Postures d'élèves dans l'expérience de la nécessité mathématique

Teresa Assude
IUFM de Versailles et DIDIREM (Université de Paris 7)

Dans cette article, nous présenterons une partie d'un projet de recherche intitulé — CESAME — qui a pour but de faire faire aux élèves l'expérience de la nécessité mathématique à travers un certain nombre de dispositifs où le rôle d'autrui et le temps sont essentiels. Nous avons choisi d'analyser un dispositif mis en œuvre dans une classe de seconde[1] à propos de l'étude des inéquations du point de vue des récits (narrations de recherche) produits par les élèves. Pour cela, nous présenterons d'abord quelques éléments théoriques qui nous permettent de mettre au point des outils d'analyse — les postures d'élèves — et, ensuite, nous donnerons quelques exemples de ces postures identifiées dans les productions des élèves.

Approche anthropologique et triple approche

Notre travail prend appui sur l'approche anthropologique de la didactique où l'activité mathématique de l'élève (et pas seulement) est considérée comme une activité humaine générique qui peut se spécifier du point de vue mathématique en ce qui concerne les types de problèmes, les objets étudiés, les outils ou les instruments utilisés. Cette approche anthropologique a été fondée en didactique des mathématiques par Yves Chevallard et nous renvoyons à ses travaux pour une présentation plus approfondie (Chevallard, 1992, 1997, 1999). Cependant nous donnerons ici quelques éléments de cette approche qui nous seront utiles pour la suite. Chevallard suppose que toute activité humaine (et aussi mathématique) peut être analysée par un quadruplet formé par les types de *tâches* (ce qu'on est supposé résoudre ou faire), par les *techniques* (les manières d'accomplir ces tâches), par les *technologies* (ce qui permet de rendre intelligibles les techniques, les justifications, les démonstrations, etc) et par les *théories* (les technologies des technologies). Ce quadruplet, appelé organisation praxéologique ou simplement *praxéologie*, est constitué de deux blocs: le bloc pratique des savoir-faire (tâches, techniques) et le bloc du savoir restreint (technologie, théorie). L'activité mathématique ou les pratiques mathématiques existant dans une institution scolaire peuvent être décrites en termes de praxéologies, soit des praxéologies mathématiques (ayant affaire aux objets mathématiques) soit des praxéologies didactiques (celles concernant l'organisation de l'étude). Précisons en outre que l'organisation praxéologique (mathématique ou didactique) se déroule dans une pluralité de registres ostensifs. Ainsi, la pratique mathématique peut se déployer dans les registres de l'oralité, de la trace scripturale (écrits, graphismes, dessins, etc.), de la gestualité et celui de la matérialité quelconque (voir Bosch et Chevallard, 1999).

Un autre cadre de référence théorique est celui de la *triple approche* (Sackur et alii, 1997) où l'activité du sujet qui étudie les mathématiques peut être analysée par rapport à trois espaces: l'espace psychologique, l'espace social et l'espace réel. L'espace psychologique concerne le rapport du sujet avec lui-même (rapport intra-cognitif), l'espace social concerne le rapport du sujet avec autrui, avec un groupe social (rapport inter-cognitif) et l'espace réel concerne le rapport du sujet à une réalité (matérielle ou conceptuelle). Ainsi l'activité du sujet peut être analysée du point de vue statique relatif à l'état des connaissances à un moment donné de son histoire par l'intermédiaire de la notion de *connaissance locale*, et cette activité peut être aussi analysée du point de vue dynamique temporel par l'intermédiaire de *trois orientations*. Ces orientations sont la *compréhension* par rapport à l'espace psychologique, la *conformité* par rapport à l'espace social et la *performance* par rapport à l'espace réel-mathématique. A un moment donné, la connaissance d'un sujet est locale: elle est vraie à l'intérieur de certaines limites (son domaine de validité) et elle est fausse en dehors de ces limites. Or cette connaissance locale peut être à l'origine de certaines erreurs des élèves car elle est *cohérente* dans l'espace psychologique, *valide* dans l'espace social et *efficace* dans l'espace réel. Par exemple, certains élèves font l'erreur suivante: le successeur de 2,4 est 2,5, et cette erreur peut être analysée comme la manifestation d'une connaissance locale: ils appliquent aux décimaux une connaissance valide, efficace et cohérente concernant les entiers naturels, et en appliquant cette connaissance hors de ses limites elle devient fausse.

Dans l'analyse des productions écrites d'un élève, nous allons nous intéresser aux *connaissances locales* dans leur relation directe avec les erreurs produites par les élèves, et à la dynamique de l'évolution de ces erreurs en fonction des *trois orientations* visées par l'activité.

Expérience de la nécessité mathématique: Problématique

Notre projet de recherche — CESAME — veut dire "Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées" a comme but de faire faire aux élèves l'expérience de la nécessité mathématique.[2]

Pour préciser ce que nous entendons par nécessité mathématique, examinons les deux énoncés:

(1) la "Serra da Estrela" a une hauteur de 1997m

(2) la solution dans $\mathbb{R}$ de $ax=b$ pour $a \neq 0$ est b/a.

Nous proposons de les distinguer de deux[3] points de vue:

- *point de vue temporel*: le premier est vrai ici et maintenant — l'altitude d'une montagne est susceptible de variations. Le deuxième, par contre, n'est pas susceptible de variations dans le temps.
- *point de vue structurel*: le premier énonce un fait, alors que le deuxième ("apodictique", Margolinas, 1992) se place à l'intérieur d'une théorie qui rend impossible le fait qu'il ne soit pas vrai. Il est "nécessaire" en ce sens qu'il est le résultat d'inférences valides à partir d'axiomes connus (Durand-Guerrier, 1996), suivant des règles connues et communes à tous les mathématiciens.

L'activité mathématique ne se réduit pas à la récitation des textes de référence et une des caractéristiques des pratiques mathématiques est qu'on prend en compte le caractère de nécessité épistémique des énoncés sur lesquels on travaille. Au niveau du développement historique des mathématiques, on peut citer Cavaillès (selon Sinaceur, 1994, p.32):

> Le développement des mathématiques est nécessaire, non en ce qu'il suit des lignes préétablies, prévisibles, ou obéit à un dessein, mais en ce qu'il se déploie par construction de relations entre des résultats que leur connexion rationnelle soustrait pour ainsi dire à la contingence. L'architecture (au sens de Bourbaki) élimine le contingent…

Cavaillès dit ainsi que la nécessité est interne aux mathématiques, libres et autonomes par rapport à la contingence. Elles fonctionnent selon des principes, tels que celui de *non-contradiction*, qui leur donnent cette liberté (et cette "autonomie") qui permet que n'importe qui puisse dire d'une propriété: "elle est nécessaire car il ne pourrait en être autrement".

Nous avons choisi comme hypothèse fondamentale de notre travail, en suivant Wittgenstein (voir Bouveresse, 1987), de considérer ce principe comme une *règle du jeu*, jeu au sens social d'une activité humaine qui amène les mathématiciens à se mettre d'accord sur les mêmes résultats.

Ainsi nous dirons que l'activité du mathématicien est déterminée à la fois par les problèmes et les objets qu'il manipule **et** par l'ensemble des *règles du jeu* acceptées par la communauté des mathématiciens (règles qui ne sont pas toujours explicitées).Ce sont ces règles du jeu, ces principes qui régissent l'activité mathématique qui permettent aux mathématiciens de se confronter à une réalité qui leur *résiste*, ou plutôt qu'il a décidé de voir comme résistante. De même que dans le monde physique, les objets, un mur, etc., résistent (une personne ne peut pas traverser un mur sans le casser si on suppose les lois physiques habituelles), dans le monde mathématique les objets, les relations, les structures, etc., résistent (une personne ne peut pas trouver deux solutions non équivalentes à un même problème si on suppose que l'activité mathématique est régie par le principe du tiers exclu). Cette analogie a toutefois ces limites: un théorème résiste mieux qu'une table par son caractère atemporel et nécessaire.

Cette idée de *résistance, à la fois découverte et décidée,* est importante: pour tout individu qui accepte de *jouer le jeu* (mathématique), $\sqrt{2}$ ne peut pas être le quotient de deux entiers. Le voudrait-il de toutes ses forces, qu'il n'y parviendrait pas: l'irrationalité de $\sqrt{2}$ *résiste* à la volonté du mathématicien, et cette résistance est intimement liée à la nature du "jeu" mathématique. De même, si en utilisant le logiciel Cabri on construit un parallélogramme en tenant compte des propriétés de l'objet, il est nécessairement vrai que les diagonales se coupent en leur milieu, et cette nécessité se "voit" précisément dans la mesure où cette propriété résiste au déplacement.

Comment se construit (pour le mathématicien expert ou apprenti) la nécessité épistémique d'un énoncé mathématique (relative aux "règles du jeu" mathématique) puisqu'elle n'est pas dans l'énoncé factuel? Est-ce à partir du contexte (pragmatique), de l'usage (cf. la notion de "grammaire" chez Wittgenstein), de l'expérience personnelle du sujet, de l'action performative (Austin, 1970) du maître qui a institutionnalisé cette nécessité? Cette question est d'autant plus ardue que la nécessité épistémique des énoncés est rarement, sinon jamais, explicitée en classe ou dans les manuels: on ne voit jamais apparaître l'adverbe "nécessairement" dans l'énoncés des théorèmes, et pourtant cette nécessité est à la racine, par exemple, du fait qu'il faut les démontrer. Nous pensons, au sein de CESAME, que l'expérience de la nécessité se fait dans l'interaction avec l'aspect résistant de la réalité mathématique, des objets et des relations mathématiques.

Une autre hypothèse forte de notre travail (mot "autrui") est le rôle d'autrui dans cette expérience. D'une part autrui (en classe ou en groupe) est un lieu de construction collective de la rationalité mathématique et la confrontation à autrui est une des composantes du mouvement qui permet l'objectivation des connaissances. Husserl dit (Dastur 1995, p.99) "Il n'y a en effet d'objet véritable que s'il existe pour plus d'un moi, que s'il est le point de convergence d'intentionnalités de consciences différentes: c'est l'intersubjectivité qui fonde en dernier ressort l'objectivité." D'autre part, la confrontation à autrui pour dépasser une contradiction peut faire changer un élève d'orientation, par exemple passer de la conformité à la performance, son action étant alors guidé par le but de trouver le *bon* résultat. Ce serait, dans ce processus, que le sujet rencontrerait la résistance de la réalité mathématique et ferait alors l'expérience de la nécessité mathématique.

Faire l'expérience de la nécessité: Deux expérimentations

Notre hypothèse de travail est que la prise de conscience du caractère nécessaire des énoncés mathématiques peut avoir lieu grâce à la confrontation avec autrui et avec la résistance des objets mathématiques. Nous cherchons donc à mettre les élèves en situation de produire des réponses différentes à un problème. Les travaux antérieurs sur la triple approche (GECO, 1997) nous permettent d'utiliser des connaissances locales stables qui conduisent à des erreurs facilement identifiables:

- en seconde: si $a>b$ alors $ax>bx$,
- en DEUG[4]: $ax+by=c$ est l'équation d'une droite dans l'espace, comme dans le plan.

La première année, nous avons conçu le travail, en seconde, comme une expérience destinée à valider un cadre théorique; cette expérience ayant produit des effets, nous avons repris le même dispositif en DEUG et, de notre point de vue, il s'agit davantage de la mise en œuvre d'un "dispositif didactique" que d'une nouvelle expérience. Nous ne rentrons pas dans le détail[5] mais nous présentons très rapidement le dispositif qui reprend, dans ses différentes phases le schéma suivant:

autrui
↓
activer la connaissance locale → erreur → confrontation et conflit → réorganisation des connaissances
↑ ↑
résistance de la réalité →

En ce qui concerne la classe de seconde, l'expérience s'est déroulée dans une classe de bon niveau, au deuxième trimestre. Les élèves connaissaient les représentations graphiques des fonctions de référence, avaient une bonne habitude des résolutions graphiques d'équations et d'inéquations. Les inéquations-produit avaient été étudiées et résolues par l'utilisation d'un tableau de signe, mais aucune inéquation-quotient n'avait été résolue algébriquement. Néanmoins à l'occasion de l'étude des fonctions affines et de la fonction inverse la règle sur la multiplication par un négatif dans une inégalité avait été rappelée. Le professeur de la classe était assisté de deux observateurs, qui ont joué un rôle actif auprès des groupes pour les aider à verbaliser et à expliciter leur démarche.

Le tableau ci - dessous présente le calendrier de l'expérience.

Dates	Groupe concerné	Travail proposé
17 mars 1998	Groupe 1 1h 30	30 mn de travail personnel et narration individuelle, 1 heure de confrontation et narration en groupes.
24 mars 1998	Groupe 2 1h 30	idem
1er avril 1998	Classe entière 1h	Synthèse (voir consigne)
30 avril 1998	Classe entière 1h	Questionnaire

Le tableau ci-dessous reproduit la feuille de consigne distribuée aux deux groupes (le 17 avril et le 24 avril)[6]:

Résoudre l' inéquation : A : $3/x > x + 2$ Toutes les méthodes de recherche et de résolution sont autorisées. Écrivez les différentes étapes de votre recherche. Donnez un résultat dont vous êtes le plus sûr possible. Expliquez ce qui vous a servi pour être sûr. Pensez à la façon dont vous pouvez convaincre quelqu'un que votre résultat est exact

La séance de synthèse en classe entière s'est déroulée en deux parties. Chaque groupe est venu faire un compte rendu de son travail et des résultats auxquels il était parvenu; certains groupes n'avaient pas réussi à trouver l'origine de l'erreur dans le travail algébrique. Ensuite le professeur a institutionnalisé les connaissances mises à jour à travers ce travail.

1. Connaissances de premier ordre (les savoirs)

- multiplier les deux membres d'une inéquation par x nous oblige à regarder le signe de x,
- rappel de la méthode algébrique après factorisation (signe du binôme, tableau, lecture du tableau). Cette connaissance était acquise pour tous,
- méthode graphique (choix des fonctions, dessin, lecture des informations sur le graphique).

2. Connaissances de deuxième ordre(les règles du jeu)

- une inéquation se résout graphiquement ou algébriquement mais on doit trouver le même résultat au même problème de mathématiques résolu par deux méthodes différentes. On verra dans Sackur et Maurel (1999/2000) que dans les réponses aux questionnaires plusieurs élèves ont retenu cette connaissance;

• on peut utiliser des valeurs numériques pour vérifier un résultat; ce n'est pas une démonstration. On institutionnalise ainsi la notion de contre-exemple,

• nécessité: un problème a la même solution quelle que soit la méthode de résolution choisie, donc le résultat est nécessaire,

• notion de problèmes équivalents: si après confrontation, on ne trouve pas pareil, et s'il n'y a pas d'erreur, les deux problèmes mathématiques qu'on cherche à résoudre ne sont pas équivalents.

Comme nous l'avons déjà dit, l'objectif de ce travail est de mettre à défaut la connaissance locale par l'intermédiaire d'un changement de cadres et par le travail en groupe. Le changement de cadres – algébrique et graphique – peut permettre aux élèves d'utiliser au moins deux techniques différentes pour résoudre le problème. La confrontation des résultats obtenus par ces deux méthodes – deux résultats différents s'ils utilisent la connaissance locale – aboutit à une contradiction, contradiction qui peut devenir un levier pour changer la connaissance locale. Le travail en groupe est aussi un moyen pour la confrontation des techniques et pour arriver à la contradiction souhaitée. Ceci dit, le fait d'aboutir à des résultats différents ne garantit pas que l'élève se pose la question de ce qui fait problème: il peut très bien se contenter d'une seule technique, en fait la technique graphique, qui est celle sur laquelle il est le plus sûr de donner le résultat exact.

L'analyse a priori de cette situation en termes des trois orientations est donnée par Sackur et Maurel (1999/2000): les élèves qui travaillent en conformité (par rapport à l'espace social) peuvent mettre en œuvre la connaissance locale et ils l'appliquent hors de son domaine de validité. La confrontation avec les résultats des autres est un moyen de la confronter à la réalité mathématique (espace réel) car un même problème, résolu par des techniques différentes, doit aboutir au même résultat (ou à des résultats équivalents). Les élèves peuvent alors travailler en performance (espace réel) pour mettre en accord leur solution avec la réalité du problème. Certains élèves peuvent aussi travailler en compréhension (espace psychologique) mais ceci est plus difficile à observer à partir des narrations de recherche: nous pensons là surtout aux élèves qui ne se satisfont pas seulement d'arriver à des solutions équivalentes mais essaient de comprendre le pourquoi des erreurs.

Nous allons analyser certains effets de ce dispositif à partir de l'analyse des narrations de recherche[7] — individuelles et collectives – qui ont comme fonctions essentielles la prise de distance par rapport à l'action, l'objectivation des démarches individuelles et la concertation collective ainsi que la communication des étapes de tâtonnement et de recherche..

Narrations de recherche: Outils d'analyse

Pour analyser les travaux des élèves, nous utiliserons une grille construite à partir des éléments théoriques que nous avons présentés. Ces éléments vont nous permettre d'identifier un certain nombre de *postures* d'élèves (ou de groupes d'élèves) qui sont les différentes manières dont les élèves ou les groupes viennent occuper l'espace (le topos au sens de Chevallard) prévu pour l'élève par l'enseignante lorsqu'elle a proposé cette situation. L'espace (le topos) prévu pour l'élève a été ouvert par le type de tâches: résoudre une inéquation-quotient et ces postures vont être déterminées par les éléments suivants:

1 – les praxéologies, dans notre cas les techniques qui permettent d'accomplir la tâche "résoudre l'inéquation" ainsi que les technologies (les justifications des techniques). Il y a trois techniques prévues: algébrique, graphique et algébrico-graphique (mélange des deux). Les justifications prévues ne sont pas forcément des technologies mais des vérifications avec des valeurs numériques ou l'utilisation du graphique pour voir les solutions;

2 – la connaissance locale "multiplier une inéquation par x sans se soucier du signe de x". Est-elle mise en œuvre? De quelle manière?

3 – les trois orientations: l'action des élèves ou du groupe est-elle orientée par la compréhension, par la conformité ou par la performance? Y a-t-il confrontation avec la contradiction? Evitement de la contradiction? Quel rapport à la résistance de la réalité mathématique?

4 – les formulations écrites: des textes ou d'autres écrits? Ces écrits, sont-ils des descriptions d'actions ou des présentation des solutions? Quelles marques énonciatives (personnes, temps, lieux)? Quels registres sont utilisés (langage naturel, symbolique)? Quels ostensifs ont été utilisés?

Ces différents éléments vont nous permettre d'analyser les narrations de recherche et d'identifier les différentes postures existant dans l'espace ouvert par le type de tâches.

Postures des élèves ou des groupes

Nous allons déterminer un certain nombre de postures à partir d'abord du nombre de techniques utilisées pour résoudre le type de tâches:

— les *postures à une technique*: algébrique, graphique ou algébrico-graphique (mélange des deux);

— les *postures à deux techniques*: deux techniques graphiques différentes, deux techniques algébriques différentes, une graphique et une algébrique;

— les *postures à trois techniques*.

Pour chaque type, nous pouvons préciser la posture en regardant la présence ou non d'erreurs ou de connaissances locales: par exemple, une posture à deux techniques peut être précisée en montrant que la technique graphique aboutit à un résultat vrai et la technique algébrique aboutit à un résultat faux dû à la présence de la connaissance locale "multiplier les deux membres d'une inéquation par x sans tenir compte du signe de x". En suite, nous préciserons encore la posture en identifiant l'orientation de travail de l'élève: est-il en conformité, ou en performance, ou en compréhension? Par exemple, une posture pourrait être celle d'un élève qui utilise deux techniques qui aboutissent à des résultats différents par la mise en place de la connaissance locale et à partir de là il essaie de dépasser la contradiction en travaillant en performance (confrontation avec la réalité mathématique) ou en compréhension (il essaie de comprendre le pourquoi des erreurs). Enfin, nous pouvons encore préciser les postures en mettant en évidence certains éléments liés à la matérialité de l'écrit et au contexte pragmatique de la situation.

Voyons quelques-unes de ces postures qui ne sont pas exhaustives.

Posture α. Une seule technique est mise en œuvre: la technique graphique, avec laquelle on trouve la solution. Vérification avec quelques valeurs numériques. L'absence de technique algébrique peut être constatée explicitement par les élèves: ils ne savent pas comment faire. Travail en conformité par rapport à la technique utilisée. La connaissance locale n'est pas mobilisée, il n'y a pas de confrontation avec la contradiction.

Posture ϕ. Une seule technique est utilisée: la technique algébrique. On peut aboutir à un résultat vrai ou faux, ou alors s'arrêter à l'une des étapes de la résolution. Pas de mise en évidence de la connaissance locale et de confrontation avec la contradiction.

Posture β. Deux techniques sont utilisées: la graphique qui donne la solution exacte et l'algébrique qui donne un résultat faux. Choix de la technique graphique. Présence de la connaissance locale. Evitement de la contradiction. On est dans la conformité: à un problème, une technique et une solution. Effacement de la résistance des objets mathématiques. Vérification avec quelques valeurs numériques.

Posture δ. Deux techniques sont utilisées: la graphique qui donne la solution exacte et l'algébrique qui donne un résultat faux. Présence de la connaissance locale. On se confronte à la contradiction et à la résistance des objets mathématiques. Travail en performance et ensuite en compréhension: on essaie de comprendre le pourquoi des erreurs.

Posture χ. Deux techniques sont utilisées: l'algébrique et la graphique. Les deux techniques permettent d'obtenir la solution. Dépassement de la connaissance locale.

Posture ε. Trois techniques sont utilisées: la graphique qui donne la solution, l'algébrique qui donne un résultat (faux ou vrai) et la technique algébrico-graphique qui donne aussi un résultat (faux ou vrai). Présence de la connaissance locale dans les deux techniques. Evitement ou dépassement de la contradiction: soit on abandonne le problème soit on se questionne sur la résistance de la réalité mathématique: elle résiste mais on ne sait pas pourquoi.

Comme nous l'avons déjà dit, nous pouvons penser à d'autres postures possibles, par exemple en combinant les différents éléments présents. Nous ne ferons pas un répertoire de toutes les postures possibles mais ce qui nous intéresse est de savoir comment les élèves viennent occuper l'espace que leur est attribué. Voyons maintenant quelques exemples concrets de ces postures, exemples où nous mettrons en évidence quelques éléments du point 4 de notre grille.

Exemples de narrations

Nous donnerons ici quelques exemples de narrations collectives en les mettant parfois en relation avec des narrations individuelles.

Groupe d'Olivier

Le groupe d'Olivier vient occuper le topos de la tâche dans la posture α. Ils écrivent dans leur narration collective:

> Nous avons tous les cinq trouvé la même méthode: résoudre les inéquations graphiquement. Pour la première inéquation: A: $3/x > x+2$, nous avons utilisé la même méthode et avons trouvé le même résultat. (voir feuille Olivier) (…) Pour vérifier, on remplace x par plusieurs valeurs. Nous sommes sûrs de nos deux résultats.

Comme cette narration renvoie à la narration individuelle d'Olivier, voyons celle-ci:

> Au départ j'ai essayé de résoudre ces inéquations algébriquement, mais après je me suis souvenu qu'on pouvait le faire graphiquement (avec la calculatrice), j'ai donc opté pour cette deuxième méthode.

Il transcrit sur la feuille l'ostensif "graphique" vu sur l'écran de la calculatrice, et ensuite il précise sa technique:

> Je lis donc sur le graphique, pour quelles valeurs de *x*, la parabole *x* se trouve-t-elle au-dessus de la droite. Ici, il faut que $x \in]-\infty;-3[\cup]0;1[$

Comme nous l'avons dit, dans cette posture les élèves veulent trouver une seule technique qui donne la solution, et cela leur suffit. La référence à la technique algébrique est ici symptomatique: on sait qu'elle existe mais on ne s'en occupe pas. Cette position apparaît comme majoritaire dans le groupe, Olivier, par exemple, écrit lors du questionnaire

> Je n'ai pas appris grand chose sur la résolution algébrique de ces inéquations car nous avons utilisés la méthode graphique,

ce qui est corroboré par un autre élève qui écrit

> Personnellement je n'ai rien appris de particulier sur ces résolutions [algébrique], sauf qu'il faut ramener l'expression sous forme de tableau de signes et de variations…

Or ce n'est pas le vécu de tous les élèves dans le groupe car Lionel écrit:

> Pendant la première séance, réfléchissant sur la méthode algébrique pendant tous le temps que l'ont me demandes, je n'avais absolument rien trouvé pensant qu'il n'y avait que cette méthode. Mais quand l'on m'a dit la solution j'ai tout de suite compris car les autres personnes qui étaient avec moi avait utilisé la méthode graphique;

même si, après ces essais infructueux, Lionel se rallie à la majorité du groupe. De là découle la non présence de la connaissance locale et la non confrontation à la contradiction et à la résistance de la réalité mathématique. Remarquons que la technique graphique utilise la calculatrice et la lecture sur l'écran, et que la vérification est faite en prenant quelques valeurs. La narration collective évoque cette possibilité et Kevin y recourt dans sa narration individuelle:

> Afin d'être sûr de mon résultat, j'ai remplacé *x* par 3 nombres différents tels que x=-12 et x=5 et x=-2,

il fait les calculs et il écrit:

> Je suis sûr de ce résultat pour la 1ere inéquation.

Dans la narration collective, le type d'écrit est essentiellement informatif, tandis que les narrations d'Olivier et de Kevin sont essentiellement des descriptions d'actions en première personne (utilisation du "je"), la validation des assertions avancées étant simplement affirmée.

Voyons encore un autre groupe qui vient occuper cette même posture.

Le groupe de Julien

Ce groupe vient occuper l'espace de la tâche dans la posture ϕ. Ils résolvent l'inéquation par une seule technique –la graphique— et le consensus des élèves sur le résultat obtenu (correct) ne leur a pas permis de rencontrer la contradiction. Voyons la narration collective:

> Nous nous sommes tous concertés et nous sommes tous d'accord, avec les résultats. Nous avons continué sur l'idée de Mathieu et de Julien car nous étions d'accord avec leur manière résoudre les inéquations, c'est pour cela que la première partie de la réponse se trouve sur la feuille à deux de Mathieu et Julien.

Le travail du groupe ici consiste à prendre tel quel, en ce qui concerne la première inéquation, le travail de deux élèves dont la narration est la suivante:

> Résolution de la première inéquation
> $3/x > x+2$
> — Utilisation de la résolution graphique
> 1ère étape: Je trace mes deux courbes d'équations $x \to 3/x$ et $x \to x+2$ (voir feuille de dessin)
> $3/x > x+2$
> 2ème étape: Je regarde sur le graphique les valeurs de x pour les $3/x > x+2$
> Je trouve alors comme valeurs: $x \in]-\infty;-3[\cup]0;1[$ pour que $3/x > x+2$
> 3ème étape: vérification par le calcul
> Je prend les valeurs de x compris entre $]-\infty;-3[\cup]0;1[$
> ex: $x = -4$
> $3/x \to 3/-4 = -0,75$ $\qquad$ $x+2 \to -4+2 = -2$
> On s'aperçoit que $3/x > x+2$
> Je pense que mon résultat est correct car lorsque je vérifie, je m'aperçois que les exemples vérifient mon résultat.

Ces deux élèves ont travaillé en conformité en ce qui concerne la résolution graphique et la solution étant obtenue cela leur suffit de vérifier avec quelques valeurs de x. Cette position est alors adoptée par tout le groupe qui l'accepte: il faut dire qu'un certain nombre d'élèves de ce groupe n'avait pas résolu l'inéquation même du point de vue graphique. Ainsi pour eux se rallier à ceux qui avaient une solution était déjà quelque chose. Le travail du groupe a alors consisté à utiliser cette méthode (avec les trois étapes) pour résoudre la deuxième inéquation (inéquation que nous n'avons pas analysée ici). A la fin de la narration collective, ils écrivent:

> Nous sommes sûrs de nos résultats. Mais nous ne savons pas très bien comment résoudre ceci algébriquement.

Cette posture ne permet pas aux élèves de se confronter à la résistance de la réalité mathématique et la narration collective montre que les élèves qui n'avaient pas réussi à trouver une solution pendant la phase individuelle (3 élèves sur 5) se sont vite ralliés aux deux autres qui avaient trouvé par la technique graphique: le "je" est encore présent dans cette narration collective car le "je" est en train de se forger au moins une technique pour la résolution des inéquations.

Groupe de Xavier

Ce groupe occupe l'espace en prenant la posture δ. Voyons ce qu'ils écrivent dans leur narration collective:

> On vérifie algébriquement, le résultat trouvé graphiquement, car nous sommes tous d'accord sur la méthode graphique.
>
> A: $3/x > x+2$
>
> $(x + 2)x < 3$
>
> $x^2 + 2x - 3 < 0$
>
> $(x+1)^2 - 4 < 0$
>
> $(x+1-2)(x+1+2) < 0$
>
> $(x-1)(x+3) < 0$

x	-∞		-3		1		+∞
x-1		-		-	0	+	
x+3		-	0	+		+	
P		+		-		+	

> Le résultat ne correspond pas à celui trouvé graphiquement. On est sûr du résultat graphique car on a vérifié avec différents valeurs de *x*.
>
> L'erreur vient du fait que si *x* est négatif, le signe de l'inéquation change de sens. Donc, il faut faire 2 inéquations et 2 tableaux de signes.

Les élèves résolvent alors l'inéquation en faisant la distinction des cas et ils arrivent au bon résultat. Ils écrivent alors: "On est tout à fait sûr du résultat. C'est le même que par la méthode graphique".

Ces élèves rentrent bien dans la situation proposée par l'enseignante car ils arrivent à dépasser la connaissance locale par la confrontation entre les résultats différents obtenus dans deux cadres différents. Ils marquent ici où il y a l'erreur et ils vont plus loin dans leur compréhension en dépassant ainsi la connaissance locale. Nous sommes en présence d'une description d'actions qui est paradigmatique: on montre comment on a fait une erreur et on montre l'explication de cette erreur et ce qu'il faut faire pour ne pas la refaire.

Cette narration utilise les registres de la langue naturelle, du symbolisme et le registre graphique pour mettre bien en évidence le travail qui a été fait dans le groupe. L'utilisation du "nous" et du "on" peut être un indice d'une certaine dépersonnalisation de chacun mettant en évidence le rôle du groupe dans le travail: "nous sommes tous d'accord…", "on est sûr…". Ce travail dans le groupe est visible si on compare cette narration collective aux narrations individuelles. Par exemple, Pierre-Alain, dans sa narration individuelle, écrit:

> J'ai tout d'abord tracer l'hyperbole d'équation $3/x$ et la droite ayant pour équation x+2.
> J'ai regardé ensuite sur mon graphique quelle est la partie de l'hyperbole qui se trouve au-dessus de la droite. Je m'aperçois que les x sont compris $x \in$]0;1[$\cup$]-∞;-3[.
> J'essaie de trouver une autre méthode mais cette fois algébriquement. J'abandonne cette méthode parce qu'elle ne me plait pas, je n'obtiendrai sûrement pas 1 intervalle, je ne suis pas très à l'aise avec les inéquations (de ce type).
> Je retourne à ma première méthode en vérifiant…

Cette narration individuelle montre que la présence des deux techniques est déjà dans le travail individuel ne serait-ce que d'un point de vue négatif, et que c'est le travail dans le groupe qui a permis aux élèves à la fois de se mettre à résoudre algébriquement l'inéquation et de corriger l'erreur pour que la solution algébrique devienne correcte. On voit aussi ce consensus sur le résultat obtenu graphiquement (attesté aussi dans d'autres narrations individuelles) ce qui leur a permis alors d'avoir un contrôle sur la technique algébrique. Le passage du "je" dans la narration individuelle au "on" et "nous" de la narration collective montre aussi la dimension collective du travail.

Le groupe de Renan

Ce groupe vient occuper la posture ε. Dans leur narration collective, ils écrivent comment ils ont travaillé:

> D'abord, on a comparé les résultats. Renan et moi, nous avons fait la même démarche

(voir feuille) et nous avons les mêmes résultats]-∞;-3[∪]0;1[. Par contre Mélanie avez 2 autres solutions (voir feuille) et ne trouve pas le même résultat.
Idée: Il faut donc essayer de comprendre pourquoi: dans la 2ème solution de Mélanie, on a essayé d'inverser le signe de l'inéquation car on ne connaît pas le signe de x (lorsqu'on divise par un nombre négatif). Mais ça n'a pas marché on ne trouve pas le même résultat que Renan et moi.
Problème: On avait une autre idée (sol. de Mélanie) faire une parabole. Idée rejettée parce qu'on obtient pas le résultat dont on est presque sûr.
Solution: — Grâce à la lecture graphique, on voit que quand x est compris entre]-∞;-3[∪]0;1[$3/x > x+2$ (voir feuille de Renan).
— Grâce à l'autre qui consistait à obtenir une parabole [méthode algébrique par laquelle ils obtenaient la parabole $-x^2-2x+3$], nous avons obtenu le même résultat après de multiples péripéties.
Démonstration
si $x > 0$ $3 - x^2 - 2x > 0$
si $x < 0$ $3 - x^2 - 2x < 0$
Nous avons obtenu en nous aidant du graphique le même résultat]-∞;-3[∪]0;1[.

Dans cette narration collective (et par les renvois aux narrations individuelles), il y a trois techniques parmi lesquelles la technique algébrico-graphique (on résoud d'abord algébriquement pour obtenir une parabole, et ensuite on utilise le graphique pour conclure). Le contrôle est effectué par le fait qu'ils sont "presque sûrs" du résultat graphique (utilisé par deux des élèves) et qu'ils veulent comprendre pourquoi la technique algébrique utilisée par l'autre élève (Mélanie) ne marche pas. Le travail du groupe confronté à la contradiction a été de comprendre le pourquoi des erreurs et de dépasser la contradiction. On voit que ce travail a été fait en groupe puisque Renan écrit dans sa narration individuelle (après avoir résolu le problème graphiquement):

J'ai d'abord cherché de trouver la solution avec une méthode de calcul en factorisant ou même en développant mais sans résultat. Puis j'ai essayé avec un graphique mais qui ne prouve rien (…) j'ai vérifié en remplaçant x dans l'inéquation.

Cette idée "pour prouver il faut une méthode algébrique" et que "la méthode graphique ne prouve rien" va être le fil directeur du travail en performance du groupe en reprenant la technique utilisée par Mélanie. La mise en évidence de la connaissance locale leur a permis de trouver une autre technique – l'algébrico-graphique — qui est alors un pas intermédiaire entre la solution graphique et la solution algébrique. Renan, lui, va refaire tout le travail à la maison en écrivant une autre narration individuelle qui suit les étapes suivantes:

— *j'ai commencé par faire un graphique en traçant l'hyperbole d'équation y=3/x et la droite d'équation y = x+2* ;
— il trace le graphique;
— il conclut: *d'après la lecture graphique, j'obtiens comme solution S =]-∞;-3[∪]0;1[*
— il vérifie: *pour être sûr de ce résultat, je vais voir, en prenant quelques exemples, si les x ∈]-∞;-3[∪]0;1[vérifient l'équation (sic) 3/x > x + 2*;
— il donne des exemples;
— il utilise la technique algébrique: *pour prouver que mon résultat est exact, j'utilise une méthode algébrique en factorisant l'équation et en étudiant les signes*;
— il utilise le registre graphique et celui du tableau de signes pour mettre en œuvre cette technique;
— il conclut: *je retrouve bien S =]-∞;-3[∪]0;1[* .

En travaillant en compréhension, cet élève peut mettre "au propre" sa propre narration de recherche en mettant en évidence le type de technique pour accomplir ce type de tâche et le statut des deux techniques.

Dans le travail de ce groupe, nous observons l'utilisation du "on" et du "nous" lorsqu'on rend compte du travail collectif où la confrontation avec autrui et les productions d'autrui a permis le dépassement de la contradiction, et l'utilisation du "je" dans les narrations individuelles, même dans la deuxième narration de Renan.

Le travail de réécriture de cet élève nous amène à poser une question: comment passer des narrations de recherche (individuelles ou collectives) à des textes mathématiques?, question importante qui ne sera pas traitée dans cet article. Par contre, nous nous sommes intéressés plus tard aux souvenirs des élèves.

Souvenirs d'élèves

C'est pour vérifier ce qui reste plus tard que nous avons proposé aux élèves un questionnaire quelque temps après et que nous recueillons, depuis un certain temps, des souvenirs mathématiques d'élèves[8]. Ainsi, dans cette expérience, les réponses aux questionnaires permettent de dégager plusieurs types de souvenirs:

a) des souvenirs liés à la présence de deux méthodes de travail et aux différentes fonctions attribuées à ces méthodes: par exemple, Jessica écrit:

> Après de nombreuses séances, j'ai compris qu'il ne fallait pas se limiter à une seule méthode mais plusieurs, soit pour se faire une idée de la résolution, soit pour la confirmer. Je pense l'avoir ensuite appliquer.

Magali écrit:

> J'ai surtout appris que la résolution algébrique est une bonne méthode mais que l'on peut toujours faire une erreur de calcul donc il vaut mieux vérifier par la méthode graphique;

b) des souvenirs qui montrent le dépassement de la connaissance locale. Lionel écrit:

Il fallait d'abord calculer des valeurs positives pour x, ensuite calculer des valeurs négatives. En rassemblant toutes ces valeurs en cours, on a pu trouver la solution.

Ou Xavier qui écrit:

Il faut faire attention aux changements de sens de l'inéquation avec les multiplications (suivant le signe)

Ou encore Julie qui dit:

Beaucoup de mes camarades avaient fait un tableau de signe pour la première équation mais leur tableau était faux car il ne répondait pas complètement à la question. Il fallait en faire 2 pour envisager toutes les possibilités de réponse ce que je n'avais pas songé à faire;

c) des souvenirs liés au rôle d'autrui dans le dépassement des connaissances locales. Jessica écrit:

J'ai appris à ne pas me borner à ma solution et aller voir chez les autres pour comparer et en parler (calmement) tout en essayant de comprendre mes erreurs et quelles sont mes difficultés.

Magali écrit:

j'ai appris à travailler en groupe et à trouver l'erreur dans un calcul;

d) des souvenirs liés au processus et au moment du déclic. Par exemple, Julien écrit:

Le moment le plus important a été quand nous avons réussi, mes camarades et moi, à trouver la solution, déjà trouvé graphiquement, algébriquement en séparant les tableaux de variation pour $x < 0$ et $x > 0$. Nous cherchions depuis très longtemps quand Mme nous demande si l'on avait procédé de la manière précédente. Ça a été le déclic, l'illumination;

e) des souvenirs liés à des connaissances mobilisables ailleurs que les inéquations. Jacques écrit:

Quand je fais un exercice où l'on peut se servir de méthodes différentes, j'essaie d'en faire au moins deux pour voir si cela correspond.

Ce souvenir montre aussi que la connaissance d'ordre deux

un problème résolu par des méthodes différentes a toujours la même solution ou des solutions équivalentes;

f) des souvenirs liés aux fonctions des narrations de recherche. Un élève qui n'a pas signé sa feuille écrit:

> La narration de recherche pour essayer de résoudre des exos et raconter je trouve que ça donne des idées auxquelles je n'avais peut-être pas pensé;

g) des souvenirs liés à la résistance de la réalité mathématique. Daniel écrit:

> Le moment le plus important pour moi c'est quand il a fallut faire la feuille de synthèse à 5. Car c'était le résultat final, il fallait qu'il soit parfait…

Il écrit encore:

> J'ai appris qu'il ne <u>faut jamais accepté les résultats des autres sans les vérifier et en être encore plus sûr que la sienne</u>.

Lisa écrit très justement que

> Ces séances permettent d'exposer ses idées, son opinion et de ne pas suivre ce qu'ont fait les autres. Maintenant je laisserais tomber mon idée seulement si je suis sûre qu'elle est fausse.

h) des souvenirs liés au travail d'institutionnalisation du professeur. Emmanuel écrit:

> Le moment le plus important pendant ces séances a été la correction. C'est là que j'ai bien compris comment on résout algébriquement ces inéquations.

Nous pouvons conclure, à travers ces souvenirs, que certains élèves ont pu faire une expérience de travail mathématique qui les a amenés à dépasser la connaissance locale à travers la possibilité de se confronter à la résistance mathématique et à autrui, dans le travail en groupe. Toutefois nous pouvons aussi affirmer que ce dispositif n'a pas eu les effets escomptés pour tous les élèves puisque certains d'entre eux affirment qu'ils n'ont rien appris sur la résolution algébrique tout en apprenant des choses sur la résolution graphique.

Conclusion

Notre projet de recherche intitulé CESAME vise à mettre en œuvre des dispositifs d'étude en classe qui permettent aux élèves de faire l'expérience de la nécessité mathématique. Cela ne veut pas dire que tous les élèves fassent cette expérience ou la vivent en tant que telle comme nous le montrent les souvenirs des élèves.

Cependant, il nous semble que ce type de travail est pertinent à plusieurs titres:

— le dispositif prend comme point d'appui l'existence de connaissances locales (ici le fait de multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre sans tenir compte du signe du nombre) et le travail nécessaire pour les dépasser;

— le fait de se confronter – par l'utilisation de plusieurs cadres (algébrique et graphique) – à la résistance de la "réalité mathématique" (plusieurs méthodes pour la résolution d'une même inéquation doivent aboutir à des solutions équivalentes et si ce n'est pas le cas alors l'une des solutions est fausse) peut amener les élèves à dépasser leurs connaissances locales;

— le dialogue avec autrui apparaît comme une étape importante soit par adhésion soit par opposition pour faire évoluer les connaissances locales;

— faire l'expérience de la nécessité mathématique permet à certains élèves de prendre mieux conscience des règles du jeu mathématique.

La mise en œuvre de ce type de dispositif dans la classe montre qu'il est possible de créer des conditions pour que les élèves puissent travailler à partir de leurs erreurs et que ce travail n'est pas uniforme et semblable pour tous. Ainsi nous avons identifié plusieurs postures d'élèves ou de groupes d'élèves c'est-à-dire différentes manières d'occuper l'espace que leur est ouvert par le type de tâche. Ces postures sont des outils d'analyse des productions écrites des élèves mais elles pourraient être aussi des outils didactiques pour le professeur, par exemple, pour situer le travail de chaque élève par rapport à ces postures.

Notre travail de recherche se poursuit, d'une part, en approfondissant théoriquement nos outils notamment les notions de souvenir, temps et récit, d'autre part en mettant en œuvre des dispositifs du même type que celui-ci pour analyser leur robustesse ainsi que d'autres dispositifs visant le même but: faire faire aux élèves l'expérience de la nécessité mathématique.

Notes

[1] Elève de 15 ans environ (10°ano de escolaridade)

[2] Le développement qui suit a déjà été présenté dans les publications suivantes: Assude et alii 1999, Sackur et Maurel 2000, Maurel 2000, Assude et Drouhard 2000.

[3] on peut en envisager bien d'autres mais nous ne les examinerons pas ici.

[4] DEUG: les deux premières années de l'université.

[5] Voir les articles cités ci-dessus.

[6] La consigne concernait aussi la résolution d'une deuxième inéquation mais nous n'analyserons que l'inéquation désignée par A.

[7] Sur les narrations de recherche, voir les travaux de Bonafé et alii (1993) et Bonafé et Combes (1998)

[8] Voir Assude, Maurel et Sackur 1999.

Références

Ancillotti, J-P., Assude, T., Drouhard, J-Ph., Maurel, M., Paquelier, Y. et Sackur, C. (1997). Présentation des travaux du groupe CESAME, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 70-75.

Assude, T., Sackur, C. et Maurel, M. (1999). Cesame: The Personal History of Learning Mathematics in the Classroom. An Analysis of Some Students' Narrative. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, *11*, Paul Ernest (Ed.).

Assude, T., Drouhard, J-Ph., Maurel, M., Paquelier, Y. et Sackur, C. (1999). Expérience de la nécessité et fonctions didactiques du récit, *Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 72-79.

Assude, T., Lattuati, M. et Leorat, N. (2000). Pratiques d'écriture au quotidien dans une classe de mathématiques. *Petit x*, *54*, 5-28.

Austin, J.-L. (1970). *Quand dire, c'est faire*. Paris: Le Seuil.

Bautier, E. (1995). *Pratiques langagières, pratiques sociales*. Paris: L'Harmattan.

Bautier, E. et Bucheton, D. (1995). L'écriture: Qu'est-ce qui s'enseigne, qu'est-ce qui s'apprend, qu'est-ce qui est déjà là? *Le Français Aujourd'hui*, *111*, 26-35.

Bonafé, F., Brunet, R. et Pelouzet, B. (1993). La narration de recherche: Instrument méthodologique d'observations. *Actes du colloque interIREM Géométrie*, Limoges.

Bonafé, F. et Combes, M-C. (1998). Narrations de recherche: Points d'appui pour la démonstration. In J. Houdebine (Ed.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp. 239-257). Actes du colloque du Laboratoire de didactique des mathématiques de Rennes 1.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bouveresse, J. (1987). *La force de la règle, Wittgenstein et l'invention de la nécessité*. Paris: Minuit.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-111.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Dastur, F. (1995). *Husserl, Des mathématiques à l'histoire*. Paris: PUF.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique: Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Ed. Peter Lang.

Duval, R. (1998). Ecriture et compréhension: Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves. In J. Houdebine (Ed.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp.79-98). Actes du colloque du Laboratoire de didactique des mathématiques de Rennes 1.

Duval, R. (1999). Ecriture et raisonnement, et découverte de la démonstration en mathématiques. *Actes de Xème Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques*, Houlgate, tome II, pp.29-50.

GECO, Sackur, C. et alii (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire? *REPÈRES-IREM, 28,* Topiques.

Maurel, M. (2000). Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* (à paraître)

Sackur, C. et Maurel, M. (2000). Les inéquations en classe de seconde, *Petit x*, *53*, 5-26.

Sinaceur, H. (1994). *Jean Cavaillès, Philosophie des mathématiques*. Paris: PUF.

Vygostki, L. S. (1985). *Pensée et Langage*. Paris: Editions Sociales, 1ère édition,1938.

Teresa Assude, 20, Rue Alphonse Daudet, 91 000 Evry, France. assude@gauss.math.jussieu.fr.

RÉSUMÉ. Cet article présente une partie d'un projet de recherche intitulé CESAME (Construction expérientielle du savoir et autrui dans les mathématiques enseignées). Nous y analysons un dispositif en classe visant à faire faire aux élèves l'expérience de la nécessité mathématique par la confrontation à la résistance de la réalité mathématique et par le dialogue avec autrui. Dans ce but, nous identifions un certain nombre de postures d'élèves ou de groupes d'élèves à partir d'éléments théoriques issus de la théorie anthropologique et de la triple approche, postures qui nous fournissent des outils d'analyse des narrations de recherche produites par les élèves dans ce dispositif.

Mots-clé: *CESAME — nécessité mathématique – expérience – posture – élèves – approche anthropologique – triple approche*

ABSTRACT. This article presents a part of a project of research named CESAME (Construction expérientielle du savoir et autrui dans les mathématiques enseignées). We analyze there a class device aiming to lead the pupils to experience mathematical necessity by confronting themselves with the resistance of mathematical reality and by the dialogue with others. For this purpose, using elements from the anthropological theory and the triple approach, we identify a range of pupils' postures that provide us tools for analysing research narrations produced by pupils during this device.