# El fenómeno *natural number bias*: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales

## *Natural number bias*: a study of students' reasoning in rational number multiplication

**Juan Manuel González-Forte**
Universidad de Alicante, España
juanma.gonzalez@ua.es

**Ceneida Fernández**
Universidad de Alicante, España
ceneida.fernandez@ua.es

**Salvador Llinares**
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

**Resumen.** Una de las principales causas de las dificultades de los estudiantes de educación primaria y secundaria con las operaciones con los números racionales se debe al uso inapropiado de su conocimiento de los números naturales. Este fenómeno es conocido como *natural number bias*. Nuestra investigación tiene como objetivo examinar los niveles de éxito y los razonamientos de los estudiantes desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria cuando resuelven tareas de multiplicación de un número natural por un racional. Los participantes fueron 438 estudiantes españoles de educación primaria y secundaria. Los resultados muestran porcentajes de éxito menores en tareas donde el conocimiento de los números naturales no es compatible para resolverlas. El análisis de los razonamientos de los estudiantes en estas tareas evidencia la existencia del fenómeno *natural number bias* en educación primaria y secundaria, pero mostrando su disminución en los últimos años. Estos resultados amplían y apoyan los resultados obtenidos en previas investigaciones cuantitativas.
*Palabras clave:* natural number bias, fracciones, números decimales, multiplicación.

**Abstract.** One of the main causes of primary and secondary school students' difficulties with the rational numbers operations is the inappropriate use of their natural number knowledge. This phenomenon is known as *natural number bias*. Our research analyses students' success levels and

students' reasoning from 5th to 10th grade when solving multiplication tasks of a natural number by a rational number. Participants were 438 Spanish primary and secondary school students. Results show lower percentages of success in tasks where knowledge of natural numbers was not compatible to solve them. The analysis of students' reasoning in these tasks shows the existence of the natural number bias phenomenon in primary and secondary education, although it decreases during the last grades. These findings extend and support results about this phenomenon obtained in previous quantitative studies.
*Keywords*: natural number bias, fractions, decimal numbers, multiplication.

Recebido em janeiro de 2019
Aceite para publicação em agosto de 2019

## Introducción

El aprendizaje del número racional es esencial para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Kieren, 1992). Sin embargo, se trata de uno de los conceptos matemáticos más complejos con los que los estudiantes de educación primaria y secundaria se enfrentan reflejándose en numerosas dificultades con las fracciones, los números decimales y las operaciones con ellos (Behr et al., 1983; Moss & Case, 1999). Una de las posibles causas de las dificultades de los estudiantes con los números racionales se debe a la aplicación (inapropiada) de propiedades de los números naturales a los números racionales (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Resnick et al., 1989; Resnick, Rinne, Berbieri, & Jordan, 2019). Este fenómeno, que se ha denominado en los últimos años *natural number bias* (Ni & Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen, & Verschaffel, 2015), pone de manifesto que el conocimiento que tienen los estudiantes sobre los números naturales facilita la resolución de tareas con racionales cuando son compatibles con este conocimiento, pero dificulta la resolución de las tareas que no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012; Van Dooren et al., 2015).

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación y tiene como objetivo examinar la posible influencia del conocimiento de los números naturales en estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven tareas de multiplicación de un número racional por un natural. Para ello, no solo se analizarán los niveles de éxito de los estudiantes sino también los razonamientos usados por los mismos. Tal y como mostramos a continuación, en la revisión de las investigaciones previas, la mayoría de los estudios han sido cuantitativos confirmando hipótesis sobre el uso del conocimiento sobre los naturales en tareas con números racionales. Nuestro estudio amplía estos estudios cuantitativos proporcionando evidencias cualitativas (a través de los razonamientos) que apoyen las hipótesis previas obtenidas.

A continuación, se presenta una revisión de los estudios acerca del fenómeno *natural number bias*, y en particular, en el dominio de las operaciones aritméticas, y posteriormente se subraya la extensión de nuestro estudio con relación a estas investigaciones previas.

## Revisión de las investigaciones previas

### Fenómeno *natural number bias*

Desde la década de los 80, las investigaciones han evidenciado el uso no adecuado de las propiedades de los números naturales cuando los estudiantes de educación primaria y secundaria están aprendiendo los números racionales (Hiebert & Wearne, 1985; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Moss & Case, 1999; Resnick et al., 1989). Por ejemplo, comparar dos fracciones basándose en el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales (3/8 es mayor que 1/2 porque 3 es mayor que 1 y 8 es mayor que 2) o considerar que entre 0.3 y 0.4 no hay ningún número, ya que entre 3 y 4 no hay ningún número natural más (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Gelman, Cohen, & Hartnett, 1989).

Estudios más recientes han mostrado que los estudiantes resuelven con mayor éxito tareas con números racionales donde el razonamiento correcto está en concordancia con el conocimiento sobre los números naturales (en adelante tareas o ítems congruentes), que tareas en las que el razonamiento usando el conocimiento de los números naturales conduce a una respuesta incorrecta (en adelante tareas o ítems incongruentes) (Nunes & Bryant, 2008; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Van Dooren et al., 2015; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel, & Van Dooren 2015). Este fenómeno ha sido estudiado en tres dominios: la magnitud, las operaciones aritméticas y la densidad de los números racionales (Meert, Grégoire, & Noël, 2010; Merenluoto & Lehtinen, 2002; Resnick et al., 1989; Vamvakoussi et al., 2012; Van Dooren et al., 2015).

A diferencia de los números naturales, cuando se comparan fracciones, es necesaria la comparación entre dos relaciones (relación multiplicativa entre los términos de la fracción). Sin embargo, los estudiantes a menudo tienen dificultades interpretando el símbolo *a/b*, considerándolo como dos números naturales independientes, separados por una barra (Mack, 1995; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Esto les lleva a concluir que una fracción es mayor que otra cuando su numerador, su denominador, o ambos en una fracción son mayores que en la otra. Por ejemplo, 18/24 es mayor que 12/20 porque 18 es mayor que 12 y 24 es mayor que 20) (Behr et al., 1984; Fazio, DeWolf, & Siegler, 2016). Las investigaciones centradas en examinar la influencia del conocimiento de los números naturales en tareas de comparación de fracciones han obtenido que estudiantes de educación primaria, secundaria, y universitarios tienen mayor nivel de éxito en ítems de comparación de fracciones congruentes que en ítems incongruentes. Así, en los ítems congruentes el uso del razonamiento vinculado a las propiedades de los números naturales produce respuestas correctas. Por ejemplo, en 3/5 vs. 7/8, los estudiantes consideran que la fracción 7/8 es mayor ya que tiene el numerador y el denominador mayor que el numerador y denominador de la fracción 3/5. Mientras que, en ítems incongruentes, por ejemplo 2/3 vs. 4/9, en los que la fracción mayor es 2/3 pero tiene numerador y denominador menores que la fracción 4/9, el razonamiento basado en las propiedades de los números naturales produce respuestas incorrectas (DeWolf & Vosniadou, 2015; González-Forte, Fernández, & Van Dooren, 2018; Resnick et al., 2019).

Con respecto a los números decimales, una de las dificultades de los estudiantes está relacionada con el número de dígitos usados en la representación decimal del número, ya que esta no está relacionada con su magnitud. En este caso, algunos de los errores de los estudiantes pueden explicarse asumiendo que los estudiantes basan su razonamiento en que "cuanto mayor es el número de dígitos, mayor es la magnitud del número" (Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Van Dooren et al., 2015). Por ejemplo, hay estudiantes que consideran que 3.214 es mayor que 3.8 porque 214 es mayor que 8 o que 1.27 y 1.270 son números distintos (Centeno, 1988; Steinle & Stacey, 1998). En estos casos, además, algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0.036 como 36, perdiendo la estructura global de la expresión decimal y viéndolo sólo como un número natural (Resnick et al., 2019; Steinle & Stacey, 1998).

Por otra parte, el conjunto de números racionales se caracteriza por la densidad, que no tiene el conjunto de números naturales (conjunto discreto) (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Streefland, 1991; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Es decir, hay un número infinito de números entre dos números racionales cualquiera (Hartnett & Gelman, 1998). Sin embargo, la mayoría de los alumnos creen que entre 5/7 y 6/7 no hay ningún número, o que entre 1/2 y 1/4 únicamente está el 1/3 (Kerslake, 1986; Merenluoto & Lehtinen, 2002). Lo mismo ocurre con números decimales, creyendo que entre 4.2 y 4.3 no es posible hallar otros números, o que hay un número finito de números decimales entre ambos (Broitman, Itzcovich, & Quaranta, 2003; Moss & Case, 1999).

## Fenómeno *natural number bias* en el dominio de las operaciones aritméticas

La literatura previa ha detallado las dificultades que los estudiantes de educación primaria y secundaria tienen con las sumas y restas con fracciones, algunas de las cuales se pueden explicar por el uso del conocimiento de los números naturales que no es adecuado en estas tareas. Por ejemplo, al sumar (restar) fracciones suelen sumar (restar) los numeradores, por una parte, y los denominadores por otra. Así, ante la suma 12/13 + 7/8 dan como resultado 19/21, o ante la resta 1/4 – 1/2 dan como resultado 0/2 (Siegler & Pyke, 2013; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011; Streefland, 1991). En el caso de las multiplicaciones con fracciones, predominantemente cuando se multiplican fracciones con mismo denominador, el error más común consiste en considerar que solo se multiplica el numerador (ej.: 2/3 × 2/3 = 4/3) (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015; Siegler & Pyke, 2013; Siegler et al., 2011). Esta forma de proceder puede ser explicada por el uso de un conocimiento que ha resultado válido en las tareas con los números naturales (Post et al., 1993) pero que ahora no es adecuado.

En el caso de los números decimales, a diferencia de la aritmética con fracciones, los procedimientos utilizados para las operaciones se parecen mucho a los utilizados con los números naturales. En este caso, se requiere tener en cuenta la posición del punto decimal (la idea de valor de posición en la parte decimal del número) (Lortie-Forgues et al., 2015). Sin embargo, la literatura muestra que los estudiantes tienen dificultades cuando los números no tienen la misma cantidad de dígitos después de la coma, sumando la parte decimal como si fuera una suma de números naturales (ej.: 0.19 + 0.2 = 0.21 o 0.86 - 0.3 = 0.83) (Hiebert & Wearne, 1985).

También en relación con la multiplicación y la división, se ha identificado la influencia de modelos derivados de las operaciones con los números naturales. Así, en el caso de la multiplicación, basada en la idea de sumas repetidas, conduce a los estudiantes al modelo implícito de que el resultado de la multiplicación ha de ser siempre un número mayor que los factores (Fischbein et al., 1985). Mientras que para la división, basada en la idea de reparto, el modelo implícito es que el cociente debe ser menor que el dividendo (Fischbein et al., 1985; Greer, 1987). Estos modelos implícitos derivados del conocimiento de las operaciones con los números naturales generan contradicciones cuando se usan con los números racionales. Por ejemplo, los modelos implícitos "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" y "las divisiones siempre dan como resultado un número menor" son incompatibles cuando uno de los factores es un número racional menor que la unidad (Lortie-Forgues et al., 2015). Este fenómeno, derivado del uso de los modelos implícitos para las operaciones de multiplicar y dividir, fue identificado por Fischbein et al. (1985). En la investigación de Fischbein se propuso a los estudiantes de educación primaria y secundaria elegir la operación necesaria para resolver problemas de multiplicación y división, en tareas como: "Un galón de petróleo cuesta 1.20€, ¿cuánto cuesta 0.22 galones?". Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los alumnos realizaron la división, ya que si realizaban una multiplicación obtenían un número más pequeño. En cambio, planteándoles un problema parecido con números naturales ("Un galón cuesta 2€, ¿cuánto cuestan 5?") realizaban de manera correcta la multiplicación 5 × 2.

Puesto que en este estudio nos centramos en la multiplicación de números racionales, a continuación, revisamos la literatura acerca de las características del tipo de ítems usados en estas investigaciones y los resultados obtenidos.

## Características del tipo de ítems usados en investigaciones sobre la multiplicación de números racionales

Durante la última década, los estudios que han tratado de conocer las dificultades con la multiplicación con números racionales han seguido una metodología similar. En estos casos, se han planteado tareas de elección múltiple y se han analizado posteriormente los niveles de éxito. Ello permite deducir la posible interferencia del conocimiento sobre los números naturales en la realización de la multiplicación, mediante tareas congruentes e incongruentes con respecto al conocimiento del número natural.

Un ejemplo de ello son las tareas de multiplicación de un número natural por un racional inferior y superior a la unidad. Se considera una tarea congruente con el conocimiento del número natural aquella en la que el resultado de la multiplicación resulta un número mayor, tal y como ocurre en la multiplicación de un número natural por un racional superior a la unidad (ej.: 2 × 1.5 o 7 × 8/7). Por el contrario, se considera una tarea incongruente aquella en la que el resultado de la multiplicación resulta un número menor, tal y como ocurre en la multiplicación de un número natural por un racional inferior a la unidad (ej.: 4 × 0.5 o 8 × 1/2). En estas investigaciones se preguntaba a los estudiantes si el producto resultante sería mayor o menor que los factores. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes de educación primaria, secundaria (Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015, 2017) y universitarios (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Vamvakoussi et al., 2012) resuelven correctamente las tareas congruentes, pero tienen dificultades con las tareas incongruentes. Recientemente, Van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel y Van Dooren (2018) con estudiantes de 3.º, 4.º, 5.º, y 6.º de educación primaria además han obtenido que los estudiantes tienen mayores niveles de éxito en ítems con números decimales que con fracciones.

En otros estudios se han planteado tareas con expresiones algebraicas preguntando si la expresión algebraica puede ser verdadera. En estos estudios se diferencian tareas congruentes, como por ejemplo "$m$ × 4 > 4, puede ser verdad?", cuando se substituye la $m$ por un número natural; de las tareas incongruentes, como "$m$ × 5 < 5, puede ser verdad?" solo cuando se sustituye la $m$ por números menores que 1. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes de educación secundaria (Van Hoof et al., 2015) e incluso estudiantes universitarios de matemáticas (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2016) tienen mayor nivel de éxito en las tareas congruentes que en las incongruentes. Del mismo modo, ante tareas con incógnita, por ejemplo, "_ × 4 = 1 ¿posible o imposible?", en las que el estudiante ha de responder si cree que es posible o imposible el resultado proporcionado, las investigaciones han obtenido que estudiantes de educación primaria (Christou, 2015) y estudiantes de educación secundaria (Christou, 2018) también obtuvieron mayores niveles de éxito en las tareas congruentes que en las tareas incongruentes.

Los resultados obtenidos llevan a considerar que el modelo implícito basado en el conocimiento sobre el número natural "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" interfiere en el aprendizaje de las operaciones aritméticas con números racionales, ya que el rendimiento es más bajo en las tareas donde no es válido el razonamiento basado en el conocimiento derivado de los significados y propiedades de los números naturales.

### Nuestro estudio

El objetivo de la presente investigación es examinar la posible influencia del conocimiento de los números naturales en estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven tareas de multiplicación de un número racional por un natural. Para ello, hemos llevado a cabo un estudio transversal desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria, en el que no solo se analizan los niveles de éxito sino también los razonamientos de los estudiantes. El estudio de los razonamientos proporcionará evidencias cualitativas que apoyen las hipótesis obtenidas en estudios cuantitativos previos (ítems de elección múltiple). Además, un estudio transversal desde educación primaria hasta secundaria permite observar si persiste este fenómeno a lo largo de los años.

Por otra parte, en nuestro estudio se incluyen tareas con fracciones y números decimales, ya que se pretende estudiar la posible influencia del tipo de representación (fracción y expresión con coma) en el nivel de éxito y en los razonamientos usados por los estudiantes, lo cual ha sido poco estudiado hasta el momento (Van Hoof et al., 2018).

## Método

### Participantes

Los participantes fueron 438 estudiantes de educación primaria y secundaria: 85 estudiantes de 5.º de Educación Primaria (10-11 años), 81 estudiantes de 6.º de Educación Primaria (11-12 años), 78 estudiantes de 1.º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-13 años), 81 estudiantes de 2.º de ESO (13-14 años), 57 estudiantes de 3.º de ESO (14-15 años) y 56 estudiantes de 4.º de ESO (15-16 años). Aproximadamente había el mismo número de chicos que de chicas. Los centros fueron elegidos aleatoriamente y están situados en ciudades de la provincia de Alicante (España) donde las familias son de clase media y alta. Los principales sectores son la industria y los servicios. Los datos se recogieron durante los meses de marzo y abril del curso académico 2016/2017.

## Instrumento

El instrumento de recogida de datos era un cuestionario formado por 4 ítems de multiplicación de un número natural por un racional (Tabla 1). Los ítems fueron diseñados teniendo en cuenta dos variables: el tipo de representación (fracción o número decimal) y la congruencia con el conocimiento sobre los números naturales (ítem congruente o incongruente).

Tabla 1. Tabla-resumen de los ítems y las variables

| | **Operación** | **Fracción/Decimal (F/D)** | **Congruente/Incongruente (C/I)** |
|---|---|---|---|
| Ítem 1 | 5 × 1/2 | F | I |
| Ítem 2 | 10 × 3/2 | F | C |
| Ítem 3 | 2 × 0.5 | D | I |
| Ítem 4 | 7 × 1.5 | D | C |

En cada ítem los estudiantes tenían que indicar si el resultado de la multiplicación era un número mayor o menor que el número natural multiplicado sin hacer los cálculos, y explicar por qué pensaban que la opción elegida era la correcta (Figura 1).

**Sin hacer operaciones, si multiplicamos 5 x 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?**

- Mayor que 5
- Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Ejemplo de uno de los ítems del cuestionario

Los ítems 1 y 2 consisten en la multiplicación de un número natural por una fracción (5 × 1/2 y 10 × 3/2). El primer ítem es un ítem incongruente con el modelo implícito derivado del conocimiento de la multiplicación con números naturales, ya que el resultado de la multiplicación (2.5) es un número menor que el número natural multiplicado (5). Mientras que el segundo ítem (10 × 3/2) es congruente con el modelo implícito derivado del conocimiento de la multiplicación con números naturales, ya que el resultado de la operación (15) es un número mayor que 10.

Los ítems 3 y 4 consisten en la multiplicación de un número natural por un número decimal (2 × 0.5 y 7 × 1.5). El ítem 3 es incongruente con el conocimiento de los números naturales, ya que el resultado (1) es menor que el número natural multiplicado (2); mientras que el ítem 4 es congruente con el conocimiento de los números naturales ya que el resultado (10.5) es mayor que el número natural que es multiplicado (7).

Los estudiantes resolvieron el cuestionario durante el transcurso habitual de su clase de matemáticas, y dispusieron aproximadamente de 10-15 minutos para responder a estos 4 ítems. Fueron los propios investigadores los que pasaron los cuestionarios, con la ayuda de los profesores de cada centro. Los participantes contaban con el consentimiento de sus padres/tutores legales. La realización del cuestionario era individual, y no estaba permitido el uso de calculadora ni dispositivos móviles.

## Análisis

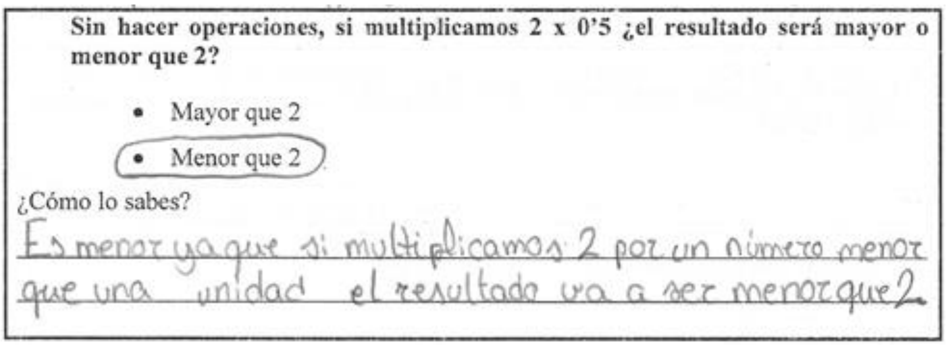
El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase se analizaron los niveles de éxito de los estudiantes en cada ítem y por curso. En la segunda fase se analizaron las justificaciones escritas por los estudiantes (razonamientos).

### *Fase 1: Estudio de los niveles de éxito*

Se codificaron las respuestas correctas e incorrectas en cada ítem siguiendo el siguiente criterio: (1) si el estudiante rodeó la opción correcta y (0) si el estudiante rodeó la opción incorrecta, o no rodeó ninguna opción (respuesta en blanco). A partir de esta codificación, se llevó a cabo un análisis de regresión logística de medidas repetidas usando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE), mediante el software *SPSS 23*. Este análisis permite predecir una variable dependiente (nivel de éxito) a partir de variables independientes continuas o categóricas (curso, tipo de representación y congruencia); y determinar el porcentaje de varianza que las variables independientes explican de la variable dependiente, así como clasificar la importancia relativa de las variables independientes y averiguar el efecto de la interacción entre variables. Puesto que esperamos diferencias significativas en cuanto a los niveles de éxito de los estudiantes en los diferentes ítems y en los diferentes cursos, teniendo en cuenta las variables objeto de estudio: tipo de representación (fracción o número decimal) y congruencia con el conocimiento sobre los números naturales (ítem congruente o incongruente), este tipo de análisis nos permitirá analizar si estas diferencias son significativas.

### *Fase 2: Estudio de los razonamientos de los estudiantes*

La segunda fase de análisis examinó el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes en cada uno de los ítems. En primer lugar, un subconjunto de respuestas fue analizado de forma independiente por tres investigadores. Luego se compararon los resultados y se discutieron las discrepancias hasta llegar a un acuerdo sobre las categorías identificadas. Posteriormente, se agregaron nuevas muestras de datos para revisar las categorías. En relación con los razonamientos correctos se generó una única categoría, en la que el estudiante demostraba saber que al multiplicar por fracciones propias o por números decimales inferiores a la unidad el producto es un número menor; y al multiplicar por fracciones impropias o por números decimales superiores a la unidad el producto es un número mayor (Figura 2).


**Sin hacer operaciones, si multiplicamos 2 x 0'5 ¿el resultado será mayor o menor que 2?**

- Mayor que 2
- Menor que 2

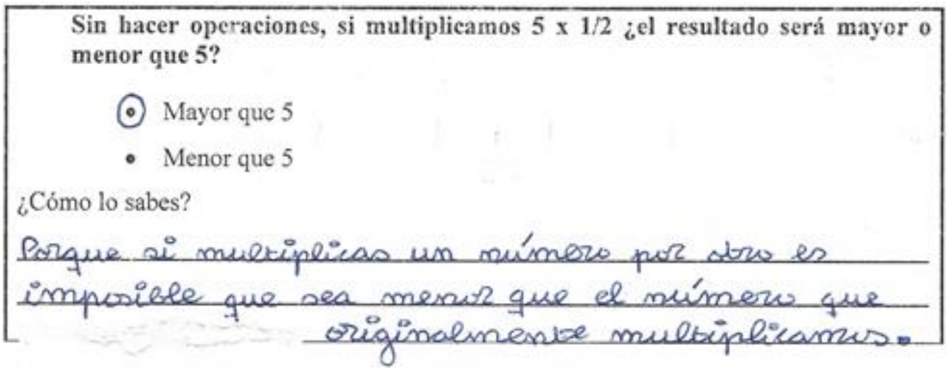
¿Cómo lo sabes?

Es menor ya que si multiplicamos 2 por un número menor que una unidad el resultado va a ser menor que 2

Figura 2. Respuesta de un estudiante de 6.º de primaria asignada a la categoría de razonamiento correcto

En relación con los razonamientos incorrectos se generaron tres categorías:

- *Multiplicar siempre da como resultado un número mayor (uso del modelo implícito derivado del conocimiento de los números naturales)*. Se clasificaron en esta categoría aquellas respuestas basados en el conocimiento sobre los números naturales de que las multiplicaciones siempre dan como producto un número mayor (Figuras 3 y 4).

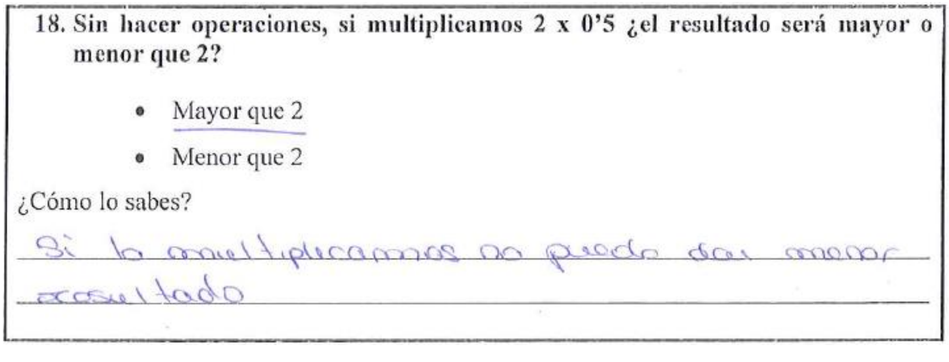

**Sin hacer operaciones, si multiplicamos 5 x 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?**

- Mayor que 5
- Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

Porque si multiplicas un número por otro es imposible que sea menor que el número que originalmente multiplicamos.

Figura 3. Respuesta de un estudiante de 2.º de ESO


**18. Sin hacer operaciones, si multiplicamos 2 x 0'5 ¿el resultado será mayor o menor que 2?**

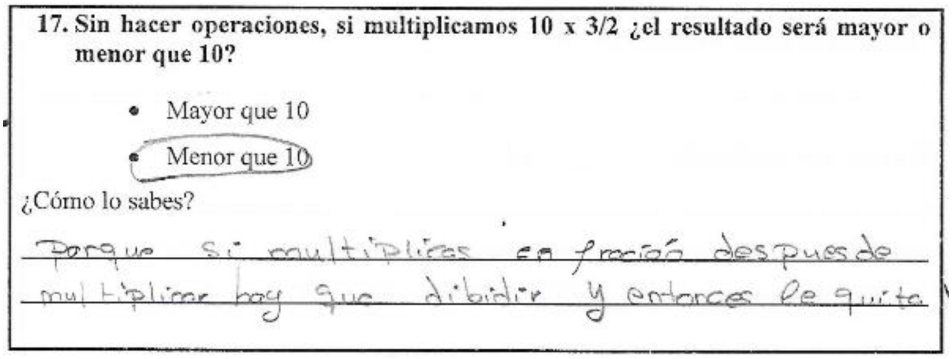
- Mayor que 2
- Menor que 2

¿Cómo lo sabes?

Si lo multiplicamos no puedo dar menor resultado

Figura 4. Respuesta de un estudiante de 4.º de ESO

- *Multiplicar con números racionales siempre da como resultado un número menor (reverse bias).* En esta categoría agrupamos dos tipos de justificaciones. Primero, las apoyadas en un significado parcial de la idea de fracción (en las fracciones al final siempre se divide). De este modo, llegan a la conclusión errónea de que "multiplicar por una fracción siempre hace más pequeño" (Figura 5). En segundo lugar, en el caso de los números decimales, cuando aplican el modelo implícito derivado de los decimales "multiplicar por un decimal siempre hace más pequeño" (Figura 6).

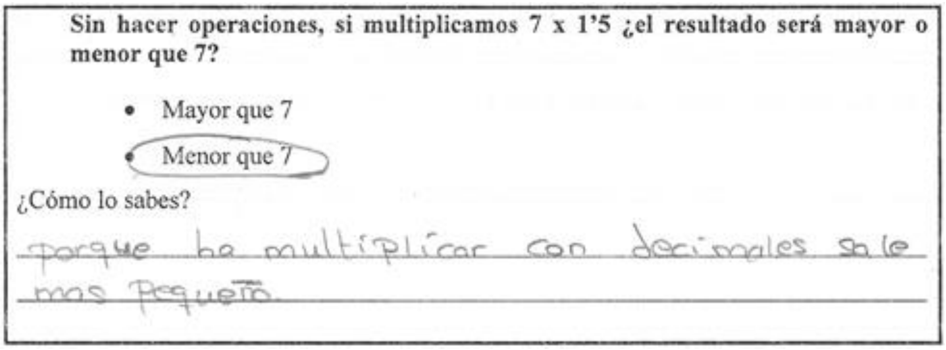

**17. Sin hacer operaciones, si multiplicamos 10 x 3/2 ¿el resultado será mayor o menor que 10?**

- Mayor que 10
- Menor que 10

¿Cómo lo sabes?

Porque si multiplicas en fración despues de multiplicar hay que dibidir y entonces le quita

Figura 5. Respuesta de un estudiante de 6.º de primaria


**Sin hacer operaciones, si multiplicamos 7 x 1'5 ¿el resultado será mayor o menor que 7?**

- Mayor que 7
- Menor que 7

¿Cómo lo sabes?

porque ha multiplicar con decimales sale mas Pequeño

Figura 6. Respuesta de un estudiante de 6.º de primaria

- *Otros razonamientos incorrectos*. Respuestas en blanco o razonamientos sin sentido.

## Resultados

Este apartado está dividido en tres secciones. En primer lugar, se muestra la interacción entre las variables congruencia (ítems congruentes e incongruentes) y el tipo de representación (fracción y decimal). En segundo lugar, se discute acerca de los niveles de éxito a lo largo de los cursos. Por último, se analizan los razonamientos de los estudiantes con relación al tipo de respuesta dada. Estos últimos resultados son los que permiten sustentar resultados obtenidos por estudios cuantitativos que solo consideran niveles de éxito (cuestionarios de elección múltiple), permitiendo inferir características acerca de la comprensión de las operaciones en la transición del conjunto de los números naturales al conjunto de los racionales.

## Estudio de la interacción entre la congruencia de los ítems y el tipo de representación

Globalmente, los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems congruentes (86.62%) que en los incongruentes (67.68%). El análisis de regresión logística mostró que esta diferencia era significativa $\chi^2(1, N = 438) = 71.971$, $p<0.001$. Además, los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems con números decimales que con fracciones (82.53% vs. 71.77%). El análisis estadístico de regresión logística mostró que esta diferencia también era significativa $\chi^2(1, N = 438) = 38.722$, $p<0.001$.

Considerando las dos variables simultáneamente, el análisis estadístico mostró que no hay diferencias significativas en la interacción "congruencia" × "representación" $\chi^2(1, N = 438) = 2.154$, $p<0.142$. Sin embargo, la comparación por pares (Figura 7) muestra que los estudiantes tuvieron mayor éxito en ítems congruentes que en incongruentes, siendo estas diferencias significativas tanto en los ítems con fracciones (83.24% vs 60.30%, $p<0.001$) como en los ítems con números decimales (90.01% vs. 75.06%, $p<0.001$). Sin embargo, esta diferencia fue mayor en los ítems con fracciones.

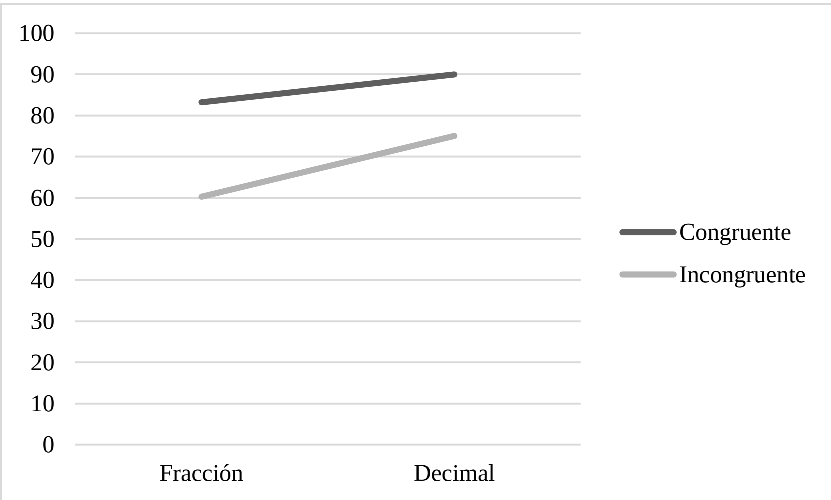
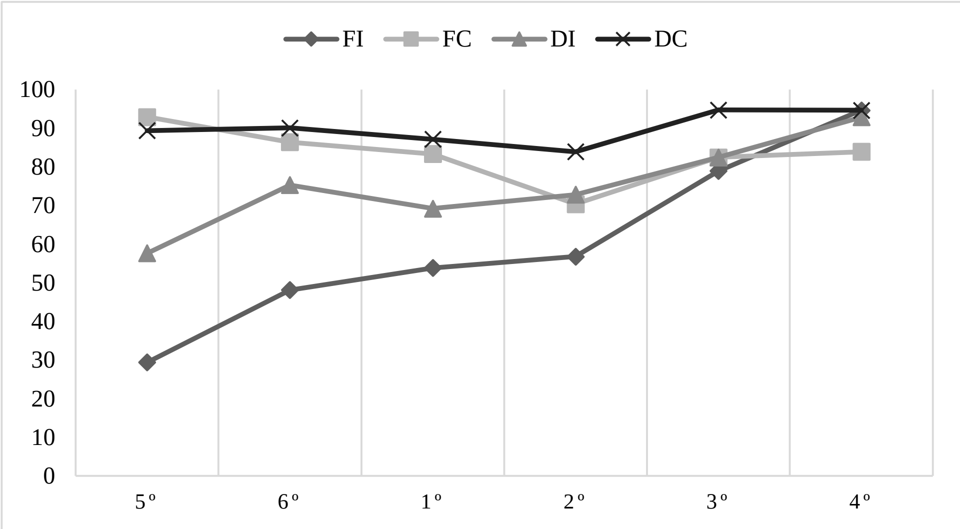



Figura 7. Interacción entre congruencia y el tipo de representación

## Estudio de los niveles de éxito a lo largo de los cursos

La Figura 8 muestra los porcentajes de respuestas correctas en los cuatro ítems desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria obligatoria (ESO). Esta figura muestra que en los ítems congruentes disminuye el nivel de éxito desde 5.º de primaria hasta 2.º de ESO (tanto en ítems con fracciones como con decimales), y aumenta el nivel de éxito desde 2.º de ESO hasta 4.º de ESO. Las diferencias son significativas entre 6.º de educación primaria y 1.º de ESO, 1.º de ESO y 2.º de ESO, y 2.º de ESO y 3.º de ESO. En ítems incongruentes hay un crecimiento del nivel de éxito desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de ESO (tanto con fracciones como con decimales). Las diferencias entre cursos fueron significativas, excepto entre 6.º de educación primaria y 1.º de ESO.




FI: Fracción Incongruente; FC: Fracción Congruente; DI: Decimal Incongruente; DC: Decimal Congruente

Figura 8. Porcentajes de respuestas correctas desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria

El análisis estadístico mostró que la interacción entre las variables "curso" × "congruencia" también fue significativa $\chi^2(5, N = 438) = 101.849$, $p<0.001$. Los ítems congruentes tuvieron mayores niveles de éxito que los incongruentes en todos los cursos, excepto en 4.º de ESO, donde el nivel de éxito en los ítems incongruentes es mayor que en los ítems congruentes. Las diferencias fueron significativas en 5.º y 6.º de educación primaria, 1.º de ESO y 2.º de ESO, pero no el resto (Tabla 2).

Tabla 2. Porcentaje de nivel de éxito en multiplicaciones en ítems congruentes e incongruentes

| | **Congruencia** | | |
|---|---|---|---|
| Curso | Congruente | | Incongruente |
| 5.º | 91.18 | > | 43.53 |
| 6.º | 88.27 | > | 61.73 |
| 1.º | 85.26 | > | 61.54 |
| 2.º | 77.16 | > | 64.81 |
| 3.º | 88.60 | = | 80.70 |
| 4.º | 89.29 | = | 93.75 |

El análisis también mostró una influencia significativa de la interacción de las variables “curso” × “representación”, $\chi^2(5, N = 438) = 17.174$, $p<0.004$, revelándose diferencias significativas entre ambos tipos de representaciones desde 5.º de educación primaria hasta 2.º de ESO, pero no en 3.º y 4.º de la ESO (Tabla 3). La Tabla 3 muestra como la diferencia de éxito entre ítems con fracciones y con números decimales disminuye con el avance de los cursos, siendo esta diferencia la menor en 4.º de ESO.

Tabla 3. Porcentaje de nivel de éxito en multiplicaciones con fracciones y con números decimales

| **Representación** | | | |
|---|---|---|---|
| Curso | Fracción | | Decimal |
| 5.º | 61.18 | < | 73.53 |
| 6.º | 67.28 | < | 82.72 |
| 1.º | 68.59 | < | 78.21 |
| 2.º | 63.58 | < | 78.40 |
| 3.º | 80.70 | = | 88.60 |
| 4.º | 89.29 | = | 93.75 |

Finalmente, la Tabla 4 muestra los porcentajes por curso en ítems congruentes e incongruentes con fracciones y decimales.

Tabla 4. Niveles de éxito por curso en ítems congruentes e incongruentes con fracciones y decimales

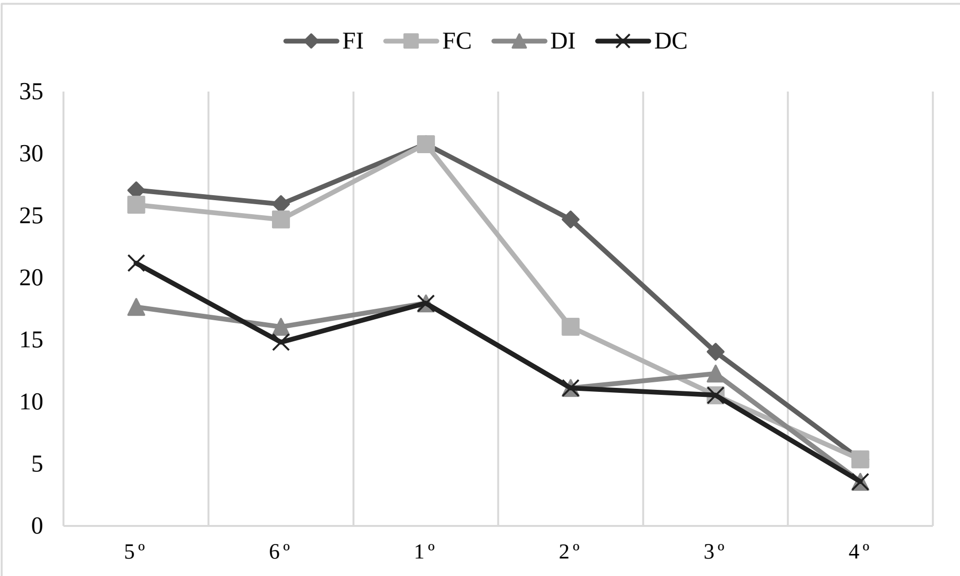
| | **Congruente** | | **Incongruente** | |
|---|---|---|---|---|
| Curso | Fracción | Decimal | Fracción | Decimal |
| 5.º | 92.94 | 89.41 | 29.41 | 57.65 |
| 6.º | 86.42 | 90.12 | 48.15 | 75.31 |
| 1.º | 83.33 | 87.18 | 53.85 | 69.23 |
| 2.º | 70.37 | 83.95 | 56.79 | 72.84 |
| 3.º | 82.46 | 94.74 | 78.95 | 82.46 |
| 4.º | 83.93 | 94.64 | 94.64 | 92.86 |

En general, se observa cómo los ítems congruentes obtuvieron mayores porcentajes de éxito que los incongruentes, y a su vez, los ítems con decimales mayores niveles de éxito que los ítems con fracciones. Sin embargo, en 4.º de ESO, el único curso donde el nivel de éxito fue mayor en ítems incongruentes que en ítems congruentes (Tabla 2), se observa como el porcentaje de éxito es mayor en el ítem con fracciones incongruentes (94.64%) que en el ítem con fracciones congruentes (83.93%). En cambio, en ítems con decimales se observa cómo los porcentajes en ítems congruentes son mayores que en los incongruentes en todos los cursos. Este resultado parece mostrar un cambio en la forma de resolver la multiplicación con fracciones, en estudiantes de 4.º de ESO, ya que tienen mayor nivel de éxito en ítems incongruentes que en los congruentes. Nuestra hipótesis es que estos estudiantes no se apoyan en el modelo implícito basado en considerar "que las multiplicaciones con fracciones siempre dan como resultado un número mayor" sino en otros razonamientos incorrectos.

## Estudio de los razonamientos de los estudiantes

La Figura 9 muestra, desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de ESO, el porcentaje de uso del razonamiento basado en el modelo implícito "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor". Los datos en la tabla indican que este razonamiento basado en el *natural number bias* decrece con la edad, a excepción de 1.º de la ESO, que aumenta en todos los ítems. En 5.º de educación primaria es empleado por más de un 20% (en media). A partir de 1.º de ESO disminuye, pero sin desaparecer al final de la educación secundaria, siendo usado por alrededor de un 5% en 4.º de ESO.

Centrando la atención en cada uno de los ítems, se observa un uso más alto en los ítems de multiplicación con fracciones que con decimales en todos los cursos.

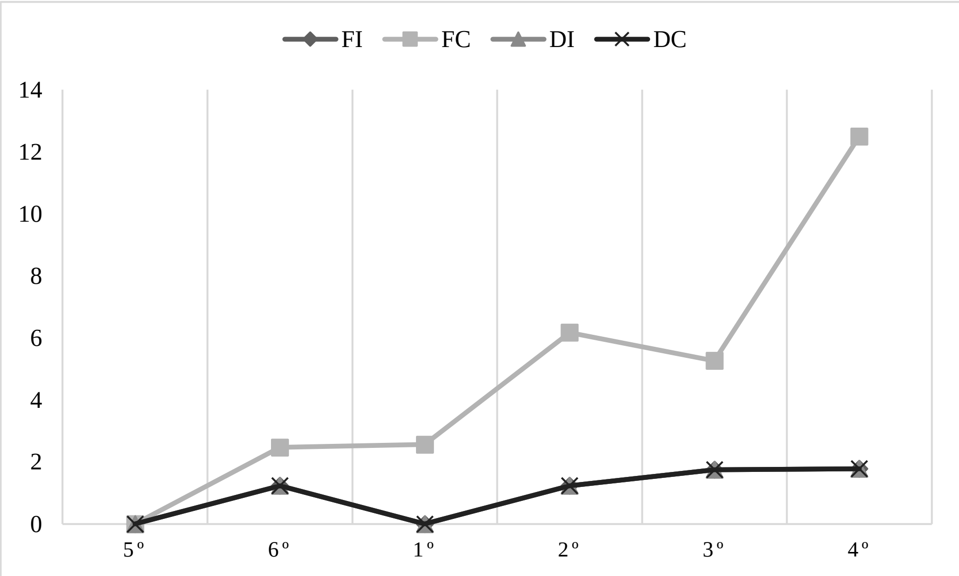



FI: Fracción Incongruente; FC: Fracción Congruente; DI: Decimal Incongruente; DC: Decimal Congruente

Figura 9. Porcentaje del razonamiento basado en el modelo implícito "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor"

El análisis de los razonamientos basados en el *reverse bias* (Figura 10), que se apoya en un significado parcial de la idea de fracción o en un modelo implícito derivado de los decimales "multiplicar por un decimal siempre hace más pequeño", muestra que el uso de este razonamiento es mayor en ítems con fracciones que con números decimales en todos los cursos. En el caso de los ítems con decimales, el uso de este razonamiento aumenta desde

5.º hasta 6.º de educación primaria, desciende desde 6.º hasta 1.º de ESO, y vuelve a aumentar desde 1.º de ESO hasta 4.º de ESO, aunque el porcentaje es muy bajo (1.79%). Sin embargo, en ítems con fracciones el uso de este razonamiento aumenta desde 5.º de educación primaria hasta 2.º de ESO, disminuye desde 2.º de ESO hasta 3.º de ESO, y finalmente aumenta en 4.º de ESO, alcanzando el mayor porcentaje de empleo (12.5%). El razonamiento "multiplicar por fracciones siempre da como resultado un número menor" puede explicar las diferencias entre ítems congruentes e incongruentes con fracciones en 4.º de ESO (Tabla 4) y apoyaría nuestra hipótesis acerca del uso de otros razonamientos incorrectos.




FI: Fracción Incongruente; FC: Fracción Congruente; DI: Decimal Incongruente; DC: Decimal Congruente

Figura 10. Porcentaje de empleo de razonamientos *reverse bias*

## Discusión y conclusiones

Nuestro estudio explora la influencia del conocimiento sobre el número natural en tareas de multiplicación con fracciones y números decimales en estudiantes desde 5.º de educación primaria hasta 4.º de educación secundaria. Analizamos la interferencia del modelo implícito "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" a la hora de determinar el resultado de una multiplicación con números racionales. Para ello, hemos realizado un análisis de los niveles de éxito y hemos analizado los razonamientos que justifican las respuestas dadas en cuatro tareas de multiplicación de un número natural por un racional. El análisis de los razonamientos empleados nos ha permitido sustentar resultados obtenidos por estudios cuantitativos que solo consideran niveles de éxito, permitiendo detectar que hay respuestas correctas pero que se apoyan en razonamientos incorrectos. Además, el análisis realizado nos ha permitido examinar la evolución del uso de los razonamientos incorrectos que apoyan inferencias con relación a la comprensión de la multiplicación con números racionales. Además, la inclusión de los modos de representación, fracciones y números decimales, nos ha permitido examinar la influencia del modo de representación del número en los razonamientos usados.

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes de educación primaria y secundaria están influenciados por su conocimiento sobre las propiedades de los números naturales en torno a la multiplicación, ya que respondieron mejor los ítems congruentes que los incongruentes (Lortie-Forgues et al., 2015; Obersteiner et al., 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Es decir, tuvieron mayor nivel de éxito en los ítems en los que el producto de la multiplicación era un número mayor, como ocurre con los números naturales. Además, el análisis de los razonamientos usados por los estudiantes para justificar las respuestas dadas indica un gran porcentaje de uso del modelo implícito "porque las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" (Fischbein et al., 1985; Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Este resultado subraya la relevancia de este estudio, en el que se integra el análisis de los niveles de éxito con el de los razonamientos empleados por los estudiantes, al mostrar cómo las respuestas correctas podían venir apoyadas en un razonamiento incorrecto. De esta manera, los razonamientos usados permiten identificar cuándo los estudiantes están generalizando propiedades que son válidas en el conjunto de los números naturales, pero no en el conjunto de los racionales.

En cuanto al estudio de los niveles de éxito y razonamientos a lo largo de los cursos, se observa que las diferencias entre los niveles de éxito en las tareas congruentes e incongruentes son significativas hasta 2.º de educación secundaria y además decrecen desde 5.º de primaria hasta 4.º de ESO. El análisis de los razonamientos explica estas diferencias, ya que los estudiantes usan un razonamiento basado en el *natural number bias*. Es decir, un razonamiento centrado en el modelo implícito "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor". Además, se observa que este razonamiento incorrecto decrece con el avance de los cursos, sin llegar a desaparecer al finalizar la educación secundaria (Van Hoof et al., 2015).

Sin embargo, nuestros resultados también muestran una ligera disminución en el nivel de éxito en tareas congruentes y un aumento en las tareas incongruentes desde 5.º de educación primaria hasta 2.º de ESO, siendo esta diferencia más visible en 4.º de la ESO donde los estudiantes tuvieron mayores niveles de éxito en tareas incongruentes que en las tareas congruentes. Este resultado es explicado tras el análisis de los razonamientos, el cual sustenta el empleo de un razonamiento incorrecto basado en los modelos implícitos "las multiplicaciones con fracciones siempre dan como resultado un número menor" y "las multiplicaciones con números decimales siempre dan como resultado un número menor". Este razonamiento, *reverse bias*, puede ser cognitivamente diferente al *natural number bias*, el cual se apoya en la sobre generalización del conocimiento de los números naturales y se desarrolla en mayor medida durante los primeros años de instrucción de los números racionales.

El uso del *reverse bias* es un razonamiento que ya ha sido obtenido en anteriores investigaciones, centradas en el fenómeno *natural number bias* en el dominio de la magnitud. En este dominio, también se ha obtenido que los estudiantes tienen mayores niveles de éxito en ítems incongruentes que en ítems congruentes (DeWolf & Vosniadou, 2015; Rinne, Ye, & Jordan, 2017). De este modo, en lugar de considerar que una fracción tiene mayor magnitud cuanto mayor sea el numerador y el denominador (*natural number bias*), a menudo los estudiantes de educación primaria y secundaria consideran que una fracción es mayor cuanto más pequeño sea el valor del denominador (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017), razonamiento derivado de una comprensión incompleta de las relaciones multiplicativas que definen a las fracciones.

Por otro lado, los resultados obtenidos muestran ciertas diferencias en cuanto a los niveles de éxito y a los razonamientos empleados dependiendo del modo de representación. El análisis de los niveles de éxito y los razonamientos usados por los estudiantes muestran que los estudiantes de educación primaria y secundaria resolvieron mejor los ítems con números decimales que los ítems con fracciones en todos los cursos, usando en mayor medida las propiedades de los números naturales con fracciones que con números decimales (DeWolf, Grounds, Bassok, & Holyoak 2014; Van Hoof et al., 2018). Aunque 4.º de ESO es el curso que menos está influenciado por el conocimiento sobre el número natural, también se observan diferencias entre ambos modos de representación. De este modo, se observa la existencia del razonamiento incorrecto *reverse bias* en fracciones, pero no en números decimales. Este razonamiento incorrecto se apoya en un significado parcial de la idea de fracción (en las fracciones al final siempre se divide) junto con el modelo implícito de que "en una división, el cociente siempre es más pequeño que el dividendo".

Futuras investigaciones acerca de la influencia del conocimiento del número natural en las operaciones aritméticas con números racionales podrían incluir también ítems con divisiones, lo que puede permitir conocer posibles diferencias en cuanto al uso de razonamientos entre multiplicaciones y divisiones, teniendo en cuenta ambos modos de representación. Además, sería interesante complementar la recogida de datos con entrevistas que permitiera analizar en qué medida los estudiantes dan respuestas correctas apoyadas en razonamientos incorrectos (facilitados por la propia estructura de los ítems usados). Es decir, investigaciones cualitativas que indaguen en torno a la comprensión de la multiplicación y la división podrían ser útiles. De este modo, resultaría interesante conocer en qué medida el razonamiento basado en el *reverse bias* se observa únicamente en ítems de multiplicación con fracciones, o si también ocurre en el caso de las divisiones.

## Reconocimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (UAFPU2018-035).

## Referencias

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence: A clinical teaching experiment. *Journal of Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323-341.

Broitman, C., Itzcovich, H., & Quaranta, M. E. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 5-26.

Centeno, J. (1988). *Números decimales: ¿por qué? ¿para qué?* Madrid: Síntesis.

Christou, K. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM. Mathematics Education*, *47*(5), 747-758.

Christou, K. (2018). The natural number bias in arithmetic operations: the case of the representational form of the numbers. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 267-274). Umeå, Sweden: PME.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*(1), 71-82.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29.

Fazio, L. K., DeWolf, M., & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *42*(1), 1-16.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Gelman, R., Cohen, M., & Hartnett, P. (1989). To know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers". In C. Maher; G. Goldin, & R. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 29–67). New Brunswick, NJ: Center for Mathematics, Science, and Computer Education at Rutgers–The State University of New Jersey.

González-Forte, J.M., Fernández, C., & Van Dooren, W. (2018). Gap and congruency effect in fraction comparison. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 459-466). Umeå, Sweden: PME.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 37-45.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*(4), 341-374.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*, *2*(3-4), 175-205.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 323–372). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422-441.

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244-259.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice* (pp. 233-258). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *24*(2), 262-270.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107,* 537-555.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 327–362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, I., Rinne, L., Barbieri, C., & Jordan, N. C. (2019). Children's reasoning about decimals and its relation to fraction learning and mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *111*(4), 604-618.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 8-27.

Rinne, L. F., Ye, A., & Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, *53*(4), 713-730.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909-918.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994-2004.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273-296.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching Mathematics in New Times: Proceedings of the 21st Annual Conference of MERGA* (Vol. 2, pp. 548-555). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Number sense in the transition from natural to rational numbers. *British Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 43-56.