# Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón

## Specialised knowledge of the future elementary school teacher: a case study of the teaching of ratio

**Ana María Reyes Camacho**
Escuela Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos, Zacatecas, México
anyreca0712@hotmail.com

**Leticia Sosa Guerrero**
Benemérita Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México
lsosa@uaz.edu.mx

**Resumen.** En este artículo tomamos como referente el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK) para identificar los conocimientos matemáticos y didácticos del contenido matemático que un profesor de primaria en formación inicial pone en juego durante el diseño, ejecución y análisis de tareas, cuando enseña la noción de razón en un grupo de quinto grado. En este estudio cualitativo, planificaciones de clases, entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y documentos de análisis de la práctica elaborados por el profesor, nos permiten identificar indicadores de conocimientos de la noción de razón, conocimientos de algunas características de aprendizaje de los estudiantes, así como conocimientos de la enseñanza de las matemáticas. También nos permite concluir que el conocimiento de la teoría de las situaciones didácticas y de algunos volúmenes de los tomos de matemáticas para educación normal en México contribuyó al diseño de tareas para abordar la noción de razón como una comparación de dos cantidades mediante un cociente, y favoreció la enseñanza de una razón geométrica, de tipo multiplicativo.
*Palabras clave:* formación inicial de profesores; primaria; MTSK; conocimiento de la enseñanza de las matemáticas; razón.

**Abstract.** This article is based on the use of the *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* model (MTSK) to identify the Mathematical Knowledge and Pedagogical Content Knowledge that a teacher in initial training puts into action when he designs a lesson plan, develops a lesson proposal, and analyses open tasks, when he teaches the notion of ratio in a group of fifth graders (10-11 age). In this qualitative study, based on documents prepared by the teacher (class planning, semi-structured interviews, video recordings and practice analysis), we identify indicators of knowledge of the notion of ratio, knowledge of some features of learning mathematics, as well as knowledge of mathematics

teaching. We concluded that the knowledge of the theory of didactic situations and of some volumes of mathematics for normal education in Mexico, contributed to the design of tasks to address the notion of ratio as a comparison of two quantities by means of a quotient, and favoured the teaching of a geometric ratio, of multiplicative type.
*Keywords:* initial teacher training; elementary school; MTSK; knowledge of mathematics teaching; ratio.

Recebido em fevereiro de 2019
Aceite para publicação em dezembro de 2019

## Introducción

Desde hace décadas se han llevado a cabo una serie de investigaciones con el propósito de definir y organizar el conocimiento profesional de los profesores. Prueba de ello, son los trabajos de Shulman (1986, 1998), quien señala que existe una dependencia entre la teoría y la práctica, es decir, no se pueden desarrollar teorías al margen de la práctica. De ahí que en sus diferentes trabajos de investigación intente definir y reflexionar sobre el conocimiento que el profesor necesita en función del análisis de diferentes momentos de clases de profesores. Estos trabajos sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza afirman que los profesores tienen experiencia en torno a los contenidos que enseñan, lo cual lo lleva a considerar tres componentes esenciales de la materia que se va a enseñar: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular.

Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una propuesta centrada en el conocimiento matemático para la enseñanza que consiste en el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios, cada uno de ellos subdividido en tres subdominios. En el dominio del conocimiento del contenido se ubica el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento en el horizonte matemático. Por su parte, en el conocimiento didáctico del contenido se encuentra el conocimiento del contenido y estudiantes, el conocimiento del contenido y enseñanza y el conocimiento curricular.

En función de estos antecedentes, Carrillo et al. (2018) presentan el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés – *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*). El MTSK es un modelo enfocado exclusivamente en el conocimiento específico del profesor de matemáticas. Considera la naturaleza especializada de ese conocimiento destacando la especialización con respecto al conocimiento matemático como una propiedad inherente al modelo, asocia la especificidad con la enseñanza de las matemáticas asumiendo que la especificidad de los conocimientos del profesor en relación a la enseñanza del profesor afecta tanto al conocimiento matemático como al conocimiento didáctico del contenido matemático. El modelo MTSK tiene un enfoque analítico para obtener una visión de los elementos que conforman el conocimiento del profesor y las interacciones entre ellos, además está dirigido principalmente hacia el estudio del conocimiento que el profesor pone en uso. En el MTSK se considera el conocimiento matemático (MK – *Mathematical Knowledge*) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK – *Pedagogical Content Knowledge*). El MK es el conocimiento que posee un profesor de matemáticas en términos de una disciplina científica dentro de un contexto educativo y el PCK se refiere al conocimiento relacionado con el contenido matemático en términos de enseñanza-aprendizaje.

En esta investigación tomamos como perspectiva teórica el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, para identificar y caracterizar el conocimiento del contenido y didáctico del contenido que un profesor en formación inicial de la Licenciatura en Educación Primaria en México pone en acción cuando enseña la noción de razón en un grupo de quinto grado de educación primaria.

En palabras de Llinares (2003), la noción de razón desde las fracciones permite establecer comparaciones entre dos cantidades de igual o diferente magnitud, que no precisamente se asocia a situaciones de comparación parte-todo: "La generalidad de la interpretación como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte-todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo" (p. 197).

En el caso de la noción de razón desde la proporcionalidad, Block, Mendoza y Ramírez (2010) se refieren a la razón como una relación entre dos cantidades. Además, señalan que existen dos tipos de razones usuales: la razón geométrica y la razón aritmética. La razón geométrica es de tipo multiplicativo, expresa un cociente y es la que abordan desde la proporcionalidad, y añaden que la razón aritmética es de tipo aditivo y expresa la diferencia entre dos cantidades.

En la noción de razón convergen las fracciones y la proporcionalidad, situación que Block (2008) fundamenta cuando expresa:

> La noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas muy estudiados, la proporcionalidad, sobre todo desde la perspectiva del desarrollo cognitivo (e.g., Inhelder y Piaget, 1955; Noelthing, 1981a, 1981b; Karplus et al., 1983), y los números racionales, desde una perspectiva didáctica (e.g., Hart, 1988; Kieren, 1988, 1993; Behr et al., 1990). Una tendencia apuntalada en gran medida por los trabajos de Vergnaud (1988) sobre las estructuras multiplicativas ha consistido en integrar el estudio de estas dos problemáticas: se considera que la adquisición de aspectos fundamentales de la noción de número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, a la vez que la resolución de problemas de proporcionalidad puede requerir, en algunos casos, de la aplicación de herramientas aritméticas, en particular, el cálculo con fracciones y decimales. (p. 496)

Posteriormente, Ramírez y Block (2009) analizaron las clases de un maestro de sexto grado de primaria. Entre sus principales resultados destacan algunas dificultades en relación con la representación verbal de la razón a partir de su representación numérica expresada en forma de fracción (a/b). Más tarde, Valverde (2012) realiza una investigación en la formación inicial de profesores de educación primaria. En este escenario, establece algunas reflexiones sobre la razón y la fracción como nociones que no son sinónimos, y cuya comprensión puede acarrear dificultades para los estudiantes. Por su parte, Rivas (2013) también en el escenario de la formación inicial de profesores de educación primaria, desarrolla una investigación sobre el razonamiento proporcional. Entre sus conclusiones destaca que los profesores tienen dificultades para establecer interpretaciones y relaciones entre fracción, fracción/razón y razón.

Entre los principales resultados de las investigaciones anteriores, encontramos que los vínculos entre razón, fracciones y proporcionalidad plantea a los profesores en formación inicial algunas dificultades en su estudio, por ejemplo, en las representaciones verbales y numéricas.

## El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas: una perspectiva teórica en la formación inicial de profesores de primaria

La formación inicial se ha caracterizado por el momento en que los estudiantes para maestro comienzan un estudio formal a través de los diferentes programas que cursan de manera escolarizada o semiescolarizada. Mellado (2003) señala que "la formación inicial tiene que integrar los conocimientos académicos, las concepciones personales y el conocimiento práctico, y contribuir a generar en los profesores en formación su propio conocimiento didáctico del contenido" (p. 353). Al respecto, Torres (1999) menciona la importancia de rescatar en esta etapa la biografía escolar del futuro docente en relación con los contenidos curriculares, pero, sobre todo, lo que han aprendido sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje, ya que pueden ser determinantes en el estilo del docente que se está formando. Por lo tanto, la formación inicial debe incorporar los conocimientos que traen los futuros docentes al ingresar a las escuelas normales, con el propósito de enriquecer esas experiencias y orientarlas al logro del perfil de egreso esperado.

En la formación inicial, el estudiante tiene que saber identificar y resolver situaciones conflictivas, poniendo en juego estrategias para enfrentar la práctica docente; motivo por el cual resulta interesante analizar qué hacen los profesores en formación inicial durante sus jornadas de práctica en la escuela primaria y qué conocimientos emplean.

Desde hace décadas, existen investigadores que se han dedicado a profundizar en el estudio del conocimiento profesional de los profesores a partir de diferentes configuraciones. En el caso de los estudios sobre los profesores que enseñan matemáticas surgieron algunas interrogantes sobre el conocimiento matemático que el profesor poseía y el que debería poseer para el ejercicio efectivo de su función docente (Sosa, 2011). Ambos cuestionamientos encuentran respuesta en la práctica, tanto de los docentes en formación continua como de los profesores en formación inicial durante su estancia en la escuela primaria.

El MTSK aborda el dominio del conocimiento matemático y el del conocimiento didáctico del contenido (Figura 1)[1].

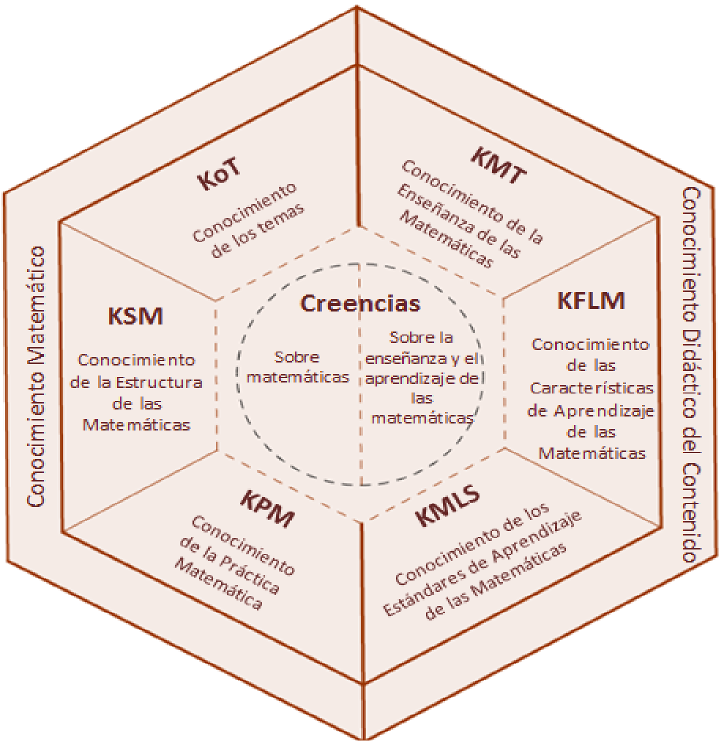


Figura 1. Diagrama del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018)

Al tomar como referente este diagrama y siguiendo a Carrillo et al. (2018; 2013), Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014), y Escudero-Ávila (2015), podemos apreciar que el MTSK, como se ha mencionado anteriormente, está constituido por el dominio del conocimiento matemático (MK), el dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias que se ubican en el centro de la Figura 1. Los dos primeros están integrados por diferentes subdominios que incluyen un sistema de categorías que surge de la elucubración teórica y los datos empíricos con los que se han trabajado. Enseguida mostramos una descripción general de los componentes del MTSK tomando como referente las fuentes citadas.

En el dominio del conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge* – MK) resulta fundamental el conocimiento que el profesor tiene de la disciplina que enseña, en este caso, matemáticas. De ahí que se plantean como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. De este modo, el dominio del conocimiento matemático (MK) está constituido por el subdominio conocimiento de los temas matemáticos (*Knowledge of Topics* – KoT), el cual describe qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce los temas que enseña, e incluye conocimientos de definiciones, propiedades, fundamentos, procedimientos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones; el subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas (*Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM), referido al conocimiento del profesor sobre las conexiones entre elementos matemáticos, y que integra conocimientos de conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares; y el subdominio conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of the Practices in Mathematics* – KPM), es decir, conocimientos sobre jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio del conocimiento didáctico del contenido, identificamos el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM), que abarca el conocimiento asociado con características inherentes al aprendizaje de las matemáticas, poniendo el foco en el contenido matemático (como el objeto de aprendizaje) en lugar de en el alumno, y aborda conocimientos de las teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático, intereses y expectativas; el subdominio de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT), que integra conocimientos de las teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; y el subdominio conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS), que involucra conocimientos de expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, así como conocimientos de secuenciación con temas anteriores y posteriores.

El tercer dominio del modelo MTSK está constituido por las concepciones sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, que no son objeto de estudio en este artículo.

El MTSK, a partir de las categorías e indicadores de conocimientos presentes en los diferentes dominios y subdominios, establece una propuesta amplia y profunda sobre los conocimientos que el profesor que enseña matemáticas necesitaría poseer.

## Diseño de la investigación

En esta investigación nos ubicamos en un paradigma interpretativo. De acuerdo con Denzin y Lincoln (2003) toda investigación interpretativa está orientada por un conjunto de creencias y sentimientos sobre el mundo, cómo debe ser entendido y estudiado. Desde esta perspectiva, definimos que el diseño de esta investigación es de corte cualitativo.

El planteamiento del problema de esta investigación, visto como el espacio donde se centra la investigación, emerge de la literatura técnica y no técnica, una de las fuentes que plantea Strauss y Corbin (2002). Así, decidimos realizar este estudio en la formación inicial de profesores de primaria cuando enseñan la noción de razón bajo la perspectiva teórica del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

En este estudio atenderemos la pregunta central:

¿Cuál es el conocimiento especializado que evidencia un profesor en formación cuando enseña la noción de razón?

En particular,

¿Cuáles son los elementos de conocimiento matemático que evidencia un profesor en formación cuando enseña la noción de razón?

¿Cuáles son los elementos de conocimiento didáctico del contenido que evidencia un profesor en formación cuando enseña la noción de razón?

En esta investigación recurrimos al estudio de casos, como "[…] el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1999, p. 11). El diseño de casos utilizado en esta investigación es de tipo instrumental (Stake, 1999), con la intención de avanzar en la identificación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas sobre la enseñanza de la noción de razón de un profesor de primaria en formación inicial que hemos llamado Israel, él es el informante en este estudio.

La selección de este informante clave toma como referente que cursara el quinto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, bajo el plan de estudios 2012; previamente llevó cuatro cursos de matemáticas: 1) aritmética: su aprendizaje y enseñanza; 2) álgebra: su aprendizaje y enseñanza; 3) geometría: su aprendizaje y enseñanza; y 4) procesamiento de la información estadística. El estudio formal de noción de razón desde las fracciones y la proporcionalidad lo realizó en el curso de aritmética.

Otro criterio para seleccionar a Israel fue su desempeño académico sobresaliente en relación con la aplicación de un instrumento sobre su conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones en primer semestre de la licenciatura. Además, entrevistamos a los profesores que trabajaron los cursos de matemáticas con el grupo de Israel, los cuales coinciden en que este estudiante tiene un desempeño académico alto, mismo que respaldan sus calificaciones.

La recogida de información la realizamos a partir de diferentes fuentes. En un primer momento, solicitamos al estudiante planificar algunas clases para favorecer la enseñanza de la noción de razón, tomando como referente los conocimientos que tiene. Así, acompañamos este proceso con la aplicación de una entrevista semiestructurada en relación con el contenido de la planificación, después procedimos a videograbar las clases, aplicar una segunda entrevista semiestructurada (después de la aplicación de la planificación) y, al final, solicitar al profesor en formación que realice un documento de análisis de la práctica; éste último se plantea en la licenciatura a partir de la elaboración analítica y reflexiva de la docencia con el propósito de mejorar la práctica.

El análisis de contenido (Flick, 2004; Fox, 1981) nos permitió realizar un análisis cualitativo de los datos. De acuerdo con Fox (1981), el análisis de contenido "se define como un procedimiento para la categorización de datos verbales o de conducta, con fines de clasificación, resumen y tabulación" (p. 709). En este caso, este procedimiento de categorización se aplica a los datos convertidos en texto a partir de las diferentes fuentes (Flick, 2004). El proceso del análisis de contenido está integrado por momentos: identificación de unidades de análisis, definición de categorías que se van a emplear, codificación de las unidades de análisis correspondientes a cada categoría y análisis de los datos donde se puede interpretar en función de las preguntas de investigación (Fox, 1981).

En esta investigación, las tareas diseñadas por Israel para abordar la noción de razón en un grupo de quinto grado de educación primaria, se convierten en la unidad de análisis en las fuentes de datos recuperadas para dar seguimiento a la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor en formación inicial. El concepto de tarea como unidad de análisis lo acuñamos de Stein y Smith (1998), quienes definen una tarea como "*a segment of classroom activity that is devoted to the development of a particular mathematical idea*" (p. 269). Una vez que definimos las unidades de análisis de las fuentes de datos recuperadas, avanzamos en la identificación de las categorías. En este estudio, las categorías que empleamos emergen de los dominios y subdominios del MTSK (Tabla 1).

En seguida presentamos el análisis y los resultados del Conocimiento Especializado de Israel para enseñar la noción de razón en función de algunas de las tareas diseñadas en su planificación.

## Identificación y caracterización del Conocimiento Especializado de Israel

Organizamos el conocimiento matemático y didáctico del contenido evidenciado por el profesor en formación inicial Israel, respecto de la noción de razón, en función del orden cronológico de algunas de las tareas que incluye en su planificación (P). Las tareas se identifican agregando números consecutivos a las líneas del documento de la planificación. Planteamos tres apartados principales: elementos que contextualizan el diseño de tareas, tareas de apertura y tareas del desarrollo de la planificación. En este artículo nos centramos en las tareas de desarrollo.

Tabla 1. Categorías del MTSK (SIDM, 2016)

| | **Subdominios** | **Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:* | |
|---|---|---|---|
| **Conocimiento matemático** | **Conocimiento de los tópicos KoT** | Procedimientos | *¿Cómo se hace?* |
| | | | *¿Cuándo puede hacerse?* |
| | | | *¿Por qué se hace así?* |
| | | | *Características del resultado* |
| | | Definiciones[2], propiedades y sus fundamentos[3] | |
| | | Registros de representación | |
| | | Fenomenología y aplicaciones | |
| | **Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM[4]** | Conexiones de complejización | |
| | | Conexiones de simplificación | |
| | | Conexiones transversales | |
| | | Conexiones auxiliares | |
| | **Conocimiento de la práctica matemática KPM[5]** | *Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos* | |
| | | *Formas de validación y demostración* | |
| | | *Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal* | |
| | | *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas* | |
| | | *Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)* | |
| | | *Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones* | |
| **Conocimiento Didáctico del Contenido** | **Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM** | Teorías de aprendizaje[6] | |
| | | Fortalezas y dificultades | |
| | | Formas de interacción con un contenido matemático | |
| | | Intereses y expectativas | |
| | **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT** | Teorías de enseñanza[7] | |
| | | Recursos materiales y virtuales | |
| | | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | |
| | **Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS** | Expectativas de aprendizaje | |
| | | Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado | |
| | | Secuenciación con temas anteriores y posteriores | |

En las tareas de desarrollo se presentan algunas subtareas con diferentes objetivos de aprendizaje en relación con la enseñanza de la noción de razón. En este caso, identificamos y caracterizamos el Conocimiento Especializado de Israel a partir de algunas tareas de desarrollo [P_Israel_2. 67-76]. Iniciamos con la caracterización del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) de Israel para luego establecer sus relaciones con otros conocimientos.

En los siguientes apartados identificamos y caracterizamos el Conocimiento Especializado de Israel en función de la información que proporcionan las entrevistas semiestructuradas (1 y 2), las videograbaciones de clases y el documento de análisis de la práctica elaborado por el profesor en formación. En particular, destacamos los indicadores de evidencias de conocimiento con negrita (e. g. **KoT_Definiciones, propiedades y sus fundamentos (1)**), mientras que los indicadores de indicios de conocimiento con cursiva (e. g., *KoT_Definiciones, propiedades y sus fundamentos (1)*).

## Tareas de desarrollo: Conocimiento Especializado de Israel

En este apartado, avanzamos en la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos y didácticos de Israel en las subtareas 3.2 de desarrollo. En la Figura 2 presentamos el fragmento de planificación de Israel donde plantea estas subtareas.

**Hoja de trabajo 2**
Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda "Fiesta Alegre" le rentaron una mesa "chica" para 130 personas y en la tienda "Todo para tu fiesta" le rentaron una mesa "grande" para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

| | Mesa "Chica" | Mesa "Grande" |
|---|---|---|
| Número de personas | 117 | 416 |
| Número de asientos | 130 | 520 |

¿Qué mesa se encuentra más llena?

Para saber qué tan llena se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al número de asientos.

Grado de aglomeración = Número de personas ÷ Número de asientos

Cantidad que está siendo comparada — Cantidad de referencia

Encuentra qué tan cerca están de agotar su capacidad las mesas.

Mesa chica 117 ÷ 130 = ☐

Mesa grande ☐ ÷ ☐ = ☐

Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente gráfico.

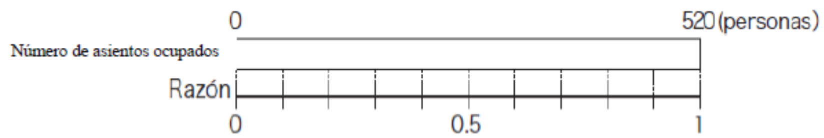


Figura 2. Subtareas 3.2. Tareas para la enseñanza de la noción de razón

Como podemos observar en la Figura 2, la subtarea 3.2 está integrada por tres subtareas: 3.2.1., la renta de mobiliario para la fiesta que realizará el Alcalde, donde destaca la tienda "Fiesta Alegre" y "Todo para tu fiesta", así como la capacidad de asientos y el número de personas que se encuentran sentadas en cada una de ellas. De ahí que, en un primer momento, el propósito es identificar qué mesa se encuentra más llena. En la subtarea 3.2.2., se pide a los alumnos que determinen el grado de aglomeración en cada mesa, es decir, qué mesa se encuentra más llena. Al final se pide a los alumnos que identifiquen el grado de aglomeración de la mesa grande en una recta numérica. En la entrevista semiestructurada

2 preguntamos a Israel en qué materiales se apoyó para diseñar sus actividades y menciona [AP_Israel_**KMT_Recursos materiales y virtuales_**1. 143-150]:

> Israel: algunas ideas y situaciones en las que me basé fue la actividad de las mesas, donde se menciona que había una mesa chica y una mesa grande. Se decía la capacidad de cada una de ellas y la cantidad de personas sentadas, esto con el propósito de identificar cuál de las dos mesas está más llena. Al final, viene una comprobación, decía que dibujara o sacara el resultado de dividir, lo representara en una gráfica y, se identificara, cuál mesa estaba menos llena. Luego, se hiciera como una analogía al realizar lo mismo con la otra mesa, para hacer una comparación; eso lo tomé de los libros japoneses, el contexto lo cambié porque todo giraba en torno a una feria.

En este fragmento de entrevista identificamos que **Israel evidencia conocimiento del KMT en relación con recursos materiales (1)**. Conoce que los libros japoneses (Isoda & Cedillo, 2012) que se revisan en la escuela normal proporcionan información sobre el tipo de tareas que se pueden diseñar para trabajar la razón como una comparación en contextos de parte-todo. Es importante mencionar que Israel señala que en el diseño de sus actividades toma como referente las propuestas de los libros japoneses, pero realiza algunas modificaciones en función del contexto inicial de su planificación: una feria. Sin embargo, es importante que señalemos que el tipo de tarea que plantea el profesor en formación inicial no se sitúa en un escenario real, en particular nos referimos a la cantidad de personas que señala pueden ocupar una mesa: 130 y 520. A pesar de esto, los alumnos se mantienen interesados en la realización de la actividad.

A partir de la planificación de Israel identificamos que organiza las subtareas 3.2 en función de una situación didáctica, donde el saber que está en vías de construcción es "la razón" bajo la acepción de "el grado de aglomeración". En el documento de análisis de la práctica (Figura 3), menciona posibles dificultades que pueden tener los alumnos al abordar temáticas como las descritas [AP_Israel_**KFLM_Dificultades_**1. 444-457].

> Abordar estos conceptos (razón, fracción y grado de aglomeración), posiblemente no muy comunes para los niños, debe hacerse con cautela, en el sentido de no confundirlos y crear posibles obstáculos epistemológicos. Al respecto, Centeno (1997) dice que:
> Se llaman obstáculos epistemológicos a estas concepciones que son constitutivas del conocimiento. Como tales dependen únicamente del concepto mismo, son inherentes a la noción a que se refieren y, por consiguiente, cualquiera que desee adquirir esa noción deberá superar esos obstáculos. No es posible prescindir de los obstáculos epistemológicos, puesto que superarlos forma parte del conocimiento (p. 145).
> Claramente no se pretende que el niño memorice estos conceptos en la actividad, pero sí se considera importante que al menos los conozcan y tengan por más mínimo que sea, dominio de ellos. En esta actividad al tocar estos conceptos, los niños sí mostraron cierto grado de confusión respecto a qué hacen alusión exactamente, mi desafío fue encaminar hacia el entendimiento […]

Figura 3. Fragmento de documento de análisis de la práctica: tareas de desarrollo

De manera general, identificamos que *Israel presenta indicios de conocimientos del KFLM_Dificultades (1)*, conoce que los obstáculos epistemológicos de razón, fracción y grado de aglomeración pueden suscitar confusiones en los alumnos durante la resolución de las subtareas. En este caso, Israel no contextualiza los obstáculos epistemológicos que se pueden presentar en estas subtareas. Después de que Israel presenta en su planificación las subtareas de la hoja de trabajo 2, agrega una fase de acción (Figura 4) [P_ Israel_**KMT_Teorías de enseñanza_**1. 200-203].

*Fase de acción:*
- Una vez que se entregó la hoja de trabajo 2, los alumnos comienzan a realizar conjeturas mentales y se espera que el trabajo en equipo trate de brindar más ideas para resolver los problemas.

Figura 4. Fragmento de planificación: tareas de desarrollo

En este fragmento Israel destaca la fase de acción como el momento en que los niños resuelven las subtareas de la hoja 2. Así, **Israel evidencia conocimiento de KMT en relación con teorías de enseñanza (1)**; situación que retomamos en la entrevista semiestructurada 1 para que Israel mencione el propósito de las subtareas 3.2. [ES1_Israel_**KMT_ Tareas_**3.2. 692-707]:

Israel: En las hojas anteriores me enfoqué más en trabajar la razón como comparación. Aquí, pretendo que la razón se trabaje en forma de cociente o los resultados de la acción de dividir. Por ejemplo, dice: "van a rentar un mobiliario chico o de mesa chica y uno de mesa grande". Cada mobiliario tiene [...] como dijimos que en la fiesta iba a asistir mucha gente, le tuvieron que rentar de todo tipo de mesas y sillas. Entonces, dijimos que en la mesa chica, hay una capacidad de 130 asientos para que se sienten 130 personas (escribe chica 130) y, en la mesa grande, hay una capacidad para 520 personas (escribe mesa grande 520). Aquí, espero que los alumnos analicen un poquito lo que es el número de asientos ocupados y la capacidad total (escribe en el pintarrón "número de asientos ocupados" y "capacidad total").

A partir de lo anterior, identificamos que Israel posee conocimiento del KMT en relación con **tareas** (3.2). En este caso, conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cociente en contextos de parte-todo (ocupación-capacidad de dos mesas).

En los siguientes párrafos identificamos los conocimientos que Israel tiene sobre los posibles procedimientos que los alumnos pueden emplear para resolver las subtareas 3.2. de la hoja de trabajo 2 [P_Israel_**KMT_Tareas_**3.2.1.165-176].

En la subtarea 3.2.1. Israel retoma la situación inicial de su planificación "La gran fiesta", pero hace referencia a dos tiendas de renta de mobiliario "Fiesta alegre" y "Todo para tu fiesta" que acompaña con una tabla donde se muestra la cantidad de asientos que tiene cada mesa y el número de personas sentadas (Figura 5). En función de este contexto, cuestiona a los alumnos sobre qué mesa se encuentra más llena.

Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda "Fiesta Alegre" le rentaron una mesa "chica" para 130 personas y en la tienda "Todo para tu fiesta" le rentaron una mesa "grande" para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

| | **Mesa "Chica"** | **Mesa "Grande"** |
|---|---|---|
| **Número de personas** | 117 | 416 |
| **Número de asientos** | 130 | 520 |

¿Cuál mesa se encuentra más llena?

___

Figura 5. Fragmento de planificación: tareas de desarrollo

Durante la entrevista semiestructurada 1 preguntamos a Israel sobre la posible respuesta que los alumnos darían a la interrogante de la tarea anterior [ES1_Israel_ **KFLM_Formas de interacción con un contenido matemático**_l. 708-726]:

E: Si el propósito es que los alumnos contesten cuál mesa se encuentra más llena, ¿qué van a decir los niños?

Israel: Creo que los niños ven a decir que la mesa que se encuentra más llena es la mesa grande, aunque no se les plantea que resuelvan con una operación, división o suma, simplemente de la observación. Creo que los niños van a mencionar "dice qué mesa se encuentra más llena", van a decir la mesa que tiene cuatrocientos dieciséis [...] dijimos que tienen la capacidad de ciento treinta y quinientos veinte, sin embargo, en esta mesa se sentaron ciento diecisiete personas (escribe abajo del 130 el número 117) y en la otra mesa cuatrocientos diecisiete (escribe abajo del 520 el número 416). Entonces aquí dice, ¿cuál mesa está más llena? Van a decir en esta mesa (señala el número 416) porque con más que en ésta (señala 117). Puede existir la posibilidad de que algunos niños tomen en cuenta esta cantidad de referencia (señala 130 y 520) que les estoy dando; pueden decir está más llena la mesa chica (señala 117) porque quizá sólo faltaron de sentarse lo que son trece personas y puede que los niños van a decir porque aquí faltan de sentarse ciento cuatro personas (señala el número 520). Entonces, en esta mesa faltaron más personas (señala la mesa grande) que en ésta (señala la mesa chica), por lo cual, casi está llena. Pueden existir otros niños que este dato de referencia no lo van a ver, sólo van a identificar la cantidad más grande y, por eso van a decir, está más llena la mesa donde se sentaron más personas, sin embargo, el propósito es que tomen en consideración estas dos (señala 520 y 416).

En función de su respuesta identificamos que **Israel muestra conocimiento del KFLM en particular de formas de interacción con un contenido matemático (1)**, conoce que para seleccionar la mesa más llena los alumnos pueden recurrir a la observación para identificar la mesa que tiene mayor cantidad de personas sentadas (416) en comparación con la mesa chica (117). También existe otra **evidencia de conocimiento de Israel en relación con el KFLM, sobre formas de interacción con un contenido matemático (2)**. Conoce que los alumnos que manifiesten que la mesa chica se encuentra más llena van a tomar como referencia la capacidad total de las mesas (130 y 520) y la cantidad de personas sentadas (117 y 416). Así, pueden identificar que en la mesa chica faltan de sentarse trece personas y en la mesa grande ciento cuatro.

Después de que Israel nos externó las posibles respuestas que darían los niños a la pregunta, le cuestionamos sobre la respuesta correcta, situación que nos brinda conocimientos de algunas dificultades que cree pueden tener los alumnos [ES1_Israel_**KMT_Tareas**_3. 731-743]:

| | |
|---|---|
| E: | ¿Cuál sería la respuesta correcta? |
| Israel: | La correcta sería que la mesa chica está más llena que la mesa grande. Aquí quise hacer un poco más conflictivo por la tendencia a irse por cantidades grandes, porque igual pasa lo mismo con la fracción, decimos, por ejemplo, ¿qué vale más un medio o un cuarto? (escribe en el pintarrón ½ y ¼). Casi siempre pasa lo mismo, cuando empezamos a trabajar las fracciones dicen "un cuarto vale más que un medio porque el cuatro es más grande que un dos". |
| E: | ¿Usted cree que esas son algunas de las dificultades que pueden tener los alumnos al resolver ese planteamiento? |
| Israel: | Si, existe casi siempre la tendencia de irse . . . cuando decimos que está más lleno, tendemos a irnos por las cantidades más grandes, por eso creo que los niños van a remitirse a eso, casi siempre se fijan en las cantidades cuando no hay un análisis o reflexión de los datos. |

Como podemos observar, Israel menciona algunas dificultades que tienen los alumnos al trabajar con números fraccionarios, por lo cual, decide agregar cantidades grandes y pequeñas al contexto de las mesas con el propósito de que determinen la mesa que se encuentra más llena. Así identificamos que: **Israel tiene conocimiento del KMT de tareas para afrontar las dificultades de los alumnos, es decir, un KMT claramente ligado a un KFLM (3)**. Él, conoce que algunos alumnos tienen dificultades para identificar cuando una cantidad es mayor (fracciones), o en este caso, cuál mesa está más llena, pues se dejan guiar por las cantidades mayores sin analizar su función en la situación que se describe.

En la Figura 6, presentamos la subtarea 3.2.2, donde Israel introduce el grado de aglomeración [P_ Israel_**KMT_Tareas** _3.2.2. 177-191].

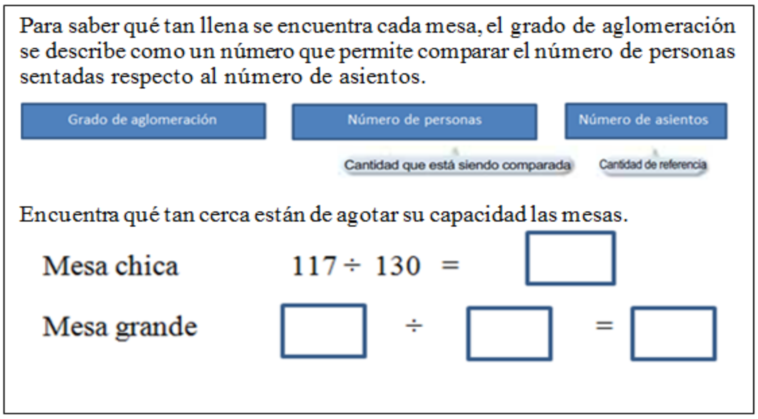


Figura 6. Fragmento de planificación

En la subtarea 3.2.2. Israel presenta el grado de aglomeración como un número que permite comparar el número de personas (cantidad que está siendo comparada) y el número de asientos (cantidad de referencia), y plantea frente a cada mesa una división; en la mesa chica está 117 ÷130, la cual se requiere completar. Respecto a la mesa grande sólo presenta los recuadros para agregar información. En la entrevista semiestructurada 1, Israel nos señaló que la respuesta correcta era la mesa chica, y nos brinda información sobre el propósito de la subtarea anterior [ES1_ Israel_**KMT_Tareas**_3.2.2. 744-749]:

E: Usted dice que la respuesta correcta es la mesa chica, ¿qué realizó para definirlo?

Israel: Muy bien, abajo en la siguiente actividad dice "para saber qué tan llena se encuentra cada mesa", que es el grado de aglomeración, se describe como el número que permite comparar . . . aquí por ejemplo, tenemos lo que es aglomeración dice para saber . . . por ejemplo, los niños saben que es la mesa chica o la mesa grande, pero abajo es una forma de comprobación para saber si ellos estuvieron correctos o si no para ver cómo se le hace.

En la presentación de las subtareas 3.2.1. y 3.2.2, identificamos que Israel pretende introducir el concepto de aglomeración; en la primera contextualiza los datos y en la segunda presenta el algoritmo de la división para encontrarlo. Así, identificamos que *Israel muestra indicios de conocimiento del KoT, en particular, conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos (1)*, es decir, conoce el grado de aglomeración como la situación que permite determinar qué tan lleno se encuentra un objeto y, al preguntar a Israel sobre cómo abordaría la subtarea 3.2.2., donde maneja el grado de aglomeración externa, señala lo siguiente [ES1_ Israel_**KMT_Tareas**_3.2.2. 760-780]:

E: ¿Esta actividad la van a resolver al interior de los equipos?

Israel: Sí, al interior de los equipos.

E: Van a leer lo que viene "para saber qué tan lleno está se encuentra . . ." después de que visualicen esta información viene lo de grado de aglomeración, ¿usted se los va a explicar hasta la fase de institucionalización o mientras estén resolviendo la actividad en los equipos va a pasar al lugar de los estudiantes por si surgen inquietudes o qué va a hacer?

| | |
|---|---|
| Israel: | En ese sentido, voy a estar monitoreando a los alumnos para identificar cómo lo están trabajando, por ejemplo, aquí mencionábamos que dice "el grado de aglomeración se describe como el número que permite comparar . . ." aquí, por ejemplo, mencionamos uno de los conceptos clave, más bien las palabras claves, que es la razón, que es esa comparación y dice "número de personas sentadas respecto al número de asientos", aquí nos permite tener de una forma más gráfica esa comparación y dice "grado de aglomeración es igual al número de personas . . ." esa es la cantidad que está siendo comparada con un número que damos de referencia, por ejemplo, aquí dice "encuentra qué tan cerca están de agotar la capacidad esas mesas . . ." y, por ejemplo, aquí menciona que la mesa chica . . . esta actividad la quise meter porque se presta mucho en números de decimales cerrados, entonces aquí se expresa muy bien lo que es la razón como cociente, esa forma de comparar. Por ejemplo, aquí lo que se pide a los niños está más sencillo son ciento diecisiete sobre ciento treinta (escribe 117/130) y está un cuadrito en blanco, indica que los niños anoten lo que obtuvieron, no creo que exista algún inconveniente porque se les está dando qué deben de utilizar y luego por ejemplo en la mesa grande . . . |

Israel establece algunas relaciones entre grado de aglomeración y razón, situación que nos permite identificar que **Israel tiene evidencia de KMT en relación con tareas (3.2.2.), conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cocientes (parte-todo) a través de la identificación del grado de aglomeración** en una situación determinada. Respecto a las divisiones indicadas en los recuadros de la subtarea 3.2.2., Israel destaca [ES1_Israel_*KMT_Estrategias*_1_1.781-788]:

| | |
|---|---|
| E: | ¿Los alumnos van a colocar los datos? |
| Israel: | Si, es lo interesante, quiero que se fijen en lo que tienen de referencia en los cuadritos que están en negro, por ejemplo, que es el número de personas, tengo que buscar cuál es el número de personas; éste se les da como una pequeña referencia (señala 117÷130=0,9), para ver si lo hacen igual (señala las cantidades de la mesa grande). En el primer cuadrito pues es el número de personas que son cuatrocientas, en cuánto lo vamos a dividir, pues en el número de asientos que son quinientos veinte, aquí nos da cero punto ocho (escribe 416÷520=0,8) y para más adelante ver qué es lo que quiere decir eso. |

Identificamos que *Israel muestra indicios de conocimientos del KMT en relación con estrategias (1)*, es decir, conoce la información que se presenta en recuadros de la subtarea 3.2.2., el número de personas y asientos de la mesa chica sirve de referencia para que los alumnos ubiquen ambas cantidades en relación con los datos de la mesa grande; así pueden obtener el cociente correcto en cada división. Como última subtarea de la hoja de trabajo 2, presentamos la subtarea 3.2.3. sobre la representación gráfica de razones en una recta numérica [P_Israel_**KMT_Tareas**_3.2.3.] en la Figura 7.

Expresa el grado de aglomeración de la mesa grande coloreando el siguiente gráfico.

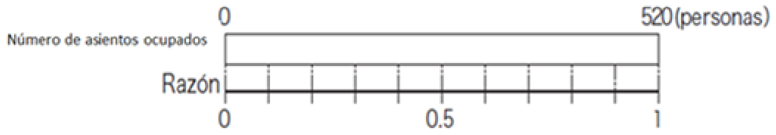


Figura 7. Fragmento de planificación: representación gráfica de razones

En la subtarea 3.2.3., al igual que en la subtarea 3.2.2., Israel recupera el concepto de grado de aglomeración para hacer referencia a la razón. En el caso de la subtarea 3.2.3., Israel solicita representen en una recta numérica la razón entre el número de asientos ocupados y personas en la mesa grande. Cabe mencionar que los alumnos realizarán esta subtarea después de la presentación de la diapositiva 4 que señala en la fase de institucionalización. Así, identificamos que **Israel muestra evidencia de conocimiento del KMT en relación con tareas (3.2.3.)**, conoce tareas para trabajar la representación del grado de aglomeración en una recta numérica.

En la planificación, una vez que Israel enuncia la consigna 2 que corresponde a las subtareas de la hoja de trabajo 2, describe la fase de acción como el momento en que los alumnos se inician en la resolución de las subtareas. Enseguida identifica las fases de formulación-validación (Figura 8) [P_Israel_**KMT_Teorías de enseñanza**_2. 204-210].

*Fase de formulación-validación:*
- Se pedirán participaciones a los equipos para confrontar las respuestas que dieron a las preguntas y qué les permitió llegar a esos resultados. Pueden pasar al frente para representarlas en el pizarrón, el resto de los alumnos deben estar atentos en la participación de sus compañeros para que afirmen si es correcto el mensaje que se emite o si no lo es. También se abrirá el espacio al debate para confrontar la diversidad de casos que permitieron llegar a lo deseado.

Figura 8. Fragmento de planificación: fase de formulación-validación

En este fragmento de planificación, Israel evidencia conocimiento didáctico en relación con las teorías de enseñanza de la matemática, a partir de la información en las entrevistas semiestructuradas. En este sentido, Israel evidencia conocimiento de que ambas fases están muy relacionadas, sin embargo, deben separarse, lo cual no logró modificar en la planificación. Por ello en este momento las rescatamos con esa aclaración. En la entrevista semiestructurada 1 menciona [ES1_ Israel_**KMT_Teorías de enseñanza**_2.789-791]:

| | |
|---|---|
| E: | Ahora la fase de formulación y la fase de validación son en función . . . |
| Israel: | En función de cómo lo hicieron, cuál mesa está más llena que la otra . . . la segunda, la socialización y validación de los procedimientos . . . |

En las subtareas de la hoja de trabajo 2, **Israel evidencia conocimiento del KMT sobre teorías de enseñanza (2)** cuando expresa que recurre a las fases de formulación y validación, donde describe que la planificación se actualiza en función de las situaciones que maneja en dichas subtareas y, además, relaciona la fase de formulación con lo que los alumnos hicieron para identificar cuál mesa está más llena, mientras que la fase de validación la relaciona con la socialización y validación de los procedimientos. Enseguida presentamos algunos fragmentos cuando los alumnos trabajan en equipo y se ubican en la fase de acción y formulación al resolver las subtareas de la hoja de trabajo 2; lo anterior con el propósito de identificar el conocimiento matemático y didáctico que Israel evidencia. A partir de la videograbación de clase, destacamos otro tipo de intervención de Israel [V2_ Israel_**KMT_Teorías de enseñanza**_3. 110-140]:

| | |
|---|---|
| | (Israel se acerca a otro equipo) |
| Israel: | ¿Ya leyeron? ¿Qué les dice el enunciado del problema? |
| Aa: | ¿Cuántas mesas tiene y para cuántas personas son? |
| Israel: | Y para cuántas personas son [...] luego, ¿qué te pregunta? |
| Aa: | ¿Qué mesa se encuentra más llena? La grande. |
| Israel: | Pero quiero que aquí le pongan el por qué . . . acuérdense que debemos de justificar nuestras respuestas, quiero que le pongan por qué ustedes dicen que en la mesa grande, pero antes de escribir, comenten entre ustedes, qué tal si alguien dice que en la mesa chica. |
| Aa: | Yo, yo, en la mesa grande, porque tiene más personas, |
| Israel: | Porque tiene más personas . . . Entonces ustedes comenten para que tengan todo igual, comenten qué pueden poner, ¿por qué dicen que en la mesa grande? |
| Aa: | En la mesa chica son 130 asientos, para 130 personas y en la mesa grande son 520 asientos para 520 personas. Pero ninguna de las dos mesas se llenó. En la chica están 117 personas y en la grande 416 personas . . . Entonces la cantidad más grande es 400 . . . |
| Israel: | Muy bien, pero aquí no está pidiendo cuál es la cantidad más grande, ¿qué les está pidiendo? |
| Aa: | ¿Cuál es la mesa que está más llena? |
| Aa: | Entonces estamos viendo la cantidad que es más grande para saber cuál mesa está más llena. |
| Israel: | Para saber cuál es la mesa que está más llena . . . está bien. También acuérdense que están viendo el número de personas, pero, ¿dónde dejan el número de asientos? |
| Aa: | ¿Qué? |
| Israel: | Ustedes sólo están viendo el número de personas, ¿y el número de asientos? |
| | (El equipo no responde) |
| Israel: | También observen cuántos asientos quedaron vacíos en cada mesa para que puedan ver . . . |
| Aa: | En la mesa chica quedaron 30 asientos. |
| Aa: | No es cierto. |
| Israel: | ¿30? ¿Qué podemos hacer en eso? |
| Aa: | No, porque si son 30-17, no quedaron 30 . . . |
| Israel: | Vean todo eso para que puedan contestar la pregunta. |

Aquí la intervención de Israel es más amplia, además de cuestionarlos sobre la información que proporciona el problema, inclusive cuando los alumnos mencionan que la mesa más llena puede ser la que tiene mayor cantidad de personas sentadas, él les dice que sólo están viendo el número de personas y no el número de asientos. A partir de lo anterior, en el documento de análisis de la práctica (Figura 9), Israel reflexiona sobre lo que sucede durante la resolución de las subtareas de la hoja de trabajo 2 [AP_Israel_**KMT_Teorías de enseñanza**_3. 579-592].

> El docente dentro de sus intervenciones debe tomar un papel de mediador dentro los procesos de aprendizaje y de esta forma llevar a cabo el conflicto cognitivo que se ha planteado desde el inicio. En el fragmento anterior se muestra parte del registro en donde el docente se acerca a una de las mesas de trabajo y dialoga con los integrantes haciendo hincapié en la justificación que se le debe dar al primer planteamiento, en esta intervención se realizan una serie de planteamientos del profesor hacia los alumnos, planteamientos que de una u otra forma reorientan la labor de sus educandos; por una parte se pudiera pensar que se les da la respuesta, por lo tanto, la situación careceria de un problema y de un desafio para los alumnos, entra en esta parte lo que Centeno (1997) menciona como la devolución del problema:
> La situación debe plantear un problema que el alumno no sabe resolver con los conocimientos que posee. Si el alumno supiera responder a la situación resolviendo el problema que se plantea, ésta no sería un problema y la situación tendría la condición de un ejercicio de aplicación, de refuerzo de consolidación, etc. (p. 116).

Figura 9. Fragmento del documento de análisis de la práctica

En función de este fragmento identificamos que **Israel tiene conocimiento del KMT, en particular de teorías de enseñanza (3)**. Conoce que cuando los alumnos se inician en la resolución de un problema matemático (subtareas 3.2.) el papel del docente consiste en realizar la devolución del problema a través de una serie de planteamientos (preguntas) que reorientan el trabajo de los mismos.

Después de presentar algunos conocimientos matemáticos y didácticos que Israel evidencia durante la fase de acción, formulación y validación, así como indicios de conocimientos, pasamos a abordar (Figura 10) los conocimientos que pone en juego en la institucionalización de las subtareas 3.2. de la hoja de trabajo 2 [P_Israel_**KMT_Teorías de enseñanza**_4. 211-216].

> *Fase de institucionalización:*
> A manera de conclusión de la hoja de trabajo 2 se les presentará a los alumnos la diapositiva 4, en donde a grandes rasgos se clarifica lo que estuvieron realizando al comparar la razón de dos cantidades. En este punto será necesario hacer mención del concepto de razón. Para retroalimentar lo institucionalizado se contestará el último ejercicio que quedó pendiente en la segunda hoja.

Figura 10. Fragmento de planificación: fase de institucionalización

Israel presenta en la fase de institucionalización una diapositiva donde identifican que en las subtareas de la hoja de trabajo 2 estuvieron comparando razones, y señala la necesidad de rescatar el concepto de razón (Figura 10). Aquí **Israel evidencia conocimiento del KMT en relación con teorías de enseñanza, en particular de la fase de institucionalización (4)**. Además, plantea que es hasta después de la presentación de esta diapositiva que los alumnos pueden dar respuesta a la subtarea 3.2.3., la cual se había restringido en la consigna 2. En la Figura 11 presentamos el contenido de la diapositiva 4 (lámina).

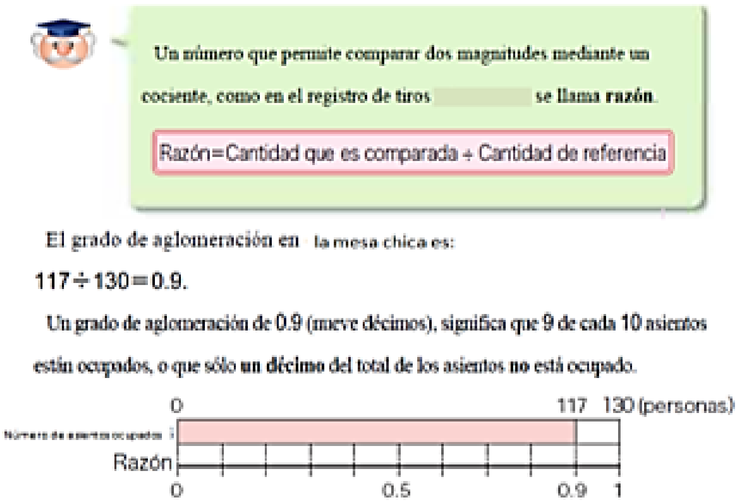


Figura 11. Diapositiva 4 (adaptada de Isoda & Cedillo, 2012)

En la diapositiva 4 (Figura 11), Israel inicia con la presentación de la definición de razón y el procedimiento que se puede realizar para determinar el grado de aglomeración. Así, identificamos que **Israel muestra evidencia del KoT sobre definiciones, propiedades y sus fundamentos (2)**. Conoce la razón como el número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente. También, **Israel muestra conocimiento del KoT en relación con procedimientos (1)**. Conoce que la razón es igual a la cantidad que es comparada entre la cantidad de referencia. Además, **Israel evidencia conocimiento relacionados con el KoT sobre procedimientos (2)**, es decir, conoce el grado de aglomeración en la mesa chica se obtiene a partir de la división de 117 ÷ 130, es decir, en función de la cantidad que es comparada (117) entre el valor de la cantidad de referencia (130). El valor obtenido, en este caso 0.9 (nueve décimos), se puede representar en una recta numérica donde se identifica que 9 de cada 10 asientos están ocupados o que un décimo del total de asientos no está ocupado.

En la Tabla 2, presentamos una síntesis de las evidencias e indicios de conocimientos de Israel en relación con la noción de razón.

Tabla 2. Indicadores de conocimiento de Israel

| | **Subdominios** | **Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:* | **Indicadores de conocimiento** |
|---|---|---|---|
| **Conocimiento matemático** | **Conocimiento de los tópicos KoT** | Procedimientos | **KoT_Procedimientos_1.** Israel conoce que la razón es igual a la cantidad que es comparada entre la cantidad de referencia, así conoce que el grado de aglomeración en la mesa chica se obtiene a partir de la división de 117 ÷ 130. |
| | | | **KoT_Procedimientos_2.** Israel conoce que 0.9 (nueve décimos) se obtiene de 117÷ 130 y se puede representar en una recta numérica donde se identifica que 9 de cada 10 asientos están ocupados o que un décimo del total de asientos no está ocupado. |
| | | Definiciones[8], propiedades y sus fundamentos[9] | *KoT_Definiciones, propiedades y fundamentos_1.* Israel conoce el grado de aglomeración como la situación que permite determinar qué tan lleno se encuentra un objeto. |
| | | | **KoT_Definiciones, propiedades y sus fundamentos_2.** Israel conoce la razón como el número que permite comparar dos magnitudes mediante un cociente. |
| **Conocimiento Didáctico del Contenido** | **Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM** | Fortalezas y dificultades | *KFLM_Dificultades_1.* Israel conoce que los obstáculos epistemológicos de razón, fracción y grado de aglomeración pueden suscitar confusiones en los alumnos durante la resolución de las subtareas. |
| | | Formas de interacción con un contenido matemático | **KFLM_Formas de interacción con un contenido matemático_1.** Israel conoce que los alumnos que seleccionan la mesa más grande pueden recurrir a la observación para identificar la mesa que tiene mayor cantidad de personas sentadas (416) en comparación con la mesa chica (117). |
| | | | **KFLM_Formas de interacción con un contenido matemático_2.** Israel conoce que los alumnos que seleccionan la mesa chica van a tomar como referencia la capacidad total de las mesas (130 y 520) y la cantidad de personas sentadas (117 y 416), donde pueden identificar que en la mesa chica faltan de sentarse trece personas y en la mesa grande ciento cuatro. |
| | **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT** | Teorías de enseñanza[10] | **KMT_Teorías de enseñanza_1.** Israel conoce la fase de acción como el momento en que los niños se inician en la resolución de las subtareas. |
| | | | **KMT_Teorías de enseñanza_2.** Israel conoce la fase de formulación con lo que los alumnos hicieron para identificar cuál mesa está más llena, mientras que la fase de validación la relaciona con la socialización y validación de los procedimientos. |
| | | | **KMT_Teorías de enseñanza _3.** Israel conoce que cuando los alumnos se inician en la resolución de un problema matemático el papel del docente consiste en realizar la devolución del problema a través de una serie de planteamientos (preguntas) que reorientan el trabajo de los mismos. |

| | | |
|---|---|---|
| | | **KMT_Teorías de enseñanza_4.** Israel conoce la fase de institucionalización como momento donde el profesor da a conocer las definiciones y procedimientos relacionados con los conceptos matemáticos que se abordan en la resolución de algunas subtareas, en el caso de la hoja de trabajo 2, la definición de razón y el procedimiento para obtener el grado de aglomeración. |
| | Recursos materiales y virtuales | **KMT_Recursos materiales_1.** Israel conoce que los libros japoneses que se revisan en la escuela normal proporcionan información sobre el tipo de tareas que se pueden diseñar para trabajar la razón como una comparación en contextos de parte-todo. |
| | Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos | **KMT_ Tareas_ 3.2**. Israel conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cociente en contextos de parte-todo (ocupación-capacidad de dos mesas). |
| | | **KMT_ Tareas_ 3.2.2.** Israel conoce tareas para trabajar la comparación de razones como cocientes (parte-todo) a través de la identificación del grado de aglomeración. |
| | | **KMT_Tareas_3.2.3.** Israel conoce tareas para trabajar la representación del grado de aglomeración en una recta numérica. |
| | | **KMT_Tareas_3.** Israel tiene conocimiento de tareas para afrontar las dificultades de los alumnos para identificar cuándo una cantidad es mayor (fracciones o cuál mesa está más llena, pues se dejan guiar por las cantidades mayores sin analizar su función en la situación que se describe). |
| | | *KMT_Estrategias _1.* Israel conoce que la información que se presenta en recuadros de la subtarea 3.2.2, respecto al número de personas y asientos de la mesa chica sirve de referencia para que los alumnos ubiquen ambas cantidades en relación con los datos de la mesa grande; así pueden obtener el cociente correcto en cada división. |

## Conclusiones

Las aportaciones de esta investigación se centran en la identificación y caracterización de diferentes indicadores de conocimiento en relación con categorías del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), en particular de la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, a partir del diseño de tareas de desarrollo para enseñar la noción de razón como una comparación de dos cantidades mediante un cociente, en un grupo de quinto grado de educación primaria. En este escenario, en las tareas que el profesor diseña y aplica, se favorece la enseñanza de la razón de tipo geométrica, misma que ubica las tareas en el contexto de la proporcionalidad, tal como lo plantea Block (2001) y Block et al. (2010), cuando estudian la noción de razón desde la proporcionalidad.

En el diseño de las subtareas de desarrollo, el profesor plantea algunas variables didácticas que definen el grado de complejidad de una subtarea en comparación con otra. En la primera subtarea, influyen algunos conceptos que en relación con lo noción de razón se trabajan en algunos materiales japoneses (Isoda & Cedillo, 2012). Así, la razón se aborda como sinónimo de grado de aglomeración, que es igual a la cantidad que está siendo comparada (número de personas) entre la cantidad de referencia (número de asientos). En el caso de la segunda subtarea, además de representar la razón de manera numérica, el profesor en formación pide a los alumnos que representen el cociente en una recta numérica, es decir, expresen su grado de aglomeración; dichas situaciones se fundamentan desde Isoda y Cedillo (2012), así como Cedillo et al. (2012).

En función de las tareas anteriores, emergen indicadores de conocimiento del profesor en relación con la teoría de las situaciones didácticas como una *Teoría de enseñanza*, lo cual aparece en Block (2001). Caso contrario, en Cedillo et al. (2012), donde el propósito es abordar la razón desde el estudio de clases, aunque en la bibliografía que se plantea en el programa de aritmética: su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2012), donde se aborda el estudio de la razón y las fracciones, también se hace presente la teoría de las situaciones didácticas.

En las tareas que el profesor plantea identificamos el estudio de la razón de tipo geométrica, sin embargo, en relación con el conocimiento que el profesor tiene de las posibles *formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático*, aparecen conocimientos referentes a la interacción de los alumnos con la razón de tipo aditivo, cuando externa que los alumnos pueden recurrir a las diferencias entre la cantidad comparada y la cantidad de referencia (para identificar cuál mesa se encuentra más llena). A pesar de que el profesor conoce que algunos de los alumnos, con el propósito de dar respuesta a las interrogantes de las tareas, pueden recurrir a obtener las diferencias entre las cantidades que se comparan de una razón, destaca la importancia de que los niños representen en una recta numérica el cociente (0.9), donde se le dé significado en función de su valor posicional (9 de cada 10 asientos están ocupados) (Cedillo et al., 2012).

En particular, en este estudio contribuimos al subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), en relación con la identificación y caracterización de la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, con mayor énfasis en lo que respecta a **tareas**, pues el diseño, aplicación y análisis que el profesor realiza para enseñar la noción de razón como una comparación de dos cantidades mediante un cociente (razón geométrica), constituye el referente para la identificación y presentación articulada de conocimientos matemáticos (definiciones, propiedades y sus fundamentos y, procedimientos) y didácticos del contenido (teorías de enseñanza, recursos materiales, tareas, formas de interacción y dificultades con un contenido matemático).

Respecto a la contribución de esta investigación en términos de metodología, nos permitimos citar que la diversidad de fuentes de información que empleamos como las entrevistas semiestructuradas, videograbaciones de clases y recuperación de diferentes documentos (planificación y análisis de la práctica), apoyan para obtener una cantidad mayor de datos que posibilitan encontrar evidencias de conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático del informante.

En correspondencia con el estudio de Ramírez y Block (2009), nuestra investigación se constituye como un diagnóstico que, desde la perspectiva teórica del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, da cuenta del conocimiento matemático y didáctico que un profesor en formación inicial evidencia cuando enseña la razón de tipo geométrica en el contexto de la proporcionalidad.

Por otra parte, en este estudio avanzamos en la identificación y caracterización de algunos indicadores de conocimiento de los subdominios del conocimiento matemático (e. g., KoT) y del conocimiento didáctico del contenido (e. g., KMT y KFLM), sin embargo, en el futuro requerimos trabajar en el refinamiento de los indicadores que identificamos del KoT, KMT y KFLM y avanzar en la descripción de indicadores de conocimiento de los subdominios del KMLS, KSM y KPM.

## Notas

[1] Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés.
[2] Los ejemplos de conceptos o definiciones forman parte de la imagen conceptual, por lo que se asocian a definiciones. Esto no significa que no se contemplen ejemplos en otras categorías. En particular, la inclusión del conocimiento de ejemplos en el KMT se refiere a su uso en la enseñanza.
[3] Se incluyen aquí las conexiones intraconceptuales.
[4] Queda pendiente reflexionar sobre la exhaustividad de las categorías, pues puede suceder que algunas conexiones interconceptuales no puedan asociarse a ninguna de las categorías consideradas.
[5] Se incluyen algunos indicadores de este subdominio, a falta de establecer su categorización.
[6] Pueden ser formales o personales.
[7] Pueden ser formales o personales.
[8] Los ejemplos de conceptos o definiciones forman parte de la imagen conceptual, por lo que se asocian a definiciones. Esto no significa que no se contemplen ejemplos en otras categorías. En particular, la inclusión del conocimiento de ejemplos en el KMT se refiere a su uso en la enseñanza.
[9] Se incluyen aquí las conexiones intraconceptuales.
[10] Pueden ser formales o personales.

## Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis doctoral no publicada). Université de Bordeaux-I, Bordeaux, France.

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. In R. Cantoral, O. Covián Chávez, R. M. Farfán Márquez, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 455 - 470). México: CLAME - Díaz de Santos.

Block, D., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2010) *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. Advance online publication. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V., Ramírez, M. E., & Vega, E. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal: Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética.* México: Pearson/SEP.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2003). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry.* Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva, Huelva, España. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, & M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.

Isoda, M., & Cedillo, T. (Eds.) (2012). *Matemáticas para la Educación Normal* - tomo V, vol. 2. Naucalpan de Juárez, México: Pearson/SEP.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In Ma. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall. Colección: Didáctica Primaria.

Mellado, V. (2003). Cambio didáctico del profesorado de ciencias experimentales y filosofía de la ciencia. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(3), 343-358.

Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: Un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática, 21*(1), 63-90.

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2012). *Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. Licenciatura en educación primaria. Programa del curso.* México: Autor.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1998). Theory, Practice, and the Education of Professionals. *The Elementary School Journal, 98*(5), 511-526.

SIDM (2016). Documento interno (no publicado), *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática.* Universidad de Huelva, España.

Sosa L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva, Huelva, España. http://hdl.handle.net/10272/4509

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada en los datos.* Colombia: Universidad de Antioquía.

Torres, R. (1999). Nuevo papel del docente ¿Qué modelo de formación y para qué modelo educativo?. *Revista Perfiles Educativo, 82*. http://ses2.sep.gob.mx/dg/dgespe/o_mater/otrosmat.htm

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.