

Ensino e aprendizagem dos números e das operações

Teaching and learning of numbers and operations

Joana Brocardo

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
joana.brocardo@ese.ips.pt

José Carrillo

Universidad de Huelva, Espanha
carrillo@uhu.es

Publicado *online* em 28 de dezembro de 2019

O tema deste número da revista *Quadrante, Ensino e Aprendizagem dos Números e Operações*, é um tópico curricular de importância inquestionável para a educação matemática dos jovens e adultos de todos os países. Embora sendo um dos temas em que já se produziu uma investigação significativa que nos permite ter hoje um sólido conhecimento sobre muitos aspetos nele integrados, a verdade é que ainda persistem muitas questões por aprofundar e que requerem a continuação da realização de investigações e a discussão aprofundada de novo conhecimento e do modo como se articula como o anteriormente produzido.

Os seis artigos que constituem este número contribuem para discutir algumas das questões centrais que se colocam sobre o ensino e aprendizagem dos números e das operações, dando-nos um panorama e uma diversidade de focos e abordagens teóricas e incluindo trabalhos realizados no Brasil, Espanha, Holanda, México e Portugal. Os cinco artigos que relatam investigações empíricas abrangem o ensino e a aprendizagem dos números e das operações desde o ensino básico ao ensino superior e o artigo de carácter teórico, embora discutindo aspetos que dizem respeito a todos os níveis de ensino não superior, avança com uma concretização focada no ensino dos números até 100.

É inquestionável a importância da Matemática na sociedade de hoje. No entanto, ela justifica-se não pela necessidade de dominar conhecimentos rotineiros, tradicional foco do ensino dos números e das operações desde os primeiros anos de escolaridade. A necessidade de mudar para um currículo de Matemática que tem como principal objetivo a compreensão é discutida no primeiro artigo desta revista por Koeno Gravemeijer e Geeke Bruin-Muurling. No texto *Fostering process-object transitions and a deeper*

understanding in the domain of number, estes dois autores salientam que a investigação em educação matemática tem evidenciado que insistir no ensino de conhecimentos isolados e de procedimentos rotineiros conduz a um baixo nível de proficiência matemática e que este, claramente, não responde às necessidades impostas pela sociedade atual. Nela é cada vez menos importante o domínio de procedimentos rotineiros e assume um maior relevo a necessidade de possuir uma compreensão profunda da Matemática.

Gravemeijer e Bruin-Muurling argumentam que a construção de objetos matemáticos deve assentar na reificação dos processos matemáticos, traduzindo esta necessária relação, a estar presente em todo o ensino da Matemática, pela expressão *process-object transitions*. Concretizam esta ideia global para o conceito de número que perspetivam como um objeto matemático que ganha sentido a partir do seu entendimento num sistema de redes de relações. Finalmente, exemplificam como na adição e subtração até 100 se pode organizar uma sequência de ensino assente na exploração com compreensão da transição *process-object*.

Embora já com um corpo de investigação significativo mas considerado um assunto complexo e de crucial importância para o desenvolvimento das estruturas mentais em que assentam futuras aprendizagens, o ensino e a aprendizagem dos números racionais continua a ser um tema que inclui muitos aspetos problemáticos, cuja compreensão requer mais investigação. O segundo texto deste número temático foca um destes aspetos e contribui para ampliar a compreensão do modo como os conhecimentos sobre os números naturais podem constituir obstáculos à compreensão das operações com números racionais.

No artigo *El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicacion de números racionales*, Juan Manuel González-Forte, Ceneida Fernández e Salvador Llinares aprofundam o conhecimento sobre este fenómeno, designado habitualmente por *natural number bias*, investigando os níveis de êxito e os raciocínios usados pelos estudantes do 5.º ano da Educação Primária (11-12 anos) até ao 4.º ano da Educação Secundária Obrigatória (15 -16 anos) para resolver tarefas que envolvem o produto de um número natural por um número racional (não natural). Aplicaram um questionário composto por quatro itens a um total de 438 alunos, desenhados de acordo com duas variáveis: o tipo de representação (fração ou número decimal) e a congruência com o conhecimento sobre os números naturais (item congruente ou incongruente).

Globalmente, os resultados deste estudo mostram que os estudantes são influenciados pelo conhecimento que têm sobre propriedades válidas para a multiplicação com números naturais uma vez que respondem melhor aos itens congruentes do que aos incongruentes. Assim, identificam a existência do fenómeno *natural number bias* tanto

nos alunos do ensino primário como nos do secundário, embora ele tenha uma menor expressão nos últimos anos do ensino secundário. A análise das justificações das respostas propostas pelos alunos permite identificar justificações como a de que “a multiplicação dá sempre um resultado maior” associadas ao *número natural bias* e, ainda, relativas ao *reverse bias* baseadas num raciocínio incorreto associado a modelos implícitos como “a multiplicação com frações dá sempre um resultado menor” e questionar sobre a eventual existência de diferenças cognitivas entre eles.

As dificuldades identificadas neste estudo ilustram muitas outras, referidas por outros investigadores, e reforçam a importância de desenvolver o *sentido de número*, expressão que engloba aspetos como a capacidade de compor e decompor números, reconhecer a grandeza absoluta e relativa dos números, utilizar números de referência, relações numéricas e propriedades das operações para calcular mentalmente, compreender o sistema de numeração decimal, resolver problemas utilizando relações entre as operações ou fazer estimativas.

Vários estudos têm contribuído para a construção de um já significativo conhecimento sobre cálculo mental e sentido de número e que realçam, por exemplo, a importância de pensar o trabalho em torno dos números e das operações em termos de sentido de número articulando-o com uma linha de desenvolvimento do cálculo mental. O terceiro artigo deste número constitui um importante contributo para aprofundar este conhecimento, discutindo-o num campo numérico habitualmente menos trabalhado: o conjunto dos números racionais.

No texto *Cálculo mental com números racionais e desenvolvimento do sentido de número*, Renata Carvalho e João Pedro da Ponte analisam as componentes de sentido de número que se refletem nas estratégias de cálculo mental que os 39 alunos de duas turmas de 6.º ano (11-12 anos) usam para operar com números racionais. Concluem que o desenvolvimento do cálculo mental com números racionais assenta no conhecimento sobre números naturais uma vez que as estratégias dos alunos refletem, com frequência, que estes recorrem a números naturais para comparar e operar com numerais decimais ou frações. Identificam que os alunos usam factos numéricos que conhecem, relativos aos números naturais, para apoiar a procura de relações e regularidades, concluindo que o sentido de número se consolida com as aprendizagens associadas a novos conjuntos numéricos, e para as quais os conhecimentos prévios adquiridos são importantes. Concluem, igualmente, que a mudança de representação se revela como estratégia eficiente no cálculo mental com números racionais. Finalmente, na linha do que é largamente enfatizado pelos resultados de vários estudos focados no cálculo mental, salientam a importância que têm as estratégias desenvolvidas no âmbito do trabalho com números naturais para a aquisição de outras estratégias em conjuntos numéricos mais

complexos, recomendando o desenvolvimento continuado e intencional do cálculo mental, desde os primeiros anos de escolaridade.

Um aspeto igualmente muito discutido no âmbito dos números e operações diz respeito à flexibilidade. De um modo geral defende-se a importância de combinar uma perícia de rotina com uma perícia adaptativa que permite compreender como e porque funcionam os procedimentos e ser capaz de modificá-los e adaptá-los. Salienta-se também que a flexibilidade na construção de estratégias de cálculo se desenvolve na relação entre conhecimento conceptual e procedimentos e em como ambos são imprescindíveis para compreender Matemática.

O artigo *Flexibilidade de cálculo aditivo suportada por relações numéricas*, de Margarida Rodrigues e Lurdes Serrazina, contribui para aprofundar o tema da flexibilidade ao discutir o modo como alunos do 1.º ciclo do ensino básico desenvolvem a flexibilidade de cálculo articuladamente com a construção do conceito de número. Os dados analisados, relativos à exploração de duas tarefas, uma numa turma do 1.º ano e outra no 2.º ano na mesma turma, com a mesma professora, confirmam a estreita relação entre evolução conceptual e flexibilidade. De facto, como estas autoras salientam, os alunos começam a estabelecer relações numéricas no 1.º ano que são ampliadas no 2.º ano e que são usadas para deduzir valores desconhecidos. Também, embora não se tratando de um estudo focado no professor, Rodrigues e Serrazina salientam que as ações da professora, focadas no desenvolvimento da flexibilidade de cálculo através da procura de relações justificadas entre diferentes expressões numéricas, foram fundamentais para os alunos não usarem apenas os procedimentos já mecanizados de decomposição.

A importância do papel do professor para uma efetiva aprendizagem matemática dos seus alunos é inquestionável, sendo o seu conhecimento objeto de estudo desde há várias décadas. Os dois últimos artigos desta revista apresentam investigações desenvolvidas no contexto da formação inicial de professores: o primeiro deles foca-se nos estudantes, futuros professores, e o último incide sobre o conhecimento do formador de professores.

No artigo *Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón*, Ana María Reyes Camacho e Leticia Sosa Guerrero usam como referencial teórico o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge – MTSK*) e estudam o caso de um futuro professor do ensino primário. O objetivo da investigação que realizam é identificar os conhecimentos matemáticos e os conhecimentos didáticos do conteúdo matemático que o futuro professor põe em jogo durante o design, exploração e análise das tarefas que usa para ensinar a noção de razão a uma turma de 5.º ano. São analisados planificações de aulas, entrevistas semiestruturadas, videografações de aulas e documentos de reflexão sobre a prática, elaborados pelo futuro professor. As autoras deste estudo identificam indicadores de diversos subdomínios do modelo MTSK, tanto do

conhecimento matemático, como do conhecimento didático do conteúdo matemático. Destaca-se que o conhecimento do futuro professor sobre estratégias, técnicas, tarefas e exemplos para o ensino favorece o ensino da noção de razão de tipo geométrico. Este futuro professor também sabe que os alunos costumam aplicar critérios aditivos ao explorar tarefas que envolvem o conceito de razão. Finalmente, este estudo permite concluir que o conhecimento de algumas teorias didáticas contribuiu para o design de tarefas adequadas para abordar a noção de razão como comparação de duas quantidades por meio de um quociente.

No último artigo desta revista, *Relação de ordem no conjunto dos Números Inteiros: discutindo o conhecimento do formador de professores de Matemática*, Marieli Almeida e Miguel Ribeiro, abordam um objeto de estudo, o de professor formador, que é de crescente interesse. O seu objetivo, a longo prazo, é construir um modelo de conhecimento para o formador de professores de Matemática. Neste texto discutem indicadores deste futuro modelo a partir de dois pressupostos: o primeiro é o uso do modelo MTSK como ponto de partida que pode inspirar a geração do futuro modelo; o segundo é a consciencialização da particularidade do caso escolhido como sujeito participante. Este é um matemático que forma professores de Matemática no Brasil, no contexto de uma disciplina da Teoria dos Números que não tem orientação didática. Os dados foram recolhidos por meio da gravação áudio e vídeo de uma aula e foram analisados procurando identificar o conhecimento especializado desse matemático, enquanto formador de professores.

Os resultados mostram indicadores do Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge*) do formador, bem como elementos de seu Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*). Destaca-se a mobilização de conhecimentos sobre propriedades, definições, procedimentos e registos de representação, bem como o conhecimento das dificuldades de abstração dos seus estudantes e do conteúdo e sequência dos programas de formação inicial. No entanto, identifica-se uma presença ténue de conhecimento relacionado com as conexões entre conteúdos e com a forma de proceder em Matemática (características das definições ou demonstrações, por exemplo). Segundo os autores, os indicadores obtidos constituem mais um passo para a elaboração de um modelo do conhecimento especializado do formador de professores de Matemática.