento e destreza com números, os autores consideram que é essencial ter sentido de ordenação dos números, usar múltiplas representações, ter sentido de grandeza absoluta e relativa dos números e possuir um sistema de números de referência. A aquisição do sentido de ordenação envolve a compreensão do sistema de numeração, do sistema decimal de posição ao nível dos números naturais e racionais e também a compreensão dos números racionais nas suas diferentes representações. Na perspetiva destes autores, o sentido de número reflete-se através do reconhecimento da simbolização das várias representações de um número e a composição/decomposição de números permite expressar um número numa forma equivalente, reconhecida como mais eficiente, que pode facilitar as operações com números racionais. Num estudo recente, Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) reforçam a importância do uso de múltiplas representações na aprendizagem dos números racionais, nomeadamente da percentagem em conjunto com as representações decimal e fracionária, pelos contributos que pode trazer para o desenvolvimento do sentido de número.

Os números de referência assumem um papel importante no desenvolvimento do sentido de ordenação, aspeto defendido por Berch (2009), Reys (1994) e Cruz e Spinillo (2004). Por exemplo, ao considerar a fração $\frac{3}{5}$, pode-se pensar na sua representação pictórica, na decimal, numa fração equivalente ou ainda usar $\frac{1}{2}$ como referência para se compreender a sua grandeza. Para Cruz e Spinillo (2004), o uso de referências permite alcançar melhores resultados do que quando se adotam estratégias puramente simbólicas. Estes autores acrescentam ainda que a utilização do referencial de metade favorece a quantificação das frações e a compreensão da adição de frações pois permite o aparecimento de esquemas de equivalência relevantes para esta compreensão. Quanto ao desenvolvimento do sentido de grandeza de um número, McIntosh et al. (1992) referem que este é adquirido com o tempo e com experiência matemática. O trabalho com números ao longo do tempo irá permitir desenvolver "a capacidade de reconhecer o valor relativo de um número ou de uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade e a capacidade de detetar o valor geral (ou grandeza) de um dado número ou quantidade" (p. 11).

McIntosh et al. (1992) afirmam que, no conhecimento e destreza com operações, importa compreender o efeito das operações, ter a noção das propriedades das operações e da relação entre operações. Relativamente ao efeito das operações, esta deve ser compreendida usando vários tipos de números. Acrescentam ainda que as propriedades matemáticas como a propriedade comutativa, associativa e distributiva, têm sido ensinadas como regras formais sem que se perceba qual a sua utilidade nas operações. No caso da propriedade comutativa, os alunos memorizam que $2 \times 3 = 3 \times 2$ mas nem sempre fazem uso das suas potencialidades em situações de cálculo, onde as propriedades aritméticas são úteis, pois tornam o cálculo mais rápido e eficiente. Alunos que utilizam as propriedades das operações em situações diversas de cálculo manifestam ter sentido de número, apesar de muitas vezes esse uso ser intuitivo. Os alunos devem compreender a utilidade das propriedades das operações, em vez de memorizar um conjunto de procedimentos que acabam por nunca mobilizar em situações onde estas têm um papel fundamental, como é o caso do cálculo mental. Compreender e conhecer as relações entre operações é ter mais ferramentas para pensar e resolver problemas, mas para relacionar as operações é preciso primeiro compreendê-las. Por exemplo, a relação inversa entre operações é uma ferramenta com potencial na resolução de problemas. A operação $360 \div 6$ pode ser vista como $6 \times ? = 360$ e, em vez de se utilizar a divisão na sua resolução, recorre-se à multiplicação. Os autores consideram que o trabalho com números racionais facilita a exploração e descoberta de novas relações, principalmente entre a multiplicação e a divisão, aumentando a possibilidade de surgirem novas estratégias.

Por fim, na aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo, McIntosh et al. (1992) destacam três aspetos importantes nesta área do sentido de número: compreensão entre o contexto e o cálculo a efetuar, escolha da estratégia adequada e verificação da resposta de forma reflexiva. O enunciado de um problema fornece as pistas necessárias à sua resolução, não só quanto ao tipo de operação mais adequada, mas também relativamente ao tipo de resposta que se pretende, se exato, arredondado ou aproximado. Quanto ao tipo de estratégias a usar na resolução de um problema, ter sentido de número implica ter um leque de estratégias disponíveis para o resolver. Estas estratégias vão sendo cada vez mais diversas à medida que aumenta a complexidade dos números. A possibilidade de seguir vários caminhos permite ao aluno repensar a sua resolução, avaliá-la e completá-la ou até substituí-la por outra que lhe pareça mais eficaz. A verificação do resultado deve ser feita em função do problema, pensando sempre se essa resposta faz sentido considerando os dados e o que era pedido inicialmente. Por vezes, os alunos omitem esta verificação de resultados, ou porque aceitam o resultado como um produto inquestionável, ou porque o resultado não é importante para eles. Na perspetiva de

McIntosh et al. (1992) e Cramer, Wybeg e Leavitt (2009), um aluno que tenha sentido de número é reflexivo sobre os números, as operações e os resultados obtidos e apresenta flexibilidade na utilização de estratégias de comparação e operação com números.

Cálculo mental com números racionais

Neste estudo, o cálculo mental é entendido como um cálculo exato, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz que, recorrendo a representações mentais, faz uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações, onde é possível usar registos intermédios em papel (Carvalho, 2016). Calcular mentalmente requer a compreensão da grandeza e valor dos números e do efeito das operações sobre os números e o domínio prévio de um conjunto de factos numéricos que permitam calcular rapidamente e com precisão (Heirdsfield, 2011). Neste sentido, o conhecimento que os alunos possuem sobre números e operações é essencial para a realização de cálculo mental em geral e com números racionais em particular.

Bourdenet (2007) indica que o cálculo mental com números racionais desenvolve-se alicerçado em estratégias de cálculo com números naturais já conhecidas e mobilizadas pelos alunos. Na perspetiva deste autor, os alunos, quando calculam mentalmente com números racionais devem, por exemplo, fazer uma extensão das aprendizagens adquiridas com números naturais para os numerais decimais, podendo, assim, usar o produto de dois números naturais, em vez de decimais, e dividir por 100. No entanto, a capacidade para operar com numerais decimais, como se estes fossem números naturais com referente a $\frac{10}{100}$ requer um conhecimento sobre números que se inicia pelo desenvolvimento de estratégias básicas de cálculo mental.

Na perspetiva de Thompson (1999) e de Gálvez et al. (2011) no conjunto dos números naturais os alunos recorrem ao uso de estratégias baseadas em contagens; utilização de factos conhecidos; uso de dobros e "quase dobros"; mudança de operação; números de referência; compensação; decomposição; propriedades das operações; e utilização de formas mentais dos algoritmos escritos. As estratégias de contagem são consideradas as mais básicas em cálculo mental, pelo que não surgem associadas ao cálculo mental com números racionais. Uma das razões para tal pode ser o facto de o conjunto dos números racionais ser denso e mais complexo do que o conjunto dos números naturais exigindo assim a mobilização de estratégias mais sofisticadas e eficazes. O mesmo poderá acontecer com o uso de "quase dobros" que também não surge associado ao cálculo mental com números racionais. Contudo, é possível identificar o recurso ao conceito de dobro, de metade e de metade de metade associados ao cálculo de percentagens como 50%, 25% e 75% (Carvalho, 2016).

No cálculo mental com números racionais, surgem estratégias de mudança de representação (Caney & Watson, 2003) induzidas, em parte, pelo uso das representações decimal, fracionária e percentagens (e.g., fração→percentagem; percentagem→fração; percentagem→decimal e decimal→percentagem) ou de números racionais para números naturais (decimal→número natural referente a $\frac{10}{100}$ em que, por exemplo, no cálculo de 0,19 + 0,1 se considera 0,19 como 19 e 0,1 como 10). O recurso a equivalências, não apenas entre representações dos números (e.g., equivalência entre expressões ou relações entre operações inversas), surge com números naturais, mas é mais forte nos números racionais pelas relações que se estabelecem entre os números e a utilização de regras memorizadas. Nos números racionais, surgem relações parte-todo ou parte-parte, características destes números, dada a sua estrutura relacional e os sentidos que assumem em determinados contextos (parte-todo, quociente, operador, medida e razão). A utilização de imagens pictóricas mentais surge como estratégia de cálculo mental para os números racionais, possivelmente associada à representação gráfica da relação parte-todo, que ocupa um espaço significativo no início da exploração da representação fracionária.

Cruzando a perspetiva de diversos autores (e.g., Caney & Watson, 2003; Carvalho, 2016; Gálvez et al., 2011; Thompson, 1999) podemos considerar sete estratégias básicas de cálculo mental comuns aos números naturais e números racionais: utilização de factos conhecidos; utilização de formas mentais dos algoritmos escritos ou regras memorizadas; mudança de operação; compensação; decomposição; utilização de números de referência; e utilização de propriedades das operações. A complexidade dos números racionais irá possibilitar o aparecimento de um maior número de relações numéricas.

A aquisição de factos numéricos inicia-se com a aprendizagem dos números naturais, e vai aumentando ao longo da vida, por influência escolar e da vida quotidiana. Estes factos referem-se ao conhecimento prévio de somas, produtos, diferenças e quocientes e são essenciais para apoiar o cálculo mental. Por exemplo, se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ for um facto numérico para um determinado aluno, no cálculo de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ ele pode decompor $\frac{3}{4}$ em $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ para rapidamente usar este facto numérico no cálculo de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ e chegar ao resultado $1\frac{1}{4}$.

O recurso a estratégias baseadas na aplicação de regras memorizadas surge em função da experiência matemática dos alunos, cujo conhecimento acerca das operações com números os leva a simplificarem cálculos cada vez com maior frequência. Estas regras memorizadas envolvem, por exemplo, a aplicação de procedimentos referentes à multiplicação e divisão por potências de 10 (memorizando que, na multiplicação por 10, se desloca a vírgula uma posição decimal para a direita ou, na divisão por 10, uma posição decimal para a esquerda) ou procedimentos algorítmicos como, na adição de frações, a adição de numeradores quando os denominadores são iguais. O uso de factos numéricos e de regras memorizadas pode surgir isoladamente enquanto estratégia de cálculo mental, mas pode igualmente surgir como auxiliar no estabelecimento de relações entre números e operações, como mostra o exemplo para o cálculo de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.

Estratégias baseadas na mudança de operação, compensação, decomposição, utilização de números de referência e propriedades das operações referem-se a relações numéricas de ordem vária, uma vez que envolvem aprendizagens com compreensão sobre números e operações e evidenciam pensamento relacional (Empson, Levi & Carpenter, 2010). São estas estratégias que refletem o sentido de número dos alunos. Pensar de forma relacional é ter capacidade para usar propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson et al., 2010). O pensamento relacional é importante para o cálculo mental por se basear em relações numéricas.

Metodologia de investigação

Este estudo é qualitativo e interpretativo com uma metodologia de investigação baseada em design (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere, & Schauble, 2003; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira & Quaresma, 2016). Participam os alunos de duas turmas do 6.º ano (39 alunos) que já tinham trabalhado os números racionais em várias representações (decimal, fração, percentagem) e nas quatro operações, as duas professoras dessas turmas e a investigadora como observadora participante. O anonimato dos alunos é assegurado usando nomes fictícios.

O estudo decorreu em três fases (Figura 1): preparação, experimentação e análise. A preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar com alunos do 5.º ano da investigadora, baseado num protótipo de experiência de ensino com seis tarefas de cálculo mental. Era objetivo desta fase perceber as estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais e as dinâmicas inerentes à realização de uma aula centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas.

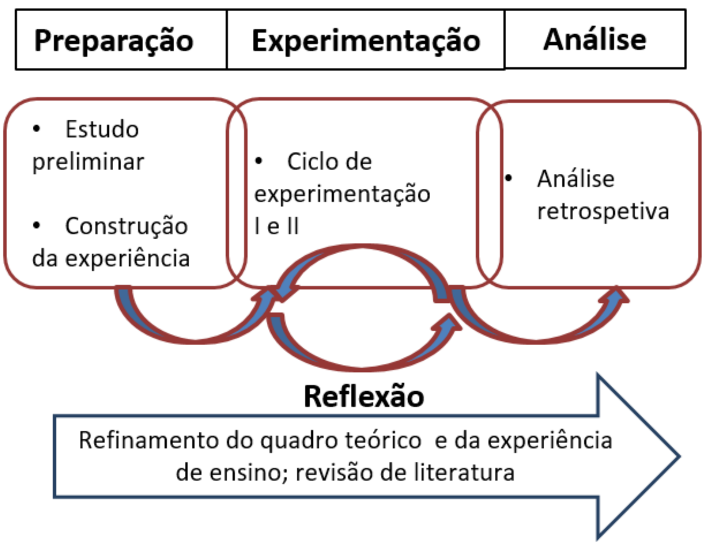

Figura 1. Fases de desenvolvimento do estudo

Posteriormente, foi construída uma experiência de ensino, partindo da conjetura que a realização, durante dois períodos letivos, de tarefas de cálculo mental, em contextos matemáticos (expressões) e não matemáticos (situações contextualizadas), com números racionais envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias dos alunos, contribui para o desenvolvimento do seu reportório de estratégias de cálculo mental e para a melhoria do seu desempenho em tarefas de cálculo mental.

A fase de experimentação contemplou dois ciclos, (CI) e (CII), realizados em anos letivos consecutivos. Os dados foram recolhidos recorrendo à observação direta das aulas e de reuniões de preparação e de reflexão sobre a experiência de ensino com os contributos das professoras participantes. A experiência foi elaborada pela investigadora e discutida e reajustada com as professoras das turmas. A discussão na sala de aula foi conduzida pelas professoras, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias dos alunos. As reuniões de trabalho com as professoras foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva. Os dados apresentados neste artigo referem-se a episódios de aula envolvendo apenas alguns alunos dos ciclos CI e CII.

Para a análise de dados foram visionados e transcritos episódios de aula que posteriormente analisámos com o intuito de identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão coletiva e os componentes do sentido de número que essas estratégias refletem. Seguindo o quadro de referência para a análise do sentido de número de McIntosh et al. (1992), definimos as categorias de análise. A relação entre diversas perspetivas referentes ao sentido de número (e.g., Berch, 2009; McIntosh et al. 1992; Reys, 1994) e as estratégias de cálculo mental com números racionais (e.g., Caney & Watson, 2003; Carvalho, 2016) apoiaram a definição das subcategorias de análise (Tabela 1).

As três fases do estudo foram acompanhadas por uma reflexão individual da investigadora e uma reflexão coletiva entre esta e as professoras participantes. Esta reflexão permitiu melhorar e aprofundar continuamente o quadro concetual referente ao cálculo mental com números racionais, a conjetura de ensino-aprendizagem e a experiência de ensino.

Tabela 1. Categorias e subcategorias de análise do sentido de número

Categorias	Subcategorias
Conhecimento e destreza com números	Comparar números Usar múltiplas representações dos números Ter sentido de grandeza absoluta e relativa dos números Usar números de referência Relacionar números
Conhecimento e destreza com operações	Usar as propriedades das operações Relacionar operações
Conhecimento e destreza com números e operações em situação de cálculo	Compreender o contexto e operação a realizar num dado problema Selecionar uma estratégia eficiente Avaliar a razoabilidade do resultado

A experiência de ensino

A experiência de ensino é composta por 10 tarefas de cálculo mental que denominámos de "Pensa rápido!". Estas tarefas incluem expressões numéricas e situações contextualizadas que foram projetadas semanalmente na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado. Cada tarefa é constituída por duas partes com cinco expressões ou quatro situações contextualizadas. Os alunos têm 15 segundos para resolver individualmente cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada e anotar o resultado numa folha de registo. No final da primeira parte, promove-se um momento de discussão de estratégias dos alunos, gerido essencialmente pela professora da turma, com o objetivo de influenciar positivamente a realização da segunda parte da tarefa. No final da segunda parte, promove-se novo momento de discussão. As tarefas de cálculo mental têm uma duração entre 30 e 90 minutos, onde se privilegia o questionamento na sala de aula, quer no sentido professor-aluno, quer entre alunos, recorrendo a questões do tipo: "Como pensaste?"; "Como chegaste ao teu resultado?"; "O que pensam da estratégia do colega?"; "Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega?". Este tipo de questões tem como objetivo ajudar o aluno a explicar e clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as estratégias dos alunos, através da interação entre estes. De realçar o papel das professoras e da investigadora na promoção de um ambiente onde os alunos tiveram oportunidade de explorar, discutir e raciocinar (Yang & Reys, 2001) sobre números e operações.

Na experiência de ensino, os alunos começam por calcular mentalmente com a representação fracionária (adição/subtração na tarefa 1 e multiplicação e divisão na tarefa

2), depois com numerais decimais e frações com as quatro operações básicas (tarefa 3) e a seguir apenas com numerais decimais (adição/subtração na tarefa 4 e multiplicação e divisão na tarefa 5). Posteriormente, resolvem situações em contextos de medida e comparação com a representação fracionária e decimal (tarefa 6). A representação percentagem surge na tarefa 7 e, nas tarefas 8, 9 e 10, surgem as três representações dos números racionais (decimal, fracionária e percentagem).

Nas tarefas com expressões, intercalam-se expressões sem valor em falta (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$) com expressões com valor em falta (e.g., 0,7 +__=1), sendo que estas últimas representam um contexto de aprendizagem promotor de pensamento relacional ao invés de uma aplicação direta de procedimentos de cálculo (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). As tarefas com situações contextualizadas (e.g., "Uma tina tem de capacidade 22,5 l . Quantos baldes de $\frac{1}{2}$ l são necessários encher para despejar por completo a tina?") pretendem facilitar a criação de representações mentais, bem como ajudar os alunos a dar significado aos números através da relação entre estas e as expressões apresentadas, podendo o tipo de raciocínio ser transposto de uma situação para outra. As tarefas permitem não só rever e consolidar aprendizagens envolvendo números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental dos alunos.

Os números racionais surgem em cada tarefa de acordo com o tópico que as professoras estavam a trabalhar no momento. Quando se estudam volumes, usa-se sobretudo a representação decimal; durante o estudo das relações e regularidades, usa-se a representação em fração; e, em Organização e Tratamento de Dados, usam-se as três representações. Esta opção permite desenvolver o cálculo mental de forma integrada com a aprendizagem dos números racionais prolongada no tempo e estabelecer relações entre diferentes tópicos matemáticos. Recorremos ao uso de numerais decimais com o último dígito par ou múltiplos de 5 e de 10 e números de referência para facilitar a equivalência entre as representações decimal, fracionária e percentagem (e.g., $\frac{1}{2}$, 0,25, $\frac{3}{4}$, 10%). Enfatizámos a importância de algumas relações numéricas (e.g., dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2) fazendo-as surgir em diversas questões ao longo das 10 tarefas.

Estratégias de cálculo mental com números racionais e sentido de número

Na secção que se segue, iremos analisar as estratégias de cálculo mental com números racionais de alunos do 6.º ano e identificar que componentes do sentido de número estão refletidas nas estratégias que apresentam nos momentos de discussão coletiva. Apresentamos evidências de estratégias para cada uma das categorias de análise, embora as explicações dos alunos possam mostrar evidência de mais do que um dos componentes do sentido de número analisados. As evidências apresentadas pretendem ser representativas das estratégias dos alunos nos ciclos de experimentação CI e CII.

Conhecimento e destreza com números

Os alunos resolveram diversas questões de cálculo mental com números racionais (expressões e situações contextualizadas) envolvendo a representação fracionária, decimal e percentagem. A resolução da seguinte situação contextualizada: "A mãe da Catarina fez um bolo de chocolate. Ao almoço a Catarina comeu $\frac{1}{10}$ e o pai $\frac{1}{5}$ .Ambos comeram mais ou menos de metade do bolo de chocolate?" envolve a comparação de frações. Diogo (CI) resolve a situação referindo que a Catarina e o pai comem menos de metade do bolo de chocolate:

> Diogo: Menos. $\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{10}$. Se juntarmos $\frac{2}{10}$ mais $\frac{1}{10}$ do pai fica $\frac{3}{10}$. E para alcançar metade tinha que ser $\frac{5}{10}$. $\frac{3}{10}$ é menos de metade.

O aluno recorre a frações equivalentes ($\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{10}$ e $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{5}{10}$ embora não refira claramente esta última equivalência), e à adição de frações sem explicitar os cálculos associados. Compara com facilidade a soma com a fração de referência que é indicada na situação. A sua explicação mostra destreza na linguagem e realização de cálculos.

Na divisão de frações, foi proposto aos alunos que calculassem $\frac{6}{8} \div \frac{3}{4}$. Uma grande parte dos alunos recorre ao procedimento do "inverte e multiplica" ou então à divisão de numeradores e denominadores, uma vez que estes são múltiplos. Contudo, João (CI) mostra ter analisado as frações envolvidas, ao referir que estas são frações equivalentes e que o quociente entre elas é igual a 1:

> João: Eu vi logo que $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$ eram frações equivalentes e numa divisão entre [frações equivalentes] é igual a 1.

Enquanto outros alunos indicam como quociente $\frac{24}{24}$ ou $\frac{2}{2}$, João mostra ter noção da grandeza representada pelas frações e do resultado da divisão entre elas. A facilidade com que os alunos foram recorrendo a frações equivalentes, no cálculo mental de determinadas expressões, pode ser reveladora de que criaram um reportório de frações equivalentes ou então que compreenderem este tipo de equivalência.

Uma das estratégias que foi ganhando espaço e força ao longo da experiência de ensino foi o recurso à mudança de representação, possivelmente por se ter valorizado o cálculo mental envolvendo simultaneamente as representações fracionária, decimal e percentagem. Com frequência os alunos recorrem a frações para realizar cálculos apresentados com numerais decimais, como foi o caso de João (CI) no cálculo de $0{,}5 + 0{,}25$ e de Rui (CII) no cálculo de $1{,}25 - ? = 0{,}75$:

João: Cinco décimas é $\frac{1}{2}$ e 25 centésimas é $\frac{1}{4}$. Se é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ vai dar $\frac{1}{4}$... Não! Vai... dar $\frac{3}{4}$...
Eu depois transformei em 75 centésimas.

Rui: Fiz $\frac{5}{4}$; para chegar a $\frac{3}{4}$ pus $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$.

João começa por mudar a representação decimal para fracionária e posteriormente de fracionária para decimal, indicando que a soma é $\frac{3}{4}$ ou 75 centésimas, sem explicitar se recorre a frações equivalentes para realizar a adição ou se simplesmente já possui como facto numérico adquirido que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Rui recorre igualmente à mudança da representação decimal para fração, indicando o valor em falta sobre a forma de fração. Recorre à subtração, verificando que quantidade deve retirar a $\frac{5}{4}$ para obter $\frac{3}{4}$ ($\frac{5}{4}$ para chegar a $\frac{3}{4}$) apresentando duas soluções equivalentes, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

O cálculo de $0{,}5+0{,}25$ foi apresentado aos alunos na parte 1 da tarefa 4 e o cálculo de $1{,}25-\,?=0{,}75$ na parte 2 da mesma tarefa, mas a estratégia de cálculo mental de Rui para o cálculo da segunda expressão reflete uma mudança na forma como este perceciona e opera com numerais decimais, o que poderá ter sido influenciado pela discussão realizada na parte 1 da tarefa. Para a resolução de $0{,}5+0{,}25$ (parte 1 da tarefa 4), Rui apresenta uma estratégia centrada na aplicação do algoritmo da adição, enquanto na segunda expressão recorre à mudança de representação:

Rui: Está ali 5 décimas e ali está 25 centésimas. Fiz unidades com unidades. Zero com 5, 5. 5 com 2. Não transformei o 5 em 50 centésimas . . . Zero com 5, 5. 5 com o 2, 7. Zero com zero, zero.

O trabalho desenvolvido, ao longo da experiência de ensino reforçou, através de discussões múltiplas, a importância de compreender a grandeza dos números e a equivalência entre diferentes representações, especialmente quando estão envolvidos números de referência em operações básicas, como nos casos acima analisados. A estratégia de João e a evolução da estratégia de Rui podem ser o reflexo desta compreensão.

A estratégia de Ivo (CI) para o cálculo de $0{,}82 \div ? = 1{,}64$ mostra que este relaciona números naturais em vez de numerais decimais, pelo que foi necessário mudar de representação:

Ivo: A mim deu-me... 5 décimas. Eu vi logo... Que 164 era o dobro de 82. Por isso, como era a dividir só podia ser 0,5.

Ao relacionar o quociente com o dividendo, percebeu que "164 era o dobro de 82", mas, como a operação indicada é a divisão, o divisor "só podia ser 0,5", certamente porque tem em mente a relação entre dividir por 0,5 e multiplicar por 2. De salientar que, ao contrário de Ivo, muitos foram os alunos que, percebendo a relação de dobro entre 1,64 e 8,2, indicaram como divisor 2 e não 0,5.

Na experiência de ensino, potenciámos o uso de números de referência, opção esta que se reflete nas estratégias dos alunos quando estes decidem acerca do número de referência mais adequado à resolução da situação apresentada, como mostra a estratégia de Pedro (CI) para o cálculo de 25% de 20:

> Pedro: Vi que o 25 não era múltiplo de 10. Foi assim que eu pensei e decidi logo usar o 5. O 5% de 20 é... O 25 tinha 3 cincos... 5 cincos e depois vi automaticamente que era o 5.

A estratégia de Pedro mostra que este recorre a factos numéricos básicos (tabuada do 5) para tomar decisões acerca do número de referência que vai usar (5%). Parece partir de 10% como referência, mas, como 25 não é múltiplo de 10, abandona esta ideia e opta por 5%. Calcula 5% de 20, cujo resultado não indica na sua explicação. Após ser questionado, indica ser 1 e recorrendo, supostamente, a uma estratégia multiplicativa. Refere 5 como resultado da operação, uma vez que 25% tem cinco cincos (5%×5=25), estabelecendo a equivalência entre $5 \times 5\%$ de 20 e 25% de 20. Esta estratégia reflete o uso de múltiplas relações numéricas e o recurso a conhecimentos sobre números de referência importantes para as tomadas de decisão de Pedro.

Conhecimento e destreza com operações

O conhecimento e destreza com operações envolvem o uso de propriedades das operações e a relação entre operações. A estratégia de Maria (CI) para o cálculo de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ mostra que esta recorreu a um conjunto de relações numéricas, entre elas a mudança de representação e a relação entre operações:

> Maria: A mim deu $\frac{1}{9}$, só que eu pus em número $0{,}111111\ldots$ $\frac{1}{3}$ é igual a 0,33333. Mas depois 0,33333 a dividir por 3 é igual a 0,11111 porque isto é tipo a tabuada do 11, como 11 vezes 1, 11 vezes 2, 11 vezes 3. Aqui é ao contrário, é a dividir por 3 que dá 11.

Maria relaciona as frações $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{3}$ com as dízimas $0,(1)$ e $0,(3)$, respetivamente, e $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ com a divisão de $\frac{1}{3}$ por 3 e, apoiando-se em factos numéricos (tabuada do 11), calcula $0,(3) \div 3 = 0,(1)$. A estratégia de Maria revela que esta compreende a equivalência entre representações, que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ se refere à multiplicação entre as duas frações apresentadas, bem como a relação entre operações inversas ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \div 3$).

Na resolução de $\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$, Gonçalo (CII) apresenta uma estratégia baseada na mudança de representação e no recurso a uma propriedade da divisão:

> Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos … Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50. Então dividi … Eu fiz $\frac{1}{4}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ que é 25:50.

Gonçalo muda a representação fracionária para percentagem, operando com percentagens como se fossem números naturais, e recorre a uma propriedade da divisão exata (divisor=dividendo÷quociente). O aluno converte $\frac{1}{4}$ em 25% e $\frac{1}{2}$ em 50% e divide a percentagem menor pela maior, quando a tendência de uma grande parte dos alunos é dividir o maior número pelo menor ou então multiplicar em vez de dividir, dada a relação entre as operações multiplicação e divisão. Por norma, os alunos conhecem a propriedade fundamental da divisão exata como dividendo=divisor×quociente, mas nem sempre têm a oportunidade de refletir e discutir a relação entre, por exemplo, o divisor, o dividendo e o quociente, podendo ficar a noção de que se recorre à multiplicação para calcular o divisor. Relações deste tipo foram discutidas na experiência de ensino sempre que surgiram erros desta natureza.

Conhecimento e destreza com números e operações em situação de cálculo

O conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo requer a compreensão do contexto e operação a realizar num dado problema, a capacidade para selecionar uma estratégia eficiente, bem como para avaliar a razoabilidade do resultado. Os exemplos seguintes apresentam estratégias onde os alunos identificam numa dada situação a operação a usar, mas também o modo como perante uma expressão, conseguem identificar uma situação contextualizada que os ajude a pensar sobre os números apresentados.

Para o cálculo de $\frac{3}{4} \div ? = \frac{1}{4}$, António (CII) ignora os denominadores das frações e opera apenas com numeradores, imaginando um contexto de dinheiro "3€ a dividir por 3 pessoas" envolvendo números naturais:

> António: Deu-me 3 pessoas. Eu pensei 3€. Eu esqueci o 4. 3€ a dividir por 3 pessoas dá igual a 1€ a cada pessoa . . . $\frac{3}{4}$ a dividir por 3 pessoas dá $\frac{1}{4}$ . . . Pensei assim $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

António parece procurar no seu reportório dois números que divididos originem quociente 1, à luz do contexto que imaginou e indica "3€ a dividir por 3 pessoas dá igual a 1€ a cada pessoa". Posteriormente, retoma a representação em fração e valida a sua estratégia relacionando a divisão de $\frac{3}{4}$ por 3 com a multiplicação, que aqui foi expressa através de adições sucessivas $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. A estratégia de António mostra que este recorreu a um contexto familiar para si, para o apoiar no cálculo da expressão de valor em falta e que conseguiu pensar usando números naturais, retomando depois a representação fracionária, o que mostra flexibilidade na forma como pensou e adaptou os seus conhecimentos sobre números à resolução da expressão apresentada.

Para resolver a seguinte situação contextualizada "A área da base de um cilindro é 4,2 m^2 e o seu volume 12,6 m^3. Calcula a altura", Maria (CI) recorre a factos numéricos para pensar num número que multiplicado por 4,2 desse 12,6:

> Maria: Eu não fiz a dividir. Eu fiz a multiplicar. Eu achei um número, 4,2 vezes um número, que desse 12,6. E encontrei o 3.

A situação, tal como foi apresentada aos alunos, poderia ser resolvida através das expressões $12{,}6 = 4{,}2 \times ?$ ou $12{,}6 \div 4{,}2 = ?$, sendo que a primeira expressão se relaciona diretamente com o cálculo do volume de um cilindro, expressão esta identificada por Maria e concretizada com sucesso. A segunda expressão, por norma, está relacionada com a manipulação algébrica que os alunos realizam em situações de cálculo de volumes quando uma das grandezas está em falta.

A explicação de Rui (CII) refere-se ao modo como este imaginou uma situação contextualizada que pudesse ser resolvida com recurso à expressão que lhe foi apresentada "75% de 20":

Rui: Professora, então eu pensei. Fui [e] entrei numa loja e vi coisas de 20€. Então não tinha dinheiro. Só tinha aquele dinheiro [20€]. Então estava em saldos 75 [%]. 75[%] em saldos. Então comecei a pensar 50%. 50% é 10. Então 50% de 50% equivale a 5. Então é 15 porque dividi [antes decompõe] o 75 [%] por duas partes, 25 mais 50 que equivale a 15.

À semelhança de António, Rui recorre a uma situação real para contextualizar a expressão 75% de 20. Na sua explicação, refere-se a "50% de 50%". Tendo em conta que uma percentagem não pode ser aplicada a outra, mas sim a uma quantidade, esta expressão de Rui pode ser uma tentativa de generalização do conhecimento que possui acerca do cálculo sucessivo de metades ou uma tentativa de formalização da linguagem natural "metade de metade". Para resolver a expressão, Rui decompõe 75% em 50%+25%, calcula metade de 20 e posteriormente metade desta metade.

Discussão

O objetivo deste artigo é perceber que componentes do sentido de número estão refletidas nas estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 6.º ano. Esta análise foi realizada tendo por base o quadro de referência de McIntosh et al. (1992) e o cruzamento entre componentes do sentido de número e estratégias de cálculo mental com números racionais associados a cada categoria. A análise das estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 6.º ano mostra que estes recorrem com frequência a relações numéricas de vários tipos (Carvalho, 2016), aspeto este diretamente relacionado com o facto de já possuírem um sentido de número assinalável (e.g., Berch, 2009; McIntosh et al., 1992; Reys, 1994), mobilizando factos numéricos conhecidos ou aprendizagens sobre números naturais. No que se refere ao conhecimento e destreza com números, a discussão de questões de cálculo mental com números racionais cria um ambiente de aprendizagem favorável à comparação de números (estratégia de Diogo), permite perceber se os alunos possuem noção de grandeza dos números, noção esta construída com base na relação entre múltiplas representações dos números racionais (estratégia de João) e entre estes e números naturais com referente a $\frac{10}{100}$ o que, de certo modo, facilita a realização de operações. De salientar que a conversão entre representações ganhou espaço e importância nas estratégias dos alunos ao longo da experiência de ensino. A presença de números de referência foi uma constante nas questões de cálculo mental apresentadas aos alunos, o que os parece ter apoiado em algumas decisões, como foi o caso de Pedro ao selecionar 5% como referência para o cálculo de 25%. O recurso a números de referência e a relação entre representações refletem sentido de número por parte dos alunos (Berch, 2009; Cruz & Spinillo, 2004; Reys, 1994).

O recurso a propriedades das operações como facilitador do cálculo não foi muito usado pelos alunos nesta experiência, embora existam evidências do seu uso. Pelo contrário, a relação entre operações foi percecionada diversas vezes nas estratégias dos alunos. Com frequência, a mobilização de propriedades das operações e de relações entre operações surge a par da mudança de representação, como nos mostram as estratégias de Maria (relação entre operações inversas) e Gonçalo (propriedade da divisão). O facto de os alunos não recorrerem muito às propriedades das operações, para tornar o cálculo mais eficiente e rápido, pode relacionar-se com o facto de usarem estas propriedades como regras formais sem perceber muito bem qual a sua utilidade ao efetuarem as operações (e.g., McIntosh et al., 1992).

No que se refere ao conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo, McIntosh et al. (1992) destacam a importância de os alunos compreenderem a relação entre o contexto e o cálculo a efetuar, de escolherem uma estratégia adequada e de reconhecerem a necessidade de verificação de resultados de forma reflexiva. A estratégia de Maria mostra-nos que esta compreendeu o contexto, optando pela operação que mais facilmente permitia usar o reportório de factos numéricos que possuía. A estratégia de António reflete todos os aspetos referidos por McIntosh et al. (1992), com uma particularidade: o aluno, perante uma expressão simbólica, usa um contexto seu conhecido para o ajudar a pensar sobre os números. Num contexto matemático com frações, o aluno recorre a um contexto não matemático com números naturais, resolve-o e finaliza, validando o seu raciocínio usando frações e a relação entre operações (divisão, multiplicação e adições sucessivas). Os contextos (essencialmente de dinheiro) que pudessem modelar expressões simbólicas foram usados com frequência pelos alunos do ciclo de experimentação II, relacionando-se certamente com as suas experiências de vida. À semelhança de António, Rui também associa à expressão simbólica apresentada um contexto seu conhecido e resolve-a recorrendo à decomposição de números e à relação entre 50% e 25% e ao cálculo de metade e de metade da metade, respetivamente.

Conclusão

Este estudo, indo ao encontro da perspetiva de Bourdenet (2007), mostra que o cálculo mental com números racionais desenvolve-se tendo por base conhecimentos sobre números naturais. Estando o cálculo mental intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número, na nossa perspetiva, este é um sinal de que este progride continuamente à medida que surgem aprendizagens associadas a novos conjuntos numéricos e para as quais conhecimentos prévios adquiridos são importantes. Com frequência, as estratégias dos alunos refletem que estes recorrem a números naturais para comparar e operar com numerais decimais ou frações (casos de Ivo e António) ou que usam factos numéricos adquiridos na aprendizagem dos números naturais (e.g., tabuada), como suporte à procura de relações e regularidades (caso de Maria).

Sem ter um paralelo com o que se passa nos números naturais, evidencia-se a mudança de representação como estratégia eficiente no cálculo mental com números racionais (e.g., Caney & Watson, 2003; Carvalho, 2016). Esta estratégia surge porque se potenciou o recurso a múltiplas representações dos números racionais na experiência de ensino, mostrando que a aprendizagem dos números e das operações, em especial em situações de cálculo mental, deve ser compreendida e mobilizada de modo relacional (e.g., Empson et al., 2010). O uso de múltiplas representações é um aspeto considerado importante por McIntosh et al. (1992) no componente do sentido de número que se refere ao conhecimento e destreza com números.

Este estudo reforça a importância de se desenvolver o cálculo mental dos alunos desde o 1.º ciclo do ensino básico com números naturais, pela importância que as estratégias desenvolvidas neste conjunto numérico têm para a aquisição de outras estratégias em conjuntos numéricos mais complexos. Também apresenta uma perspetiva de desenvolvimento de cálculo mental com números racionais e de sentido de número integrada na abordagem dos diferentes tópicos matemáticos ao logo do ano letivo, algo que não merece qualquer referência nos atuais documentos curriculares (MEC, 2013). O estudo mostra a importância de se continuar a desenvolver o cálculo mental dos alunos no 2.º ciclo do ensino básico através do recurso a questões que enfatizem o uso de números de referências e permita a relação entre múltiplas representações dos números e suas operações, devidamente discutidas e refletidas na sala de aula. Esta perspetiva permite apoiar a evolução das aprendizagens dos alunos e, consequentemente, o desenvolvimento do seu sentido de número.

O presente estudo coloca também algumas questões para investigação futura. A variedade de interpretações associadas ao sentido de número, a par das potencialidades do cálculo mental para o desenvolvimento de conhecimentos, com compreensão, acerca de números e operações e do sentido de número faz emergir a necessidade de se continuar a investigar estas relações, por exemplo, em estudos longitudinais.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da bolsa atribuída à primeira autora (SFRH/BD/69413/2010).

Referências

Berch, D. B. (2009). Making sense of number sense: Implications for children with Mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333-339.

Bourdenet, G. (2007). Le calcul mental. *Activités Mathématiques et Scientifiques*, *61*, 5-32.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Fraction operations and initial decimal ideas.* Companion module to Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades. http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp2.html

Cruz, S. M., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*, *12(*2), 3-29.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409–428). Heidelberg: Springer.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., & Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(1), 9-40.

Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 359–384.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96–102.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 & 44.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s =directorio&pid=17

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77–98.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 114-120.

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001). Developing number sense. *Mathematics Teaching*, *176*, 39-42.