Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas

Relations between the mathematical modelling and the inquiry processes from the perspective of mathematical learning

Gemma Sala Sebastià
Universitat de Barcelona
España
gsala@ub.edu

Vicenç Font
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Carlos Ledezma
Universitat de Barcelona
España
cledezar25@alumnes.ub.edu

Resumen. Este trabajo muestra los resultados de una investigación desarrollada para estudiar las evidencias de las relaciones que se establecen entre los procesos de modelización matemática y de indagación en la implementación de una secuencia didáctica codisciplinar de matemáticas e historia, con estudiantes de 13-14 años de un instituto de Badalona (Catalunya, España). Se planteó una situación problemática en un contexto real, un yacimiento arqueológico de la misma ciudad de los participantes, que les motivó a realizar una indagación donde desarrollaron diversos modelos para poder dar soluciones plausibles y argumentadas. Se analizaron los procesos de modelización y de indagación que emergieron en diferentes momentos de la implementación, los cuales se identificaron para establecer algunas conclusiones sobre la relación que existe entre ambos. Como hallazgos de este estudio se destaca que, por una parte, cuando los datos obtenidos de la indagación son susceptibles de ser matematizados, se dan procesos de modelización matemática y las respuestas que dan los estudiantes son más precisas y justificadas; y, por tanto, tal como se esperaba en la

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 30(1) 116-139
https://doi.org/10.48489/quadrante.23590
Received: January 2021 / Accepted: May 2021

planificación realizada, la secuencia didáctica presenta una cierta riqueza de procesos matemáticos, lo cual conlleva, en particular, una alta valoración de su idoneidad epistémica.
Palabras-clave: enseñanza codisciplinar; educación secundaria; historia; idoneidad didáctica; indagación; modelización matemática.

Abstract. This article presents the results of a study aiming to identify the relations that can be established between the mathematical modelling and the inquiry processes, based on the implementation of a co-disciplinary didactic sequence on mathematics and history, with students aged 13-14 from a secondary school in Badalona (Catalonia, Spain). A problem situation from a real context was posed about an archaeological site in the city of the participants. It motivated them to carry out an inquiry where they developed different models in order to provide plausible and argued solutions to the problem. The processes of modelling and inquiry that emerged at different moments of the implementation were analysed, seeking to establish possible conclusions about the relation between both processes. Concerning the findings, it is highlighted that when the data obtained from the inquiry process are able to be mathematised, processes of mathematical modelling occur and the answers given by the students are more precise and justified; therefore, as expected in the designed planning, the didactic sequence presents a considerable wealth of mathematical processes, which particularly entails a highly positive view on its epistemic suitability.
Keywords: co-disciplinary teaching; middle grades; history; didactic suitability; inquiry; mathematical modelling.

Introducción

Actualmente, es evidente el consenso entre la comunidad educativa acerca de que enseñar en contextos realistas, con un enfoque de indagación, es beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, Artigue y Blomhøj (2013) ponen de manifiesto la tendencia actual de incluir la *enseñanza basada en indagación* (en adelante, IBL, por las siglas de *Inquiry Based Learning*) en los distintos documentos curriculares, sobre todo en los que hacen referencia a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias. Encontramos diversos proyectos internacionales centrados en estudiar cómo promover este tipo de enseñanza, donde se evidencia la importancia que tienen la modelización matemática y científica en sus propuestas. Son ejemplo de ello los proyectos PRIMAS (Maaß & Doorman, 2013), MASCIL (Doorman, Jonker, & Wijers, 2016), FIBONACCI (Harlen, 2012a), entre otros. En esta línea, desde el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) se considera que realizar procesos de instrucción que fomenten la indagación y la modelización conlleva, a priori, expresado en términos de idoneidad didáctica (Breda, Font, & Pino-Fan, 2018; Breda, Pino-Fan, & Font, 2017), una alta idoneidad epistémica. Asimismo, se fomentan las conexiones extra-matemáticas, lo que implica una alta idoneidad ecológica y emocional.

El desarrollo de la modelización matemática es una práctica de enseñanza relevante para cualquier nivel educativo, ya que coloca la relación entre el mundo real y el matemático en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Tal y como afirma Blomhøj (2004), las actividades de modelización tienen potencial de motivación para que suceda el aprendizaje, y ayudan al estudiante a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir importantes conceptos matemáticos.

Dada esta tendencia a la incorporación de la modelización y la indagación en la enseñanza de las matemáticas, es pertinente preguntarse por cómo es la relación entre ambos procesos. Modelización matemática e indagación son procesos que tienen un *aire de familia* (Wittgenstein, 1953/1988), y se pueden combinar en la enseñanza de las matemáticas, tal y como lo afirman diversos autores (Artigue & Blomhøj, 2013; Maaß & Doorman, 2013; Maaß & Engeln, 2018). Todos ellos hacen referencia, tanto a la indagación como a la modelización, como actividades que se pueden desarrollar durante una misma práctica, pero no profundizan en cómo se relacionan ambas. Para conocer las relaciones que se establecen entre modelización matemática e indagación es necesaria una mirada conjunta de ambos procesos.

En este sentido, la investigación que realizamos trata, de entrada, de dar respuesta a diversas preguntas de investigación como, por ejemplo: cuando los alumnos se hallan inmersos en una indagación, ¿cuáles son los subprocesos del ciclo de indagación que desarrollan?, ¿y del ciclo de modelización?, ¿qué evidencias podemos encontrar de las acciones de los alumnos, que forman parte de los subprocesos del ciclo de modelización, y que parecen coincidir con los subprocesos del ciclo de indagación?

En definitiva, en nuestro estudio se realiza una mirada a la modelización matemática entendiéndola como un proceso relacionado con el de indagación. A partir del análisis de los datos de una implementación en un contexto escolar, se estudian las evidencias de estas relaciones, así como las sinergias que se producen entre ambos procesos y, también, cómo este tipo de propuestas pueden mejorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción.

En los siguientes apartados se expone, en primer lugar, una breve síntesis de los principales elementos del marco teórico de la investigación; a continuación, se presenta el análisis realizado sobre las relaciones entre modelización e indagación y sobre la idoneidad didáctica de la secuencia, a partir de su implementación, así como los resultados obtenidos; y, por último, se exponen las conclusiones.

Marco teórico

Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción

La noción de idoneidad didáctica propuesta por el EOS (Godino, Batanero, & Font, 2007) pretende responder a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos, y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Se trata de un constructo multidimensional que se desglosa en seis criterios de idoneidad didáctica (CID) parcial: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros (Font, Planas, & Godino, 2010). A su vez, los CID se desglosan en componentes y éstos en indicadores (Breda et al., 2017), como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Criterios y componentes de idoneidad didáctica

Criterio	**Componente**
Epistémico	Errores; Ambigüedades; Riqueza de procesos; Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; Alta demanda cognitiva
Interaccional	Interacción docente-discente; Interacción entre discentes; Autonomía; Evaluación formativa
Mediacional	Recursos materiales; Número de estudiantes, horario y condiciones del aula; Tiempo
Afectivo o emocional	Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones
Ecológico	Adaptación al currículo; Conexiones intra e interdisciplinares; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica

Los CID sirven, primero, para guiar los procesos de instrucción de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. A priori, los CID son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas"; a posteriori, sirven para valorar el proceso de instrucción implementado.

Los procesos de instrucción basados tanto en indagación como aquéllos que promueven la modelización matemática, presentan a priori una alta idoneidad didáctica (específicamente, alta idoneidad interaccional, afectiva, ecológica y epistémica). Por otra parte, las investigaciones realizadas sobre el desarrollo de ambos procesos, en sus resultados y conclusiones, afirman implícitamente haber conseguido una alta idoneidad, al menos en algunos de los CID (para el caso de la modelización matemática, véase Ledezma, Font y Sala Sebastià, 2021).

Modelización matemática

De acuerdo con el consenso que existe en la comunidad dedicada a su estudio, entendemos la modelización como un proceso para resolver un problema del mundo real con las matemáticas. Como afirma Blomhøj (2004), para llegar a obtener un modelo matemático se tiene que desarrollar, de manera implícita o explícita, el proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. Han aparecido diversas descripciones y conceptualizaciones de los procesos de modelización (Borromeo Ferri, 2006), aunque una de las más consensuadas en toda la comunidad se describe a partir del llamado ciclo de modelización, del cual coexisten distintas versiones (Blomhøj & Jensen, 2003; Blum & Leiß, 2007; entre otros). En este trabajo, nos centramos en los ciclos de modelización propuestos en los trabajos de Blomhøj y Jensen (2003) y Blomhøj (2004), así como en el de Borromeo Ferri (2018) desde la perspectiva cognitiva. En el ciclo descrito por Blomhøj y Jensen (2003) se incluye mención especial al dominio de indagación (Figura 1), un momento entre los subprocesos *formulación del problema* y *sistematización* de los datos. Según estos autores, la indagación suele tomar especial relevancia al inicio del proceso de modelización en los momentos cuando, dada la realidad a estudiar, se delimitan las tareas y cuestiones a tratar y se seleccionan las variables por considerar, hecho que llevará a la definición del sistema extra-matemático a estudiar.

Para estos autores, el proceso de modelización es entendido como un proceso dinámico, que en ningún caso debe entenderse de forma lineal, pues siempre toma la forma de uno de características cíclicas, donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de su uso llevan a una redefinición del modelo. El proceso de modelización matemática es descrito de forma analítica, y representado según se muestra en la Figura 1. Este proceso está compuesto de los siguientes seis subprocesos: (a) *Formulación del problema*, formulación de una tarea que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada; (b) *Sistematización*, selección de los objetos relevantes, relaciones, etc., del dominio de indagación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática; (c) *Matematización*, traducción de estos objetos y relaciones al lenguaje matemático; (d) *Análisis del sistema matemático*, uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones; (e) *Interpretación/Evaluación*, interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de la investigación inicial; y (f) *Validación*, evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

En su descripción, los autores insisten en la importancia de retornar a la indagación cuando llega el momento de interpretar la validez (subproceso (e) de los modelos matemáticos en el sistema considerado. Además, afirman que los datos empíricos y el conocimiento teórico (indicados mediante dos elipses en la Figura 1) concernientes al dominio de la indagación, son la base de todos los subprocesos del ciclo de modelización, estableciendo de este modo un claro vínculo entre indagación y modelización.

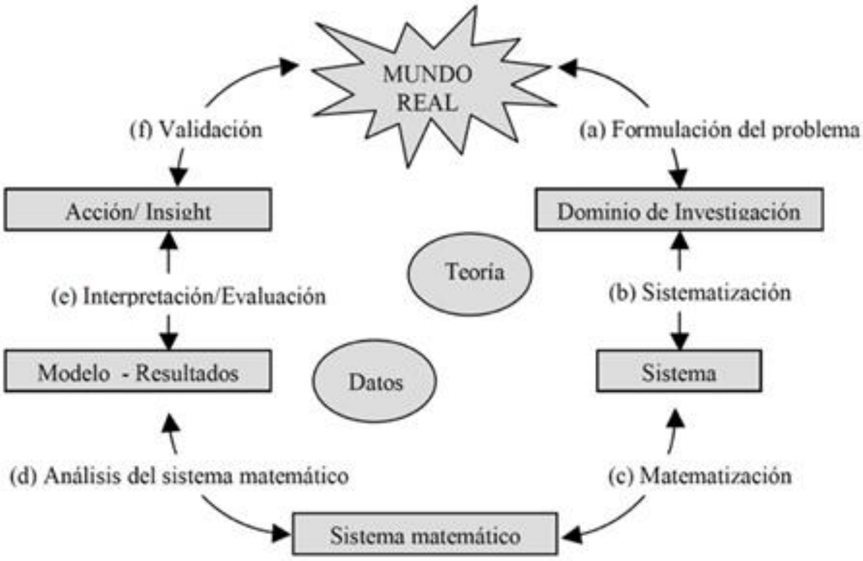
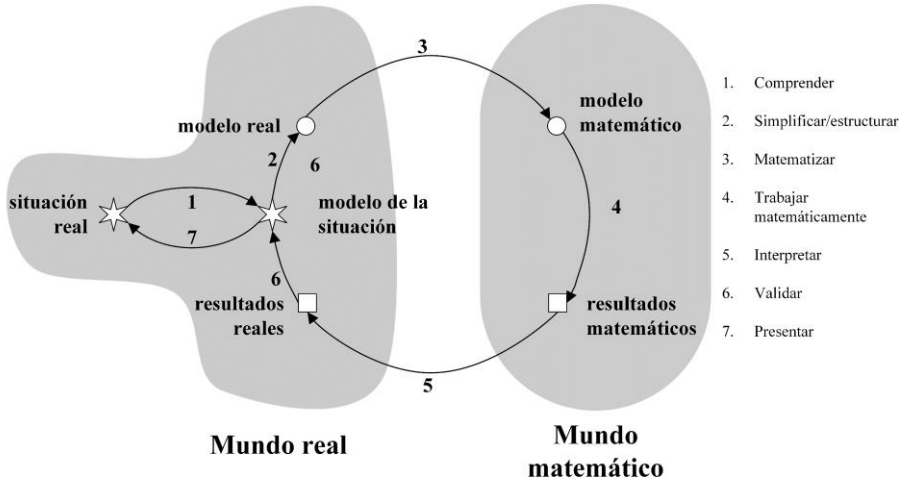
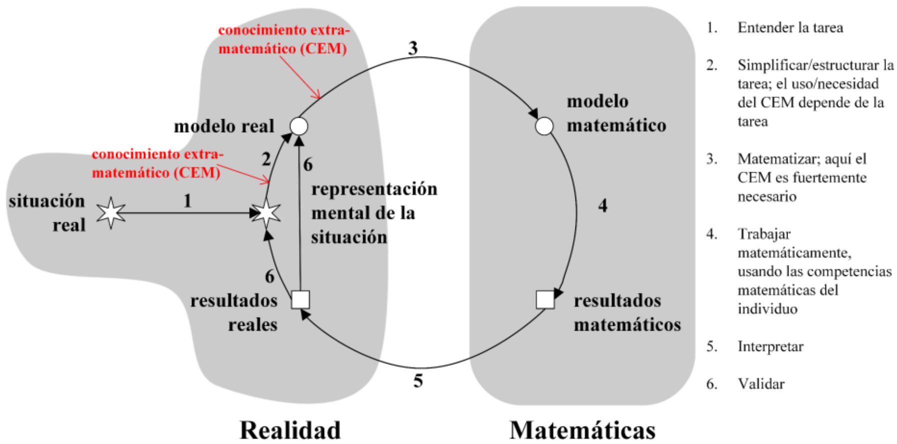


Figura 1. Modelo gráfico de un proceso de modelización matemática
(Adaptado desde Blomhøj, 2004, p. 148)

Junto con el ciclo de modelización propuesto, Blomhøj y Jensen (2003) también definieron la *competencia en modelización matemática* como el "ser capaz de, autónoma y conscientemente, llevar a cabo todos los aspectos de un proceso de modelización en un determinado contexto" (Blomhøj, 2004, p. 126, traducción propia), como los presentados en la Figura 1. En 2007, Blum y Leiß representan su concepción del proceso de modelización (Figura 2a), también como un proceso cíclico con subprocesos que se desarrollan entre el mundo real y el matemático. Este ciclo comienza con la *comprensión* de una situación problemática contextualizada en la realidad, que se *simplifica* para conseguir un modelo real. A continuación, este modelo puede evolucionar en su tránsito hacia el mundo matemático, gracias a la *matematización* de los datos, convirtiéndose en un modelo matemático con el que *trabajar matemáticamente* para obtener resultados matemáticos. Estos resultados, en su vuelta al mundo real, deberán pasar por un subproceso de *validación*, para adecuarse así a unos resultados reales que tengan sentido como solución al problema del mundo real desde el que se comenzó, para finalizar con el subproceso de *presentación* de estos resultados. Los subprocesos definidos por Blum y Leiß (2007) son muy próximos a los del ciclo de Blomhøj y Jensen (2003) y Blomhøj (2004), aunque los primeros autores establecen una clara diferenciación entre los subprocesos que pertenecen al mundo real con los que se realizan dentro del mundo matemático. En el caso del ciclo presentado por Borromeo Ferri (2018) (Figura 2b), desarrollado a partir del propuesto por Blum y Leiß (2007), por la influencia de su perspectiva cognitiva, se incorpora la fase de *representación mental de la situación* (RMS), entendida como el producto de la comprensión de la tarea, de la reconstrucción mental del problema (imágenes mentales y visuales de la situación real; estilos de pensamiento matemático), y de las asociaciones que haga el individuo con respecto a la situación propuesta (Borromeo Ferri, 2006; 2018).



(a)



(b)

Figura 2. Ciclo de modelización matemática según
(a) Blum y Leiß (2007, p. 225); (b) Borromeo Ferri (2018, p. 15)

En los tres ciclos anteriores (Figura 1 y Figura 2), el contexto real es presentado como un aspecto esencial para que se pueda desarrollar la modelización matemática. Blomhøj (2004) menciona, entre los subprocesos pertenecientes al mundo real, el dominio de la investigación como la fuente principal de datos que compondrán el modelo. Afirma que, en una situación de enseñanza, es el contexto el que tiene el potencial para desafiar a los alumnos a trabajar en todos los subprocesos de modelización, pero también advierte que no todos los contextos son igualmente adecuados. En la misma línea, Borromeo Ferri (2018) resalta la importancia e influencia del *conocimiento extra-matemático* (CEM) en la parte inicial de su ciclo, pero, sobre todo, durante el proceso de matematización, donde el modelo real transita desde el mundo real al mundo matemático para evolucionar hacia un modelo matemático, ya que este conocimiento condicionará buena parte de la resolución del problema.

Indagación

En el marco de la IBL, se han desarrollado muchas investigaciones que han dado resultados relevantes en relación con la conceptualización y el estudio de la indagación, tanto desde la perspectiva de la educación científica como de la matemática. Por ejemplo, el proyecto internacional de investigación, desarrollo y difusión MASCIL que, como su antecesor, el proyecto PRIMAS, tiene por objetivo avanzar en el uso generalizado de la IBL en matemáticas y ciencias, en los niveles de educación primaria y secundaria. Con ello, de forma innovadora, se pretende conectar la IBL con el mundo laboral para motivar el interés de los estudiantes en carreras de ciencias y tecnología (Maaß, Wernisch, Schäfer, & Aldorf, 2015).

Otro ejemplo a destacar, tal como afirman Dorier y Maaß (2014), es la investigación de Artigue y Baptist (2012) en el marco del Proyecto FIBONACCI, con el objetivo de promover e investigar sobre la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Basada en la Indagación, así como las relaciones entre ésta y la Educación Científica Basada en la Indagación. Estos autores definen la indagación como un término utilizado tanto dentro de la educación como en la vida cotidiana, para referirse a la búsqueda de conocimiento o información haciendo preguntas. Del mismo modo, Harlen (2012b) la identifica como el proceso de construir comprensión mediante la recopilación de evidencias para probar posibles explicaciones y las ideas detrás de ellas de una forma científica. Además, este autor propone un diagrama para representar este proceso (Figura 3) que, sin entrar en detalles de su descripción, presenta tres aspectos a destacar: su naturaleza cíclica, la importancia concedida tanto a la generación de *ideas más grandes* (entendidas como la generalización de ideas particulares provenientes de observaciones concretas) gracias a la indagación, como a las dificultades que pueden causar en el proceso algunas *ideas existentes* de los estudiantes.

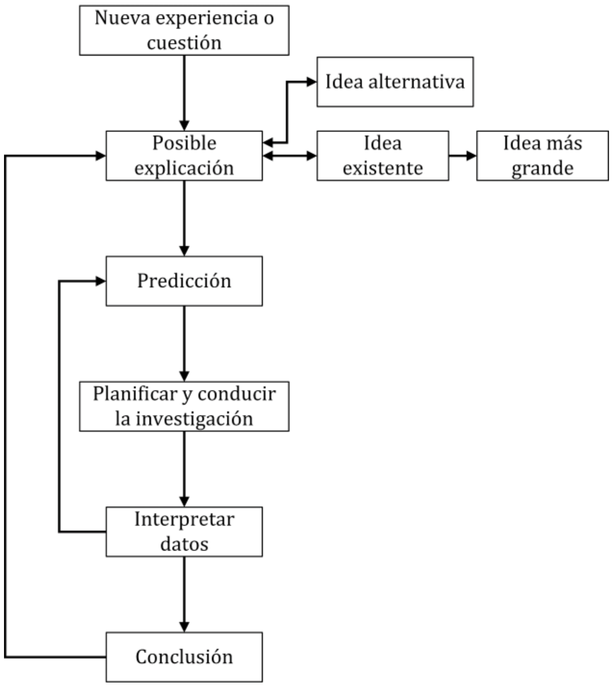


Figura 3. Diagrama del proceso de indagación de Harlen (2012b, p. 5, traducción propia)

Sala Sebastià (2016) se centró en caracterizar la competencia de indagación, contemplando además la perspectiva curricular nacional (Departament d'Educació, 2019). Uno de los resultados de esta investigación fue una tabla analítica (véase Sala Sebastià, 2016, p. 67; Sala Sebastià, Font, & Giménez, 2015, p. 489) de los siete subprocesos que constituyen el proceso de indagación.

Artigue, Dillon, Harlen y Léna (2012) describen el proceso de indagación como uno de características dinámicas –representado por Harlen (2012b) con el diagrama de la Figura 3, que muestra su carácter cíclico– y también, de forma análoga, Blomhøj y Jensen (2003), Blum y Leiß (2007) y Borromeo Ferri (2018), por su parte describen y representan el proceso de modelización matemática (Figura 1 y Figura 2) con similares características. De la misma manera, durante nuestra investigación sobre las conexiones entre modelización matemática e indagación se elaboró, para representar la conceptualización del proceso de indagación a partir de su caracterización, el diagrama que se muestra en la Figura 4. Se trata de la representación de un proceso que se concibe como cíclico que, al igual que en los diagramas presentados sobre el proceso de modelización, parte de una situación real y pretende mostrar el dinamismo que lo caracteriza. Puede que los estudiantes sólo realicen algunos de los subprocesos indicados y sus acciones las podríamos localizar avanzando y/o retrocediendo en el diagrama, en función de su nivel competencial y de los retos que ofrezca el contexto de la indagación.

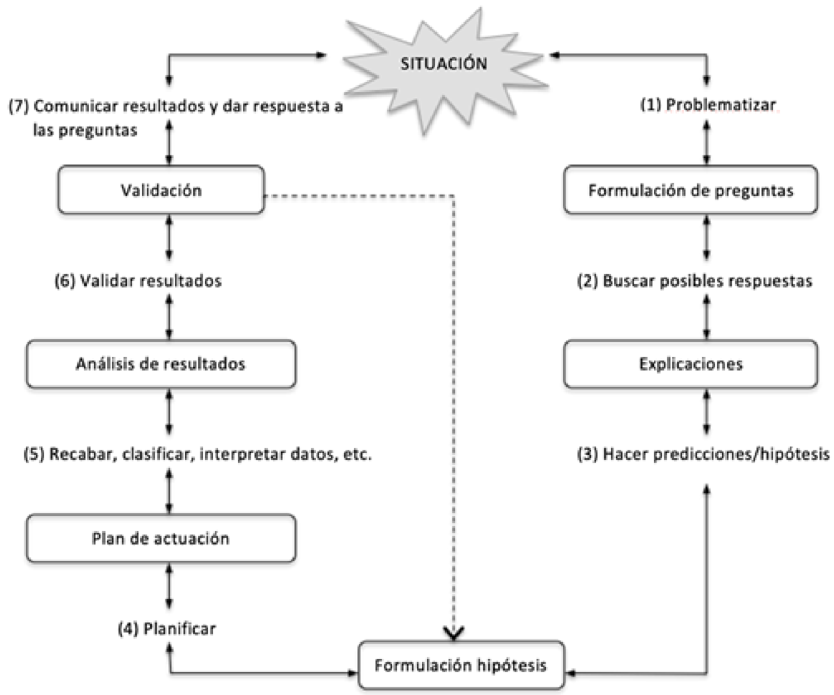


Figura 4. Diagrama del proceso de indagación a partir de Sala Sebastià (2016, p. 67)

Los subprocesos que caracterizan el proceso de indagación, basados en Sala Sebastià (2016, p. 67), son siete y se describen analíticamente de la siguiente forma: (1) *Problematizar*, traducir a preguntas la situación problemática presentada para poder transformarla en objeto de investigación; es imprescindible al inicio de la indagación, pero puede también ser necesario en un momento intermedio para poder seguir avanzando y encontrar respuestas parciales; (2) *Buscar posibles respuestas*, mostrar intencionadamente una actitud crítica, de duda, y contrastar la información que emerge (del contexto y de los trabajos de indagación en curso) con sus ideas previas, lo que le permite encontrar explicaciones y decidir si se debe continuar investigando; (3) *Hacer predicciones/hipótesis*, construir predicciones y/o hipótesis a partir de diferentes variables que identifica en la situación problemática, con el objetivo de contrastarlas; (4) *Planificar*, participar, organizar (y liderar) la comunidad de investigación de la que forma parte, proponiendo de forma justificada planificaciones flexibles y adaptables al curso de los trabajos de indagación; (5) *Recabar, clasificar, interpretar datos, etc.*, buscar, recoger, registrar y escoger, de entre todas las posibles fuentes, la información útil para la indagación; elaborar, analizar y valorar la información, creando conexiones entre ésta y las hipótesis planteadas, con la ayuda de las herramientas teóricas necesarias escogidas conscientemente; (6) *Validar resultados*, validar los resultados contrastándolos con las hipótesis formuladas y argumentar críticamente; en el caso de no-validación de la hipótesis, se contempla la posibilidad de buscar explicaciones alternativas en base a las evidencias y partiendo de formular nuevas hipótesis (en la Figura 4 se muestra con una flecha a rayas de retorno desde el rótulo de *Validación* hasta el rótulo de

Formulación de hipótesis); y (7) *Comunicar resultados y dar respuesta a las preguntas*, elaborar informes de indagación rigurosos, argumentando con los resultados las respuestas a las preguntas planteadas surgidas del contexto problemático, responder a cualquier tipo de pregunta sobre el trabajo de indagación llevado a cabo y sobre su impacto y limitaciones; reflexionar, individualmente y en grupo, sobre el propio trabajo y el trabajo en equipo.

Comparación entre indagación y modelización matemática

Diversos autores destacan los múltiples puntos de contacto entre el ámbito de indagación y de modelización (Artigue & Blomhøj, 2013; Maaß & Doorman, 2013; Maaß & Engeln, 2018). Por ejemplo, Harlen (2012b) aporta sus reflexiones sobre las semejanzas y las diferencias entre las experiencias de aula basadas en la indagación que fomentan la comprensión en ciencias, y las que fomentan la comprensión en matemáticas. Por un lado, si se hace una mirada desde la noción de idoneidad didáctica, coinciden en ambas experiencias la preocupación de establecer la idoneidad afectiva, cuidando que los estudiantes establezcan un compromiso por resolver un problema; la idoneidad interaccional, al promover el trabajo colaborativo, las discusiones y el diálogo, pudiendo considerar enfoques alternativos; y las idoneidades epistémica, cognitiva y ecológica, promoviendo el pensamiento crítico, la reflexión sobre el aprendizaje y la comunicación. En ambas aulas, el alumnado se dedica a responder preguntas o resolver problemas de los que no saben la solución y sobre los que desean encontrar la respuesta. Pero, en cambio, se observan diferencias en la forma de enfocar el trabajo, de abordar los problemas o preguntas, de buscar las soluciones, de basar su validación, y la naturaleza de las explicaciones. Además, una parte importante del proceso de indagación en las aulas de matemáticas consiste en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática. Se hace hincapié en que, desde la perspectiva de la educación matemática, el término *modelización* normalmente es usado en un sentido estricto por la IBL, haciendo referencia exclusivamente al proceso que involucra la matematización y la construcción de modelos matemáticos.

Artigue y colaboradores (2012) afirman también que "la ciencia y las matemáticas comparten el dominante modo de construcción de conocimiento a través de la investigación" (p. 9, traducción propia), al centrarse ambas en el estudio del proceso de construcción de la comprensión a través de la recopilación de evidencias para probar posibles explicaciones, y las ideas subyacentes, de una manera científica.

Sala Sebastià (2016) también percibió estas semejanzas durante el análisis de la implementación de diversas secuencias didácticas, aunque su objetivo era caracterizar la competencia de indagación de los estudiantes. Posteriormente, Sala Sebastià y colaboradores (Sala Sebastià, Font, Barquero, & Giménez, 2017; Sala Sebastià, Font, Giménez, & Barquero, 2017) analizaron los elementos de modelización matemática que se percibió habían emergido junto con las evidencias de indagación. Por ello, en el trabajo que se presenta aquí, el análisis se ha focalizado en el estudio de las relaciones entre ambos procesos.

Metodología

Este estudio, de enfoque cualitativo y paradigma interpretativo (Cohen, Manion, & Morrison, 2018), se centra en la búsqueda de relaciones entre los procesos de indagación y modelización, para lo cual se constituye un estudio de caso (Stake, 2005).

Contexto de la investigación

Para este estudio, se diseñó e implementó una secuencia didáctica de indagación con un grupo de 30 estudiantes de primer año de ESO (Educación Secundaria Obligatoria, 12-13 años) de un instituto de Badalona (Catalunya, España). Durante las dos semanas del curso 2014-2015 que duró esta implementación, se interrumpió el horario habitual de clases del alumnado, que se dedicó en exclusiva a seguir la secuencia didáctica de indagación planteada. Para desarrollar el trabajo con los estudiantes, éstos se organizaron en equipos de indagación de tres integrantes cada uno y, durante la experimentación, participaron conjuntamente las profesoras de matemáticas y de historia (en el rol de guías), además de la primera autora de este trabajo (en el rol de observadora no participante). Dado el contexto codisciplinar de esta propuesta (matemáticas e historia), que surge a partir de conversaciones informales entre la primera autora y las profesoras participantes, se constató que, previo a la implementación, el alumnado ya había estudiado el proceso de romanización de los territorios de la actual Catalunya, así como los contenidos matemáticos de rectas y ángulos, polígonos (triángulos y cuadriláteros), perímetros y áreas, circunferencia y círculo.

Diseño de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica, denominada *¿Qué esconden estas ruinas?*, se tomó en cuenta la idoneidad del diseño didáctico y de las matemáticas que se querían enseñar. Ello se justificó principalmente con base en tres CID descritos en el apartado teórico: idoneidad afectiva, idoneidad epistémica e idoneidad ecológica. La idoneidad afectiva se justifica con una secuencia de tareas donde los estudiantes trabajaron con datos y hechos reales (el yacimiento de las ruinas romanas) procedentes de un contexto cotidiano (en su ciudad, cercano a su instituto) que les motivara. Se procuró que la implementación promoviera procesos relevantes de la actividad matemática, como la modelización matemática, justificando así la idoneidad epistémica. Con relación a la idoneidad ecológica, el diseño se enmarcó en el currículo de ESO de Catalunya (Departament d'Educació, 2019) de enfoque competencial e interdisciplinar. Además, la primera autora confeccionó una noticia (a partir de información real) y se dispuso de documentos del Museo de Badalona aportados a los estudiantes mediante un blog[1] creado especialmente para la implementación, como se muestra en la Figura 5.

Figura 5. Captura de pantalla del blog con los materiales de las tareas
(Extraido desde https://ruinesdebaetulo.blogspot.com/)

La problemática inicial planteada al alumnado fue una situación basada en el descubrimiento de unas ruinas romanas en el centro de Badalona, por parte del equipo de arqueólogos del Museo de Badalona, a comienzos de la década del 2000. Investigaciones arqueológicas (Padrós & Moranta, 2001) explican que estas ruinas podrían corresponder a los cimientos de un antiguo edificio perteneciente a la ciudad clásica *Baetulo* (el nombre romano de Badalona). Un elemento muy revelador fue el vestigio de un muro curvilíneo, el cual se alzaba con una altura de 1,5 metros. El problema que inició la indagación fue averiguar a qué tipo de edificio público podrían corresponder las ruinas romanas descubiertas. Las preguntas iniciales fueron propuestas por las profesoras.

Técnicas de recopilación y análisis de datos

Los datos se tomaron a través de grabaciones en video de algunas de las sesiones, a partir de las producciones del alumnado (informes entregados, exposiciones orales, etc.), y del diario de campo de la observadora. La primera identificación y clasificación de los datos se trianguló con las notas de campo de las observaciones de las dos profesoras que intervinieron en la implementación. Posteriormente, los resultados preliminares del análisis fueron discutidos con los autores de este artículo y una cuarta investigadora y, cuando se consideró necesario, se reelaboraron hasta tener un análisis definitivo.

En la revisión de la literatura, se aludió a la diversidad de ciclos propuestos para explicar los procesos de modelización matemática y de indagación. A fin de entender cómo se evidencian las relaciones entre ambos procesos, es que se consideran, para la modelización, los ciclos de la Figura 1 (Blomhøj, 2004) y de la Figura 2b (Borromeo Ferri, 2018); y para la indagación, los ciclos de la Figura 3 (Harlen, 2012b) y de la Figura 4 (Sala Sebastià, 2016). De este modo, estos ciclos se utilizaron como herramientas para analizar cómo los estudiantes iban avanzando y/o retrocediendo a través de las diversas cuestiones que se iban planteando durante la implementación. Nos referimos a los subprocesos que se identifican en la implementación que los estudiantes desarrollan, indicando si se trata de un subproceso definido como de *modelización* en la Figura 1 –rotulado como [MF1]– y/o en la Figura 2b –rotulado como [MF2]–; o si se trata de un subproceso que se puede identificar como de *indagación*, definido en la Figura 3 –rotulado como [IF3]– y/o en la Figura 4 –rotulado como [IF4]–. Además, el análisis se estructuró alrededor de ciertos momentos temporales (T) de la implementación (identificados a partir del diagrama de la Figura 4): *Situación inicial* (T1); *Problematización de la situación* (T2); *Búsqueda de explicaciones* (T3); *Propuesta de planes de actuación* (T4); *Definición de un modelo real* (T5); *Construcción de un primer modelo matemático* (T6); *Construcción de un segundo modelo matemático* (T7); *Validación de resultados que ofrecen los modelos* (T8); y *Comunicación de resultados* (T9). Se analizaron los subprocesos desarrollados por los estudiantes en el tránsito de un momento a otro de los ya indicados.

Descripción, análisis de datos y resultados

En este apartado se presentan y analizan los resultados de la implementación realizada, los cuales se organizaron de acuerdo a los momentos temporales (T) descritos en el subapartado anterior.

Tránsito T1 → T2

La *situación inicial* (T1) fue expuesta a los estudiantes a través de la noticia y del blog de la Figura 5. En el tránsito del T1 al T2, los estudiantes tuvieron que *entender la situación problemática* [MF2] y *formular el problema* [MF1], que lograron *concretar en la siguiente pregunta* [IF4]: ¿A qué tipo de edificio romano pueden corresponder las ruinas romanas encontradas? Por lo tanto, en los momentos T1 y T2 se identificaron subprocesos muy relacionados entre sí, tanto del ciclo de modelización como del de indagación.

Tránsito T2 → T3

Frente a esta primera cuestión, y en el periodo de tránsito hacia T3, los estudiantes *buscaron posibles respuestas* [IF4] que, entrando en el *dominio de la investigación* [MF1], fueron aportadas en un primer lugar por el *conocimiento extra-matemático* [MF2], y la aparición de ciertas *ideas existentes* y *alternativas* [IF3], que les ofrecía la información histórica: podía ser un teatro, un circo, un anfiteatro, una basílica, unas termas, un panteón, un templo, etc. Asimismo, para poder concretar con cuál de estos edificios podían coincidir las ruinas, los estudiantes *simplificaron la tarea* [MF2] basando la decisión en la forma del edificio: si es una elipse, podría tratarse de un anfiteatro; si es un semicírculo, podría ser un teatro; o si, además, tuviera una parte de su perímetro rectangular, podría ser un circo, etc. De esta manera, quedaron descartados todos los edificios con planta exclusivamente poligonal, ya que el elemento más importante de las ruinas –el muro parcial– es curvilíneo. Para hallar explicaciones aceptables (respuestas), los estudiantes *estructuraron la tarea* [MF2] a partir del siguiente ciclo de preguntas, posibles respuestas y explicaciones [IF4], volviendo atrás y avanzando según el diagrama de la Figura 4. La pregunta formulada para avanzar en la indagación fue: ¿Qué formas geométricas pueden encajar con la forma del muro parcial del edificio descubierto por los arqueólogos (un muro curvilíneo de 1,5 metros de altura)? Así pues, durante la indagación, a partir de la problematización de la situación y en busca de explicaciones, entre los momentos T2 y T3, el *conocimiento extra-matemático* juega un papel muy importante en la representación del problema. Tal y como afirman Blum (2011) y Borromeo Ferri (2018), éste es un aspecto que resulta imprescindible para poder simplificar y estructurar la tarea, y así poder construir un modelo real del problema. De este modo, los subprocesos de modelización y de indagación que se identificaron entre T2 y T3, también influyen en el avance hacia la resolución del problema.

Tránsito T3 → T4

Ante el abanico de *posibles explicaciones* (T3), fue necesario *diseñar un plan de actuación* (T4) para acotarlas y encontrar una respuesta más precisa. Para ello, dado que el muro es curvilíneo y teniendo en cuenta las formas de los edificios, a partir del trabajo cooperativo y la puesta en común de ideas en el aula, se *formularon hipótesis* [IF4] y se *predijo* [IF3] que el muro romano podría formar parte de un edificio de forma curva, como el teatro (semicircular), el anfiteatro (elíptico) o el circo (con una parte de su planta semicircular). De esta hipótesis se derivaron algunas preguntas que se podrían concretar en: ¿Como podríamos comprobar con cuál de estas formas encaja el contorno del muro descubierto? Para avanzar en la indagación se planteó, con la ayuda y guía de las profesoras de historia y de matemáticas, un *plan de actuación* [IF3], [IF4] para determinar a qué tipo de curva respondía la forma del trozo de muro romano. En el tránsito entre estos dos momentos (T3 y T4), los subprocesos identificados parecen ser exclusivos del proceso de indagación. Una vez las hipótesis estuvieron realizadas y el plan de actuación trazado –previo trabajo en el seno de los equipos de indagación, *recabando* [IF4] e *interpretando datos* [IF4], [IF3] básicamente extra-matemáticos–, los estudiantes mostraron que, en general, todos los equipos de indagación poseían ya una cierta *representación mental de la situación* [MF2] que les permitió idealizar la situación y simplificarla hasta un problema de identificación de la forma del muro romano de las ruinas descubiertas con una de las formas de los posibles edificios habituales de la época romana. Se podría afirmar entonces que los estudiantes habían obtenido un *modelo real* [MF2] de la situación. Algunos equipos lo verbalizaron y otros, además, lo dibujaron de forma esquemática.

Tránsito T4 → T5 → T6

A partir de este momento empezó el tránsito hacia la *obtención de un primer modelo matemático* (T6), donde las acciones en el mundo real fueron dando paso a las acciones en el mundo matemático. Por ejemplo, para indagar si el muro romano formaba parte de una elipse o de una circunferencia, los estudiantes se desplazaron a una plaza pública cerca de su escuela donde previamente las profesoras habían dibujado la forma del muro romano en el suelo, de acuerdo con la información arqueológica real de que se disponía. Allí, el alumnado intentó encajar el muro dibujado en una elipse, con un procedimiento manual (gráfico) basado en su definición. Así pues, dos estudiantes permanecieron quietos en los focos (determinados por ensayo-error) de la posible elipse, sosteniendo cada uno el extremo de una cuerda por donde se había pasado una anilla que podía moverse a lo largo de la cuerda. Un tercer estudiante, sosteniendo la anilla de manera que la cuerda estuviera tensada en todo momento, intentó reseguir el muro dibujado. Este proceso de *recogida* [IF3], [IF4], *análisis* [IF4] e *interpretación de datos* [IF3], [IF4], se repitió varias veces, cambiando el lugar de los focos para intentar reseguir el muro como forma de validación del modelo geométrico considerado. Los diversos equipos de indagación desestimaron que el muro pudiera ser parte de una elipse, ya que no consiguieron encajarlo en una. Descartada la elipse, el alumnado intentó encajar el muro en una circunferencia, aproximando su centro y radio (ver Figura 6). Para *recoger nuevos datos* [IF3], [IF4], *analizarlos* [IF4] e *interpretarlos* [IF3], [IF4], los equipos de indagación se sirvieron de diferentes procedimientos de construcción. En primer lugar, intentaron encontrar el centro por ensayo-error, tanteando posibles ubicaciones de éste. Dado que no dio muy buenos resultados, lo volvieron a intentar dibujando con yeso algunas de las tangentes en diferentes puntos del muro, trazaron la perpendicular (con regla y escuadra grandes de madera) a esas tangentes para encontrar el centro en su intersección y después poder determinar la medida del radio. Otros equipos prefirieron probar con el procedimiento de dibujar dos mediatrices a partir de tres puntos del arco de muro, con la ayuda de cuerda y yeso para marcar. En el punto de corte de las mediatrices encontraron el centro. La esquematización de la forma del muro y la búsqueda de formas geométricas que encajaran en ella hasta construir un primer modelo matemático requirió que los estudiantes desarrollaran los subprocesos de *sistematización* y *matematización* [MF1], [MF2], a partir de conectar el conocimiento extra-matemático (histórico y arqueológico en esta tarea) con los propios conocimientos matemáticos (de geometría). En definitiva, los estudiantes *concluyeron* que el muro pertenecía a un edificio circular, *validando el modelo matemático* construido [MF1] y, algunos de los equipos, su *hipótesis* inicial [IF3], [IF4].

Nos parece importante destacar que, ante la complejidad del problema matemático, como era la de descubrir qué tipo de curva podía encajar en el muro, la información extra-matemática (el contexto histórico y arqueológico de la situación) jugó un papel clave, permitiendo al alumnado reconocer las *hipótesis* más plausibles, ya que limitó las posibles curvas a considerar de acuerdo con las formas que se usaba en la construcción de los edificios públicos romanos (elipse o circunferencia). Sin este contexto histórico, el problema hubiera sido demasiado complicado (desde un punto de vista estrictamente matemático) para el alumnado de esta etapa educativa, al no poseer el conocimiento matemático suficiente.

Figura 6. Los estudiantes buscan y miden el centro de la circunferencia en la plaza

De todas maneras, aunque los estudiantes supieran que la forma del edificio en ruinas era de circunferencia, se abrían dos posibilidades: el edificio podía ser un teatro (planta semicircular), o bien un circo (planta de un lado semicircular y rectangular del otro). Para determinar de cuál de estos dos edificios se podía tratar, los estudiantes debieron volver al mundo real (partiendo del mismo modelo real) para considerar nuevos datos históricos acerca de las dimensiones y envergadura de cada tipo de edificio. Los estudiantes partieron de estas dos *nuevas hipótesis* [IF3], [IF4] y se plantearon las siguientes cuestiones: ¿Podríamos dibujar, con los datos que tenemos, la planta de un teatro y de un circo para saber cómo eran exactamente?

Tránsito T6 → T7

Podemos considerar que se inició un nuevo ciclo de indagación para *recabar información* [IF4] sobre la arquitectura de la época romana, lo que los llevó a construir un segundo modelo matemático (T7). Se ofreció a los estudiantes la posibilidad de conocer la obra *De architectura* de Marcus Vitruvius, donde se especifican los cánones de construcción de diversos edificios públicos romanos y, después de consultarlo y de la puesta en común imprescindible, los estudiantes decidieron intentar validar la hipótesis de que el edificio era un teatro. Para ello, los estudiantes decidieron construir un modelo geométrico del mismo, fiel al canon vitruviano (consultado en una versión facsímil en español del tratado que se encuentra disponible en el blog), para poder estudiarlo y cotejarlo con los datos arqueológicos disponibles. Todo este trabajo dio como resultado modelos geométricos [MF1], [MF2] realizados con *GeoGebra* (Figura 7), del posible teatro de *Baetulo* que cada equipo de investigación *construyó* y *ajustó* con la información que había recabado y puesto en común con los otros equipos. Éste es otro momento donde la indagación conecta con la modelización matemática, ya que se pudo observar el desarrollo de los mismos subprocesos que en la construcción del primer modelo.

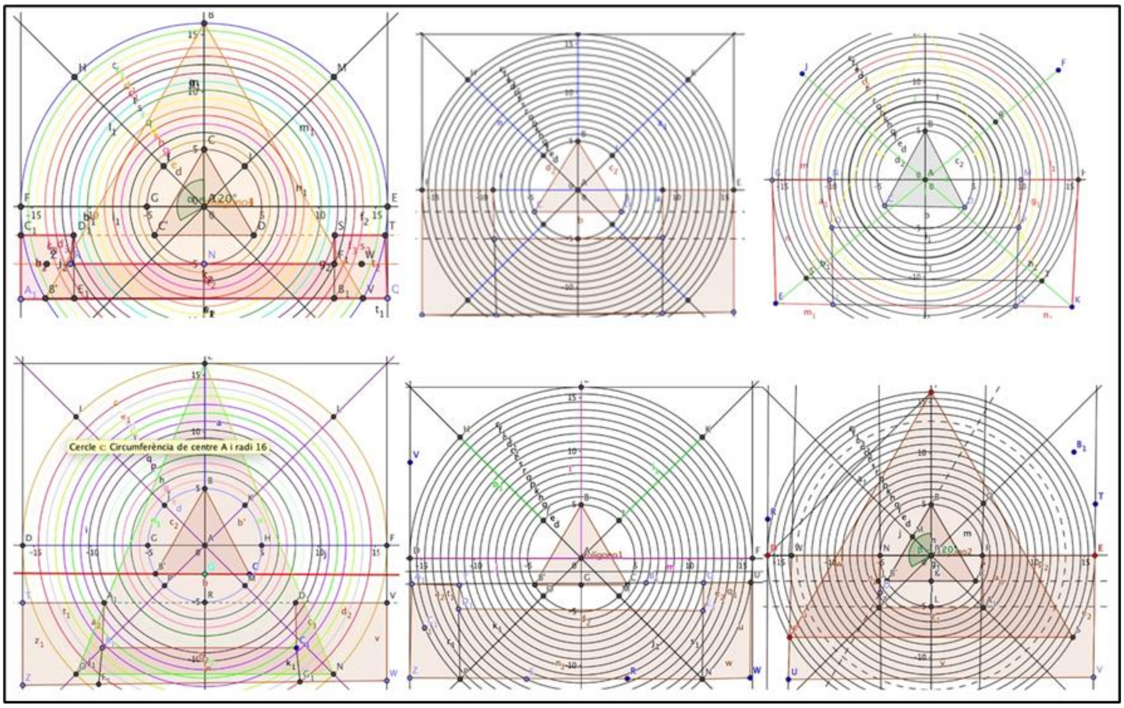
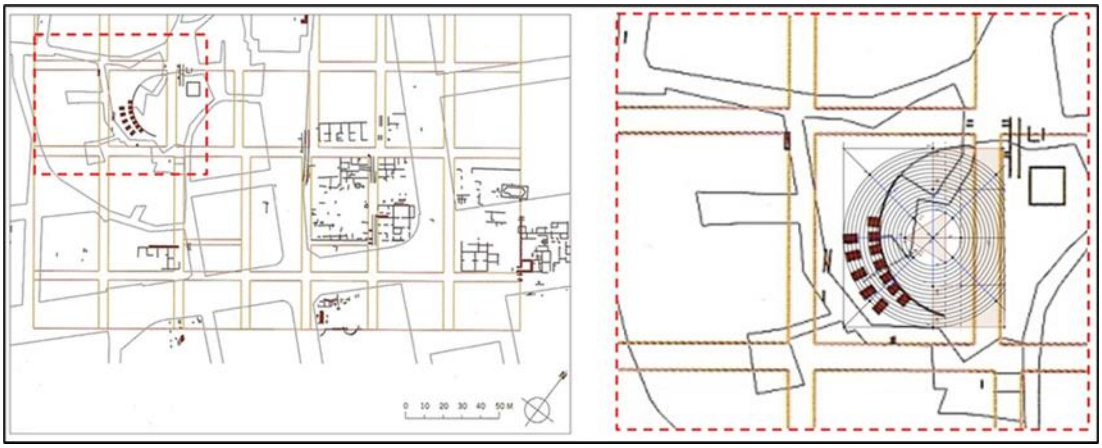


Figura 7. Modelos geométricos del teatro de diversos grupos, realizados con *GeoGebra*

Una vez los diferentes equipos de indagación construyeron sus modelos (no todos siguieron el canon vitruviano) con *GeoGebra*, las profesoras, con el objetivo de que los estudiantes, de vuelta al mundo real, tuvieran que *evaluar los resultados teóricos* [MF1], [MF2] de sus modelos para ver si se trataba del teatro de *Baetulo,* descartando así la hipótesis de que fuera un circo, les ayudaron a formular nuevas preguntas: ¿El modelo construido encaja de forma adecuada en el plano dimensional de la zona donde se hallaron las ruinas?

Tránsito T7 → T8 → T9

El momento de *validación de resultados del modelo matemático* (T8) supone el tránsito desde el mundo matemático a la realidad, para *interpretar* y *evaluar* [IF4], [MF1], [MF2] los resultados teóricos (el modelo geométrico realizado con *GeoGebra*) con la realidad de la situación problemática sobre la que se trabaja. Para responder a la pregunta anterior, los estudiantes superpusieron su imagen del modelo del teatro –obtenida con *GeoGebra*– (Figura 8b), sobre el plano real del lugar del yacimiento arqueológico, adecuándolo a su escala para ver si se conseguían encajar los contornos de ambos. En la Figura 8a, se pueden observar los detalles y contornos de los restos arqueológicos hallados indicados sobre el mapa de la ciudad actual (en negro) y sobre el mapa hipotético de la ciudad romana (en amarillo), según el equipo de arqueólogos del Museo de Badalona. Dado que el encaje del modelo requería una reducción o ampliación de éste, era necesario comprobar que el resultado seguía cumpliendo las características de los teatros romanos, según Vitruvius, más allá de la forma como, por ejemplo, la ubicación (que la situación de las salidas del teatro coincidiesen con espacios del mapa donde hubiera habido una plazoleta) o que, aplicando al edificio la escala indicada en el mapa, se mantuvieran sus proporciones, tal y como señalaba el canon.



(a) (b)

Figura 8. (a) Mapa de la zona de la ciudad donde se encuentran las ruinas romanas (zona del teatro encuadrada); (b) Ampliación de la zona encuadrada con un modelo geométrico superpuesto para su validación

Los diversos equipos de indagación que habían seguido el canon vitruviano pudieron *validar sus resultados* [IF4], [MF1], [MF2], comprobando que los resultados teóricos se podían corresponder con la realidad y, así, responder a la pregunta acerca de que el muro debió pertenecer a un teatro romano. Este momento de validación se vio reforzado por la realización de una visita al yacimiento con el acompañamiento de Pepita Padrós, miembro del equipo de arqueólogos del Museo de Badalona, una opinión experta que dio una excepcional autenticidad a todo el proceso llevado a cabo. Cabe resaltar que el proceso de validación de los resultados es común al proceso de indagación y al de modelización matemática.

Finalmente, el trabajo de los equipos llegó al momento de *comunicación de resultados* (T9), un elemento sólo contemplado en el proceso de indagación [IF3], [IF4]. Así pues, tras una puesta en común para compartir el trabajo realizado por todos los equipos de investigación, los estudiantes confeccionaron un informe de la indagación con el objetivo de *comunicar sus resultados* y dar respuesta a las preguntas y a la situación problemática inicial.

Relaciones entre modelización matemática e indagación

El análisis llevado a cabo, organizado alrededor del tránsito entre nueve momentos que consideramos destacables de la implementación llevada a cabo, se ha basado en la identificación de subprocesos presentes en los diagramas de los ciclos de modelización (Blomhøj & Jensen, 2003; Borromeo Ferri, 2018) y de indagación (Harlen, 2012b; Sala Sebastià, 2016) considerados como referentes teóricos, para así estudiar tanto las evidencias de las relaciones entre éstos, como el avance y retroceso de los estudiantes por los ciclos a medida que han ido respondiendo preguntas y planteándose nuevas.

En todos los momentos de la implementación se ha podido identificar que los estudiantes estaban desarrollando alguno de los subprocesos correspondientes a indagación. Aunque la modelización matemática ha estado siempre muy presente, los momentos intermedios de búsqueda de información extra-matemática (T3) y de puesta en común para planificar la actuación de la indagación (T4), así como el momento final de comunicación de resultados (T9), se hacen explícitos en los ciclos de indagación y no en los de modelización (considerados en el marco teórico de este trabajo). No obstante, existen otras perspectivas (que no fueron contempladas en este estudio) que sí los incluyen (véase Lesh & Doerr, 2003).

En los demás momentos, cuando coexisten indagación y modelización matemática, podemos afirmar que el desarrollo de ciertos subprocesos de ambos ciclos se complementa. Por ejemplo, cuando los datos recabados del contexto mediante la indagación fueron susceptibles de ser matematizados, como en la actividad realizada en la plaza para descubrir con qué tipo de curva encajaba el muro romano y también en la construcción del modelo geométrico del teatro romano mediante *GeoGebra*, entonces los equipos de indagación que obtuvieron mejores respuestas desarrollaron subprocesos de modelización, como la *simplificación* e *idealización* de la situación real, la realización de esquemas con datos matemáticos, el uso de estrategias matemáticas para buscar las formas geométricas que podían encajar con la curva, la ejecución de un modelo geométrico del teatro con *GeoGebra*, etc. También, el subproceso de validación de resultados teóricos (obtenidos a partir del modelo matemático) en la realidad, parece que emerge como un elemento común a los procesos de modelización y de indagación. En términos del ciclo de modelización presentado en la Figura 2b, se desprende la idea de que existe una clara relación entre la *problematización* de la *situación real* con la *validación* de los *resultados reales*, que implica la comparación de la triada *resultados reales* ↔ *representación mental de la situación* ↔ *modelo real*. Más en concreto, algunas de las preguntas que se pueden formular para efectuar esta *validación* son, por ejemplo: *¿para qué necesito el modelo?*, *¿es coherente con el contexto del* *problema?*, *¿cuáles son los aspectos matemáticos intervinientes?*, entre otras, las cuales guardan estrecha relación con los criterios matemáticos y extra-matemáticos de la *situación real* (Ledezma et al., in press**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**). En el caso de la indagación, el proceso de *validación* es necesario para dar respuesta a una situación como la implementación analizada, pero en los casos de situaciones escolares escogidas para ejercicios de modelización, la supeditación a los factores antes mencionados hace que no siempre se realice, o bien, se realice con los mismos datos matemáticos del problema. No obstante, cuando los datos obtenidos de la indagación son susceptibles de ser matematizados, emergen procesos de modelización matemática y las respuestas que dan los estudiantes, aunque no estén validadas, son más precisas y justificadas.

El hecho de que el problema estuviera radicado en un contexto real concreto y cercano a los estudiantes participantes, ha hecho posible que la indagación fuera un reto asumible para ellos, al acotar las respuestas matemáticamente plausibles y facilitar la *representación mental de la situación*. Por ejemplo, al estudiar con qué curva podría encajar el trozo de muro romano – en la actividad en la plaza pública, descrita anteriormente –, los modelos se reducían a los posibles contornos de los edificios romanos y no a los infinitos modelos de curvas posibles existentes. Este estudio también evidencia un aire de familia entre aspectos del proceso de indagación y del de modelización matemática, lo cual nos permite evidenciar, además de las mencionadas anteriormente, otra relación entre los ciclos que la literatura ofrece sobre ambos procesos. En particular, las *ideas* contempladas en el ciclo de Harlen (2012b) (Figura 3: *idea existente*, *idea más grande*, *idea alternativa*) y el *conocimiento extra-matemático* (CEM) considerado en el ciclo de Borromeo Ferri (2018) (Figura 2b), tienen un *aire de familia* (Wittgenstein, 1953/1988).

Para finalizar, se trata de un trabajo que inicia una agenda de investigación que estamos desarrollando actualmente sobre la naturaleza de las relaciones entre los procesos de modelización matemática e indagación. En esta línea, un resultado que se puede afirmar es que hay elementos que caracterizan una tarea de indagación –como la estructura de preguntas, la formulación de hipótesis, la recopilación e interpretación de datos (matematizables), la validación de resultados, etc.– que potencian la modelización matemática, despertando el interés de los estudiantes para involucrarse en su práctica.

Implicaciones para la práctica docente

Si bien en este artículo nos hemos focalizado, principalmente, en caracterizar las relaciones entre indagación y modelización en un proceso de instrucción, dado que la secuencia didáctica fue planificada a priori para tener una alta idoneidad didáctica, concluimos, después de haber realizado la implementación y el análisis de los datos, que, tal como se esperaba en la planificación realizada, la secuencia didáctica presenta una cierta riqueza de procesos matemáticos, lo cual conlleva, como consecuencia, una alta valoración de su idoneidad epistémica.

Por último, planteamos algunas consideraciones sobre cómo este trabajo puede orientar la práctica del profesor, para lo cual usaremos el constructo de los CID explicado en el marco teórico. A priori, este tipo de propuestas presentan una alta idoneidad en algunos de los componentes de los CID. Con relación a la idoneidad epistémica, es evidente que propuestas de secuencias didácticas que combinen los procesos de indagación y modelización, contemplan el componente *Riqueza de procesos*, en el sentido de que activan en los alumnos procesos relevantes de la actividad matemática, como lo son los de indagación y de modelización. Por otra parte, al presentar situaciones reales, también se contempla el componente *Conexiones intra e interdisciplinares* de la idoneidad ecológica. Con relación a la idoneidad cognitiva, este tipo de secuencias presenta una *Alta demanda cognitiva* a los alumnos. Sobre la idoneidad interaccional, se fomenta tanto la *Autonomía* como la *Interacción entre discentes*. Con relación a la idoneidad afectiva, pueden aumentar la *Motivación* de los alumnos. Ahora bien, lo que a priori puede ser recomendable puede ser contradictorio con los otros componentes de los CID, teniendo en cuenta el contexto en el que el profesorado debe implementar la secuencia didáctica. Por tanto, debe ser el profesor o profesora quien, considerando el contexto donde realiza el proceso de instrucción, tiene que dar el peso que considere adecuado a los diferentes componentes de la idoneidad didáctica.

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Notas

[1] El blog se encuentra disponible en https://ruinesdebaetulo.blogspot.com/. La lengua original es el catalán, pero se instaló un widget de Google que permite su traducción.

Referencias

Artigue, M., & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education*. The Fibonacci Project. Retrieved from https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/international/Inquiry%20in%20Mathematics%20Education_web.pdf

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 46*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W., & Léna, P. (2012). *Learning through inquiry*. The Fibonacci Project. Retrieved from https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/learning_through_inquiry.pdf

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. In B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, England: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Breda, A., Font, V. & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8va ed.). New York, NY: Routledge.

Departament d'Educació. (2019). *Currículum educació secundària obligatòria*. Barcelona, Spain: Generalitat de Catalunya.

Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in life: Inquiry learning and the world of work*. Friburgo de Brisgovia, Alemania: University of Education Freiburg. Retrieved from https://mascil-project.ph-freiburg.de/images/pdf/Mascil_BOOK_EN_web.pdf

Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 300-304). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_176

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Journal for the Study of Education and Development – Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Harlen, W. (2012a). The tools for enhancing inquiry in science education and inquiry in mathematics. In S. Borda (Coord.), *Tools for enhancing inquiry in science education* (pp. 31-34). The Fibonacci Project. Retrieved from https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/international/Tools%20for%20Enhancing%20Inquiry%20in%20Science%20Education-web.pdf

Harlen, W. (2012b). *Inquiry in science education*. The Fibonacci Project. Retrieved from https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/international/Inquiry%20in%20Science%20Education_web.pdf

Ledezma, C., Font, V., & Sala Sebastià, G. (in press). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. *Investigación en educación matemática XXIV*.

Ledezma, C., Font, V., & Sala Sebastià, G. (2021). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría. *PARADIGMA, 42*(Extra 2), 290-312. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/bf02655885

Maaß, K., & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education, 45*(6), 887-899. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7

Maaß, K., & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM Mathematics Education, 50*(1-2), 273-285. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0911-y

Maaß, K., Wernisch, D., Schäfer, E., & Aldorf, A.-M. (2015). MASCIL: Maths and science for life! In K. Maaß et al. (Eds.), *Educating the educators: international approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education* (pp. 18-22). Munich, Germany: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Padrós, P., & Moranta, L. (2001). La ciutat i la memoria. El teatre romà de Baetulo. *Carrer dels Arbres, 3a època, 12*, 15-31.

Sala Sebastià, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a primària i secundària* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain. Retrieved from https://www.tdx.cat/handle/10803/388035

Sala Sebastià, G., Font, V., Barquero, B., & Giménez, J. (2017). Mathematical modelling in an archaeological context: Their complementarity as essential tool for inquiry. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 988-995). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education, ERME.

Sala Sebastià, G., Font, V., & Giménez, J. (2015). Una mirada curricular a la competencia de indagación. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 485-490). Alicante, Spain: SEIEM.

Sala Sebastià, G., Font, V., Giménez, J., & Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3ra ed.) (pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas* (Trabajo original publicado en 1953). Barcelona, Spain: Editorial Crítica.