Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real

Analysis of the complexity factors in individual solution plans and group developed solutions for real context estimation problems

Carlos Segura
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València
España
carlos.segura@uv.es

Irene Ferrando
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València
España
irene.ferrando@uv.es

Lluís Albarracín
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autónoma de Barcelona
España
lluis.albarracin@uab.cat

Resumo. Los problemas de estimación en contexto real pueden utilizarse como iniciación en la elaboración de modelos matemáticos. En este estudio se recogieron los planes de resolución individuales de estudiantes (N=224) del grado de Maestro/a en Educación Primaria que se enfrentaron a una secuencia de problemas de estimación contextualizados. Posteriormente, esos mismos estudiantes trabajando en grupos (N=63), resolvieron los mismos problemas realizando mediciones y estimaciones *in situ*. Así, el estudio se centra en los denominados factores de complejidad, referidos a los aspectos de la resolución con los que se pretende obtener una estimación más precisa. El objetivo es determinar qué factores de complejidad enriquecen los planes de resolución individuales y cuáles son los que enriquecen las resoluciones grupales. Además, se identifica qué características del contexto real promueven que los estudiantes incluyan determinados factores de complejidad, tanto en los planes de resolución individual como en las resoluciones grupales. Los resultados permiten identificar el impacto del trabajo de campo en el proceso de

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 30(1) 31-51
https://doi.org/10.48489/quadrante.23592
Received: January 2021 / Accepted: May 2021

resolución de tareas de estimación formuladas en contextos reales cercanos; en relación al conocimiento del profesor en formación, los resultados permiten identificar carencias en el conocimiento de las tareas matemáticas para la enseñanza.
Palabras-clave: modelización; problemas de estimación; formación de maestros; problemas de contexto real.

Abstract. Estimation problems in real context can be used as an introduction to mathematical modelling. In this study we started by collecting the individual solution plans of pre-service primary school teachers (N=224) who were given a sequence of contextualised estimation problems. Afterwards, the same students working in groups (N=63) solved the same problems by performing *in situ* measurements and estimations for each problem, and their solutions were also analysed and compared with their previous solution plans. In particular, the focus of the study is on the so-called complexity factors, which refer to the elements of the solution that are intended to obtain a more accurate estimate. The aim is to determine which complexity factors enrich individual solution plans and which ones enrich group solutions. Moreover, we identify which characteristics of the real context promote the inclusion of certain complexity factors, both in the individual solution plans and in the group developed solutions. The results allow us to identify the impact of fieldwork in the process of solving estimation tasks formulated in real contexts; related to the pre-service teacher's knowledge, the results allow us to identify shortcomings in the knowledge of mathematical tasks for teaching.
Keywords: modelling; estimation problems; pre-service teacher education; real-context problems.

Introducción

Según Sriraman y Knott (2009), los problemas de Fermi son problemas de estimación que tienen como objetivo que los estudiantes hagan conjeturas fundamentadas; estas actividades son útiles para promover la modelización matemática y para permitir que los estudiantes generen nuevos conocimientos matemáticos conectados con contenidos de otras disciplinas (Albarracín & Gorgorió, 2014; Ärlebäck & Frejd, 2013). Distintas investigaciones ponen de manifiesto que la actividad de resolución de problemas de modelización matemática promueve un aprendizaje significativo de las matemáticas (Blum & Niss, 1991; Kaiser & Sriraman, 2006). En este trabajo utilizamos un subconjunto de los problemas de Fermi (Ärlebäck, 2009), en concreto aquellos problemas que requieren estimar un gran número de elementos en una superficie delimitada real, como conocer el número de personas que caben en una plaza pública. Estas tareas de estimación son problemas contextualizados que los alumnos pueden resolver introduciendo factores de complejidad – tales como considerar la presencia de obstáculos en la superficie delimitada – en sus modelos con el fin de obtener una estimación más precisa (Albarracín, Ferrando, & Gorgorió, 2020).

Esta investigación forma parte de un estudio para analizar los conocimientos de los estudiantes del grado de Maestro/a en Educación Primaria (de 6 a 12 años) en relación con los problemas de Fermi. El éxito al introducir en el aula esta clase de problemas de modelización depende, entre otros aspectos, del conocimiento que tenga el docente sobre los factores de complejidad del contexto o los procesos de resolución posibles. Ball, Thames y Phelps (2008) han enfatizado la importancia del conocimiento del contenido matemático como parte de la competencia del profesor de Matemáticas. Chapman (2015) subraya la importancia de los conocimientos del profesor en materia de resolución de problemas. Así, el conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas forma parte del conocimiento del contenido, e incluye el conocimiento de los procesos asociados a la resolución de problemas y la modelización.

El punto de partida de este estudio es una investigación previa que caracterizó los planes de resolución individuales de futuros maestros (N= 224) cuando resuelven, en el aula, una secuencia de problemas de estimación que incluía imágenes de los contextos reales (Ferrando, Segura, & Pla-Castells, 2021). Diferentes estudios (Chapman, 2015) destacan la importancia del trabajo en grupo para mejorar las habilidades de resolución de problemas. Se espera que la influencia del trabajo en grupo y sobre el terreno sea determinante a la hora de resolver problemas de estimación en contexto real. Así, en este trabajo analizamos las producciones de esos mismos estudiantes cuando, por grupos, consensuan una resolución realizando mediciones y estimaciones en la ubicación real de cada problema de la secuencia. Los objetivos de esta investigación son los siguientes:

- determinar cuáles son los factores de complejidad que se incorporan a los planes de resolución individuales y cuáles los que se incorporan a las resoluciones grupales;
- identificar qué características del contexto real promueven que los estudiantes incluyan algunos de los factores de complejidad identificados, tanto en los planes de resolución individual como en las resoluciones grupales.

Marco teórico

En esta sección se describe el contexto de las investigaciones centradas en el uso de los problemas de Fermi en la enseñanza de las matemáticas y en el conocimiento del profesor.

Problemas de Fermi como actividades de modelización matemática

El estudio matemático de fenómenos complejos de la vida real permite que los estudiantes puedan dar significado a conceptos matemáticos y explorarlos en una situación que es real para ellos (Gravemeijer & Doorman, 1999). Según Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen y Doorman (2015), las tareas matemáticas pueden tener diferentes tipos de contexto: puede ser un contexto realista, un contexto camuflado, o pueden ser tareas puramente matemáticas, en las que se utilizan exclusivamente símbolos matemáticos y sin referencias a ningún fenómeno real. Entre aquellas actividades matemáticas que tratan sobre fenómenos reales, nos interesa utilizar aquellas en las que las conexiones con el mundo real influyen en la resolución, ya que las tareas con un contexto camuflado son problemas con un enunciado que conecta con alguna realidad pero que no requieren ninguna consideración del contexto real porque las operaciones matemáticas necesarias para resolver la tarea son obvias (Wijaya et al., 2015). Si el contexto ha de desempeñar el papel de promotor del desarrollo del conocimiento, debe proporcionar todos los elementos necesarios para situar al estudiante en un papel apropiado para resolver el problema. De lo contrario, los estudiantes tratarán de resolver el problema como si tuviera un contexto camuflado, a través de un fenómeno llamado suspensión del sentido (Greer, 1997; Schoenfeld, 1991; Verschaffel & De Corte, 1997). En palabras de Sriraman y Knott (2009), al analizar el contexto de un problema, "la palabra realista se refiere no sólo a la conexión con el mundo real, sino también a las situaciones de resolución de problemas que son reales en la mente del estudiante" (p. 206). De acuerdo con esto último, Palm (2008) describe la autenticidad de un problema realista como el grado en que una tarea de clase puede ser transferida al mundo real, afirmando que los estudiantes pueden aprovechar aquellas características de la tarea que se conectan con las características de la realidad. Palm (2006) describe los aspectos de la tarea que son clave para mantener su autenticidad: el tipo de evento en el que se enmarca la afirmación, la pregunta y los datos proporcionados a los estudiantes, los requisitos que debe verificar la solución y el propósito del problema.

En nuestro trabajo elegimos un tipo de actividades contextualizadas en las que la estimación tiene un carácter primordial, estos son los denominados problemas de Fermi. Son problemas abiertos que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación del problema, y que estimen las cantidades relevantes antes de emprender, a menudo, cálculos sencillos (Ärlebäck, 2009). Una característica específica de los problemas de Fermi es que a menudo no contienen toda la información necesaria para obtener una solución por lo que requieren de una estimación en la que el contexto juega un papel relevante (Efthimiou & Llewellyn, 2006). Algunos ejemplos de problemas de Fermi usados en investigaciones previas son los siguientes: estimar el número de coches acumulados en una retención de 3 km en la autopista (Peter-Koop, 2009); estimar la cantidad de latidos que da un corazón humano durante una vida (García, 2013); estimar cuántos centros comerciales hay en Estados Unidos (Anderson & Sherman, 2010).

Los problemas de Fermi son útiles para introducir la modelización matemática (Ärlebäck & Bergsten, 2010; Borromeo-Ferri, 2018) porque son accesibles para estudiantes de diferentes etapas educativas y no dependen de conocimientos matemáticos previos específicos. Obligan a los estudiantes a especificar la estructura de la información relevante y requieren que el estudiante desarrolle una estrategia de solución específica para el contexto. Al no proporcionar datos numéricos en el enunciado, los estudiantes deben estimar varias cantidades por sí mismos y promueven la discusión entre los estudiantes. Los problemas de

Fermi pueden resolverse descomponiendo el problema original en subproblemas más simples y haciendo estimaciones razonables para cada subproblema para llegar a una solución de la pregunta original (Carlson, 1997). A partir de esta forma de resolver problemas de Fermi, se han identificado conexiones con la modelización matemática en estudios con estudiantes universitarios (Czocher, 2016), estudiantes de secundaria (Ärlebäck, 2009; Ferrando et al., 2017) y también en estudiantes de primaria de 10 a 12 años (Ferrando & Albarracín, 2021; Haberzettl, Klett, & Schukajlow, 2018; Peter-Koop, 2009). Para los estudiantes de primaria los problemas de Fermi son actividades que suponen una alta demanda cognitiva, ya que es necesario que los resolutores generen modelos matemáticos a partir de identificar las variables clave del fenómeno estudiado, establecer sus relaciones, determinar los valores necesarios mediante estimación u otros métodos y calcular los valores requeridos en el enunciado del problema. En el proceso de resolución los alumnos incorporan al modelo construido aspectos cuantificables del contexto real, que proporcionan mayor precisión en la estimación obtenida (Albarracín, Ferrando, & Gorgorió, 2020). Estos aspectos son los que denominamos factores de complejidad y se relacionan con las variables del contexto que pueden identificar los alumnos en su resolución.

El conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas

Al hablar del conocimiento del docente de matemáticas para la enseñanza debemos empezar por la caracterización propuesta por Shulman (1986), que apunta que pueden distinguirse tres categorías: el conocimiento de la materia; el conocimiento pedagógico del contenido; y el conocimiento del currículo. A partir de la propuesta de Shulman (1986, 1987), Ball, Thames y Phelps (2008) proponen una caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés, *Mathematics Knowledge for Teaching*) a partir de los conocimientos y habilidades que necesitan los profesores para conseguir que los alumnos aprendan. Su modelo considera el conocimiento matemático para la enseñanza constituido por dos dominios, el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido. En el conocimiento de la materia se sitúan el conocimiento común del contenido, el conocimiento del horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido. En el conocimiento pedagógico del contenido se sitúan el conocimiento del contenido y de los estudiantes, el conocimiento del contenido y de la enseñanza, y el conocimiento del currículo.

En este artículo nos centramos en un aspecto concreto del conocimiento del profesor: el conocimiento de las tareas matemáticas para la enseñanza (Chapman, 2013), como parte del conocimiento del contenido y de la enseñanza del MKT. El conocimiento de las tareas matemáticas para la enseñanza se ocupa de los conocimientos que los profesores necesitan para seleccionar y desarrollar tareas que promuevan la comprensión conceptual de las matemáticas por parte de los estudiantes, apoyar su desarrollo del pensamiento matemático y optimizar el potencial de aprendizaje de esas tareas (véase Camacho & Guerrero, 2019).

Existen pruebas que indican que la calidad del aprendizaje es mayor cuando los estudiantes están expuestos a tareas cognitivamente exigentes (Boaler & Staples, 2008; Stein & Lane, 1996). Sin embargo, los profesores se muestran reacios a incorporar esas tareas en su enseñanza (Hiebert et al., 2003). De hecho, cuando los docentes eligen tareas difíciles para su implementación, no hay garantía de que se lleven a cabo con el nivel de desafío previsto (Arbaugh et al., 2006). Se han propuesto varias razones para la limitada aceptación de las tareas complejas por parte del profesorado. Tirosh et al. (1991) destacan las dificultades para incorporar los elementos de la situación real del contexto de un problema en su resolución. Chapman (2015) incide en la confusión sobre el significado de "tarea abierta" y sus implicaciones en la resolución. Los resultados de estos estudios no sólo subrayan algunas limitaciones del conocimiento de los profesores sobre la resolución de problemas, en particular en relación a problemas de modelización, sino que también ponen de manifiesto los conocimientos necesarios para desarrollar sus habilidades como resolutores. De hecho, algunos investigadores sugieren que los profesores deben experimentar la resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor antes de poder abordar adecuadamente su enseñanza (Thompson, 1985). En este trabajo se investiga cómo los futuros maestros se enfrentan a resolver una secuencia de problemas abiertos en los cuales el enunciado no incorpora de forma explícita los datos y, por tanto, la complejidad de estas actividades deriva de que su resolución exige comprender y considerar aquellos aspectos del contexto real que permiten dar un resultado preciso.

Metodología

Diseño de la investigación

Esta investigación se basa en una experiencia realizada con futuros maestros de educación primaria (N=224) y consta de dos partes. En ambas partes de la experiencia los futuros maestros resolvieron la misma secuencia de cuatro problemas de estimación contextualizados en el entorno del campus universitario (Tabla 1). La diferencia entre las dos partes radica en que la primera resolución se realizó individualmente en el aula, mientras que la segunda se realizó en grupos (N = 63) e *in situ*, pudiendo intervenir en el lugar del problema con instrumentos de medida. El análisis, descrito en detalle en la sección *Análisis de los factores de complejidad*, combina técnicas cualitativas (basadas en categorizaciones de las producciones de los estudiantes) y cuantitativas, que permiten derivar resultados basados en estadística descriptiva.

El punto de partida de la experiencia fue el diseño de una secuencia de cuatro problemas que piden una estimación razonada de una cantidad de elementos lo suficientemente grande para que no pueda ser obtenida directamente. Los cuatro problemas están contextualizados en recintos rectangulares ubicados en zonas del campus universitario.

En el diseño de la secuencia se han tenido en cuenta las llamadas “variables de tarea”, que Kilpatrick (1978) define como cualquier característica del problema que asuma un valor determinado a partir de un conjunto de valores posibles (Goldin & McClintock, 1979). Pueden ser numéricas, como el número de palabras del enunciado, o clasificatorias, por ejemplo, el tipo de contexto de la tarea. Kilpatrick (1978) establece tres categorías: variable de contexto, de formato y de estructura. En los problemas que conforman la secuencia se fijan la variable de estructura (complejidad gramatical, presentación de los datos) y la de formato (enunciado con pregunta directa y fotografía de la situación real). Esto permite centrar el análisis en las variables de contexto, referidas a los significados no matemáticos que aparecen el texto del problema, intervengan o no en el proceso de resolución (Puig & Cerdán, 1988; Webb, 1980). De este modo, las características del contexto en esta clase de tareas se interpretan en términos de los valores que toman las variables de contexto.

Tabla 1. Enunciados de los problemas de la secuencia

Enunciado	**Valor de las variables**
P1. *Día de lluvia*. ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de la facultad si llueve?	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: desordenada Tamaño región: mediano
P2. *Baldosas*. ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Tamaño región: grande
P3. *Briznas de hierba*. ¿Cuántas briznas de hierba hay en este espacio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: desordenada Tamaño región: pequeño
P4. *Coches*. ¿Cuántos coches caben en el parking de la facultad si no dejamos espacio para pasar?	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: ordenada Tamaño región: grande

Dado que los problemas consisten en obtener una estimación el número de elementos que caben en una región rectangular, y que esto requiere que el resolutor reconstruya mentalmente el espacio bidimensional y distribuya los elementos, se han seleccionado las siguientes variables de contexto: el tamaño de los elementos, el tamaño de la región, la forma de los elementos y la disposición de los elementos en la región. Estas variables asumen un valor particular dentro de un posible conjunto de valores: tamaño (grande, mediano, pequeño), forma (regular, irregular) y disposición (ordenada, desordenada). A continuación, se detallan el enunciado y el valor de las variables de contexto para cada problema.

Descripción de la experiencia

La secuencia de problemas se propuso a un total de N=224 estudiantes de cuarto curso del grado de Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València que, en una sesión de clase de 45 minutos, trabajaron sobre los cuatro problemas presentados en la Tabla 1. Para cada uno de los problemas, no debían plantear una resolución completa, sino esbozar un plan de resolución indicando los datos necesarios para poder abordar la resolución del problema, así como los procedimientos matemáticos necesarios para llegar a obtener la estimación pedida, pero sin cuantificar ni realizar los cálculos, pues estos se harán en la segunda parte de la experiencia.

El instrumento de análisis se basa en descomponer el plan de resolución en dos componentes: modelo inicial y estrategia asociada. El modelo inicial incluye las simplificaciones e hipótesis que el resolutor asume sobre la configuración de los elementos cuyo número debe ser estimado; es decir, a cómo el resolutor distribuye los elementos en la superficie, ya sea por filas y columnas (unidimensional), o no-linealmente (bidimensional). La estrategia es la cadena de procedimientos relacionados con los conceptos de medición y proporcionalidad que aplica el resolutor para obtener la estimación del resultado. Los resultados muestran que existe una relación estadísticamente significativa entre las variables de contexto de los problemas y los planes de resolución propuestos por los estudiantes (Ferrando & Segura, 2020; Ferrando, Segura, & Pla-Castells, 2020). Se concluye que determinadas características del contexto influyen en los planes de resolución de los estudiantes: los problemas que presentan una situación con una disposición regular de los elementos promueven modelos iniciales lineales, mientras que la irregularidad da lugar a modelos iniciales bidimensionales. Además, un tamaño grande de los elementos incrementa el número de estrategias basadas en razonar a partir del área de los elementos, mientras que un tamaño pequeño de los elementos promueve la estrategia basada en su densidad. Por el contrario, el tamaño de la región no parece influir en los planes de resolución de los estudiantes.

La segunda parte de la experiencia tuvo lugar durante una sesión de 90 minutos, unos días después de la primera parte. Los 224 estudiantes se agruparon libremente en N = 63 grupos de entre 3 y 5 personas. Se entregó a cada grupo un legajo con los enunciados de los cuatro mismos problemas que en la primera parte de la experiencia y sus resoluciones individuales; y se les condujo a los espacios reales del entorno de la Facultad en los que están situados los problemas. Se les indicó que, para cada uno de los problemas, esta vez debían plantear una resolución completa *in situ*, realizando mediciones, tomando datos y ejecutando los procedimientos y cálculos necesarios para obtener una estimación numérica del número de elementos que caben en cada espacio de los problemas. Para ello, se les facilitaron instrumentos de medida: varios metros extensibles y un odómetro de rueda por grupo, para distancias más grandes. Así, la diferencia con la primera parte de la experiencia radica en la forma de trabajo (que ahora es grupal) y en la interacción con el contexto del problema.

Análisis de los factores de complejidad

En este trabajo se analizan los planes de resolución de los N=224 futuros maestros participantes para identificar si incorporan factores de complejidad en su modelo inicial o su estrategia de resolución; y a continuación se identifican los factores de complejidad en las N=63 producciones grupales.

El análisis cualitativo consensuado por los investigadores se basa en la categorización de los factores de complejidad expuesta en Albarracín, Ferrando y Gorgorió (2020):

- *Eliminación de obstáculos:* se identifican zonas en la región que impiden colocar elementos y se descuenta el área que ocupan del área total, con el fin de no incluir estas zonas en la estimación del número total de elementos;
- *Tamaño/densidad media:* se reconocen densidades de población distintas y se calcula una densidad media. En el presente trabajo se ha encontrado, además, producciones que incorporan el uso de la media aplicado a la estrategia basada en el área unitaria de los elementos, es decir: se reconocen distintos tamaños de los elementos a estimar y se calcula un tamaño medio para los elementos. En ambas variantes (densidad o tamaño), este factor de complejidad expresa un modelo heterogéneo en la disposición de los elementos y utiliza la media para realizar el trabajo matemático de la estimación sobre un modelo simple, homogéneo, que trate de "recoger" las posibles desviaciones;
- *Tamaños/densidades diferenciadas:* Reconocimiento de densidades de población distintas y estimaciones diferenciadas por zonas. En el presente trabajo se ha encontrado, además, producciones que incorporan el uso de estimaciones diferenciadas por zonas aplicadas a la estrategia basada en el área unitaria de los elementos, es decir: se reconocen distintos tamaños de los elementos a estimar y se realizan las estimaciones por separado, para cada tamaño. En ambas variantes (densidad o tamaño), este factor de complejidad expresa un modelo heterogéneo en la disposición de los elementos, y el trabajo matemático de la estimación se realiza sobre el mismo, aunque ordenado por zonas o tamaños.

El hecho de que las producciones individuales analizadas sean planes de resolución, que esbozan cómo debería encontrarse la solución, y no resoluciones completas con estimaciones y cálculos ejecutados, determina que los factores de complejidad tengan carácter de propuesta; es decir, no son operativos y por tanto no se integran en el proceso de resolución. A continuación, se analizaron, en base a las mismas categorías y de forma consensuada, los factores de complejidad en las N=63 resoluciones grupales. En este caso, a diferencia del plan de resolución individual, los factores de complejidad sí están integrados en la resolución grupal, son operativos en los procedimientos y cálculos asociados para obtener la estimación. El análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes se realizó mediante consensos por triangulación.

Resultados

Esta sección se divide en dos subsecciones: en la primera se exponen los resultados del análisis cualitativo de los factores de complejidad, describiendo para cada problema las categorías identificadas en las producciones de los N=224 estudiantes de la primera experiencia y de los N=63 grupos de la segunda experiencia. En la segunda subsección se presentan los resultados cuantitativos del análisis, que completan la descripción del apartado anterior.

Resultados cualitativos

A continuación se describen, para cada uno de los cuatro problemas, los resultados del análisis cualitativo de las producciones individuales (ítem a) y grupales (ítem b) basado en la categorización de factores de complejidad.

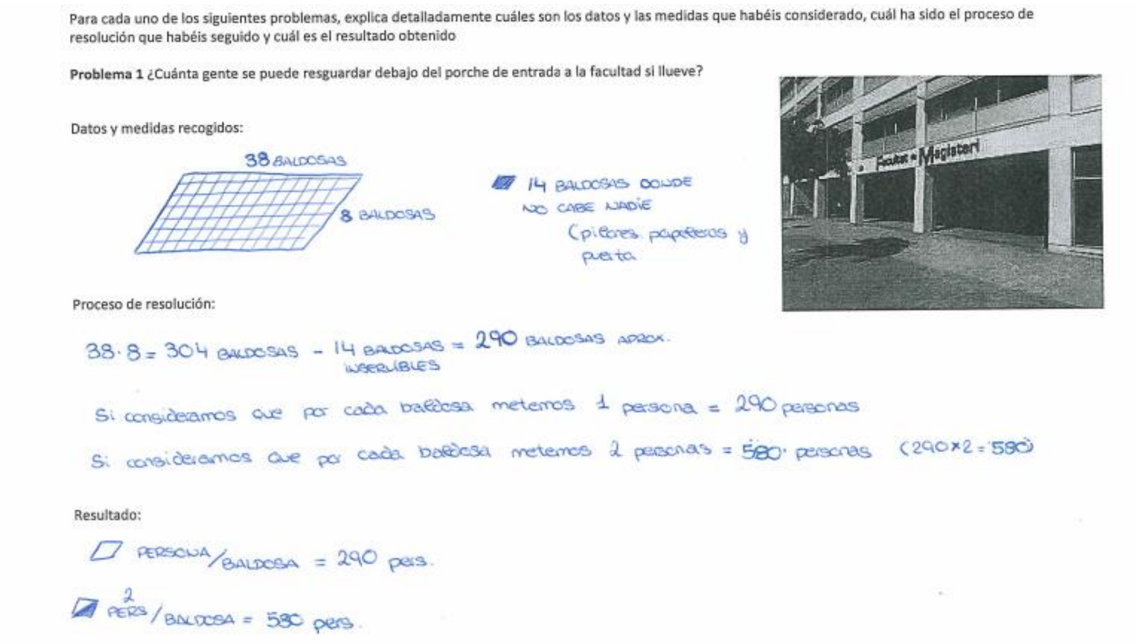
P.1. Día de lluvia

Ítem a. En los planes de resolución individual encontramos como factor de complejidad mayoritario (aparece en el 80% de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad en este problema) la categoría *tamaño/densidad media* aplicada al tamaño de las personas, es decir, la consideración de que las personas tienen distintos tamaños y por tanto la mención de estimar el área media ocupada por una persona, aunque ningún plan de resolución explicita cómo desarrollar el procedimiento. Es minoritaria, pero aparece, esta categoría aplicada a la densidad; por ejemplo, un plan explica que “mediría con personas diferentes, varias veces, cuántas personas caben en un m^2. A continuación sacaría una media de las personas que caben por m^2”.

También aparece la *eliminación de obstáculos* en el 30% de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad señalando que deben descontarse los pilares (que pueden observarse en la fotografía adjunta al enunciado – Figura 1) como único obstáculo.

Ítem b. En las resoluciones grupales el factor de complejidad dominante (que aparece en el 95% de las producciones que consideran factores de complejidad) es la *eliminación de obstáculos*. En la mayoría de las producciones grupales que incluyen este factor, aparece más elaborado que en los planes individuales: además de pilares incluyen puertas giratorias y papeleras, cuantificando este espacio inútil. Algunas resoluciones descuentan unidades de superficies medidas en baldosas (Figura 1), y otras calculan la superficie que ocupan en unidades convencionales (metros cuadrados). En el 10% de las resoluciones grupales que incluyen factores de complejidad aparece el factor de complejidad *tamaño/densidad media*, pero aplicado a densidades de personas por baldosa.

En una de las resoluciones se identifica el factor de complejidad *tamaños/densidades diferenciadas* aplicado a densidad de personas por baldosa, obteniendo dos estimaciones posibles (Figura 1).


Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Datos y medidas recogidos:

38 BALDOSAS

8 BALDOSAS

14 BALDOSAS DONDE NO CABE NADIE (pilares, papeleros y puerta

Proceso de resolución:

38 · 8 = 304 BALDOSAS − 14 BALDOSAS INSERVIBLES = 290 BALDOSAS APROX.

Si consideramos que por cada baldosa metemos 1 persona = 290 personas

Si consideramos que por cada baldosa metemos 2 personas = 580 personas (290×2 = 580)

Resultado:

PERSONA/BALDOSA = 290 pers.

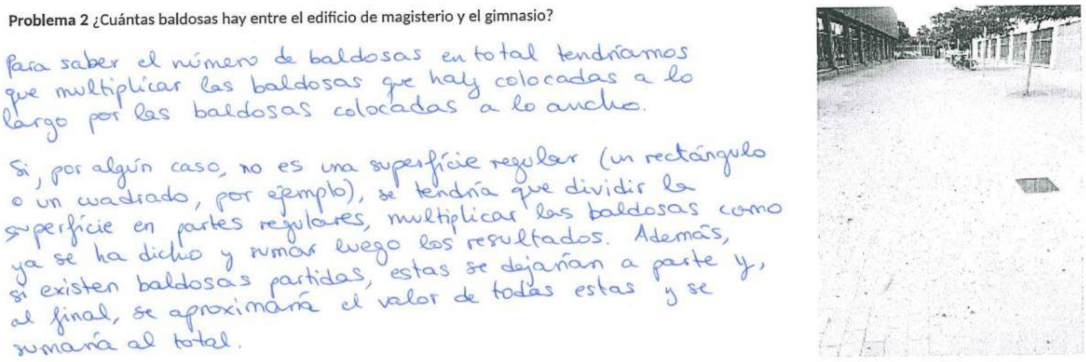
2 PERS/BALDOSA = 580 pers.

Figura 1. Resolución grupal completa de P1 con factores de complejidad *eliminación de obstáculos* y *tamaños/densidades diferenciadas*

P2. Baldosas

Ítem a. En los planes de resolución individual se encuentra como factor de complejidad mayoritario (en el 80% de las respuestas que incluyen factores de complejidad) la categoría *eliminación de obstáculos*, mencionando que hay zonas sin baldosas: los alcorques y las alcantarillas.

En el 20% restante, se encuentra la categoría *tamaños/densidades diferenciadas*, aplicada al tamaño de las baldosas. Así, se consideran dos tamaños de baldosa (entera y partida), llevando dos estimaciones distintas que deben sumarse para obtener el número total. En Figura 2 el resolutor escribe “si existen baldosas partidas, estas se dejarán a parte y, al final, se aproximaría el valor de todas estas y sumaría al total”.


Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Para saber el número de baldosas en total tendríamos que multiplicar las baldosas que hay colocadas a lo largo por las baldosas colocadas a lo ancho.

Si, por algún caso, no es una superficie regular (un rectángulo o un cuadrado, por ejemplo), se tendría que dividir la superficie en partes regulares, multiplicar las baldosas como ya se ha dicho y sumar luego los resultados. Además, si existen baldosas partidas, estas se dejarían a parte y, al final, se aproximaría el valor de todas estas y se sumaría al total.

Figura 2. Plan de resolución individual de P2 con factor de complejidad *tamaños/densidades diferenciadas*

Ítem b. En las resoluciones grupales el único factor de complejidad encontrado es *eliminación de obstáculos*, de manera muy similar a los planes de resolución, pero calculando las áreas de las zonas sin baldosas en unidades convencionales (metros cuadrados).

P3. Briznas de hierba

Ítem a. En los planes de resolución individual encontramos como factor de complejidad mayoritario (en el 85% de las resoluciones que incorporan factores de complejidad) la categoría *eliminación de obstáculos*, que incluyen menciones a descontar zonas sin hierba (árboles y alcantarillas, se perciben en la fotografía adjunta al enunciado – Figura 3).

En el 15% de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad se encuentra el factor de complejidad de *tamaños/densidades diferenciadas*, en los que se han identificado diferentes zonas con densidades de hierba variable, que se proponen estimar por separado.

Se ha identificado también en algunos planes de resolución individual (un 8% del total que incluyen factores de complejidad) el factor *tamaño/densidad media*, aunque sólo dos explicitan el proceso de obtención de la densidad media.

Ítem b. En las resoluciones grupales el factor de complejidad *eliminación de obstáculos* aparece en todas las producciones que incluyen factores de complejidad. En la mayoría de las producciones grupales que incluyen este factor, éste aparece más elaborado que en los planes individuales: incluyen variabilidad en los tamaños de las zonas despejadas de los árboles y de las alcantarillas (ver Figura 3); se cuantifican estas zonas y se descuentan del área total de la región de césped. Además, una de estas producciones incluye también el factor de complejidad *tamaño/densidad media* aparece en una resolución grupal, aplicado al tamaño de las briznas de hierba (se considera un tamaño medio de hierba).

Se identifica en una resolución grupal el factor de complejidad *tamaños/densidades diferenciadas,* en la que la región de césped se divide en varias zonas con distinta densidad, aunque no se realizan estimaciones diferenciadas y se acaba optando por un modelo homogéneo.

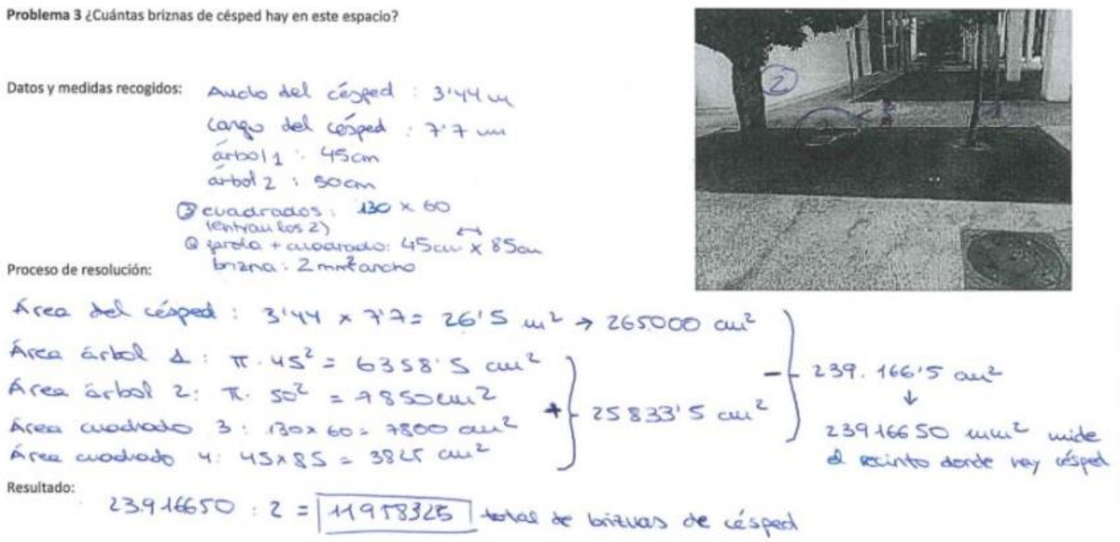


Figura 3. Resolución grupal completa de P3 con factor de complejidad *eliminación de obstáculos*

P4. Coches

Ítem a. En los planes de resolución individual encontramos el factor de complejidad de la categoría *tamaño/densidad media* aplicada al tamaño de los coches en el 96% de las resoluciones que incorporan factores de complejidad. En estas resoluciones se propone estimar un tamaño medio o estándar. Muy pocos planes de resolución explican el proceso de obtención del tamaño medio ocupado por un coche: por ejemplo, en la Figura 4, el estudiante escribe "mediría el ancho y largo de 5 coches distintos y haría la media [del área] del coche".

En tres planes de resolución se ha identificado la categoría *eliminación de obstáculos*, pese a que no se perciben en la fotografía adjunta al enunciado del problema.

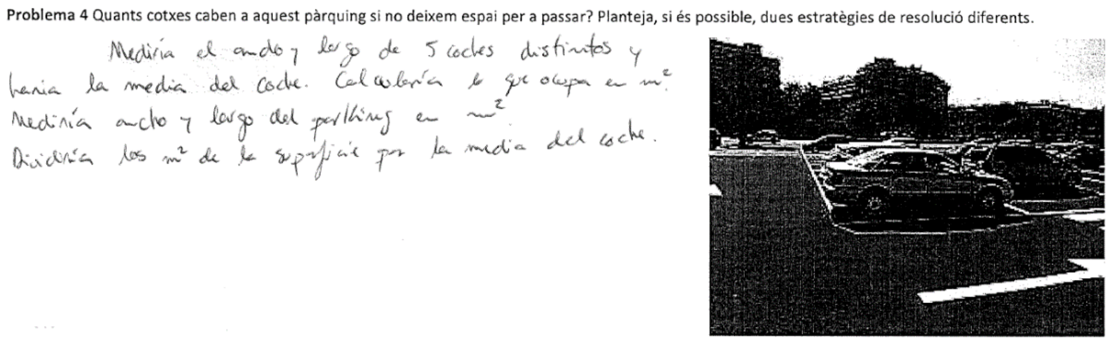


Figura 4. Plan de resolución individual de P4 con factor de complejidad *tamaño/densidad media*

Ítem b. En las resoluciones grupales el factor de complejidad dominante (en un 71% de las producciones que incorporan factores de complejidad) es, sin embargo, la *eliminación de obstáculos*, de manera muy similar a los planes de resolución, pero calculando las áreas de las zonas sin coches en unidades convencionales (metros cuadrados, disponían de un odómetro de rueda). En cinco resoluciones grupales aparece el factor de complejidad *tamaño/densidad media* aplicado al tamaño variable de los coches, calculando el tamaño medio de una pequeña muestra de coches aparcados en el aparcamiento.

Resultados cuantitativos

En la Tabla 2 se recogen los datos relativos al porcentaje de resoluciones individuales y grupales que incorporan cada uno de los tres factores de complejidad descritos en el apartado de metodología: *eliminación de obstáculos, tamaño/densidad media y tamaños/densidades diferenciadas*.

Tabla 2. Incorporación de factores de complejidad en la resolución individual y grupal de cada problema

	Eliminación de obstáculos		**Tamaño/densidad media**		**Tamaños/densidades diferenciadas**	
	Individual	Grupal	Individual	Grupal	Individual	Grupal
P1	7%	63%	19%	6%	1%	2%
P2	4%	16%	0%	0%	1%	0%
P3	10%	43%	1%	2%	2%	2%
P4	1%	16%	21%	8%	0%	0%

Se observa que los problemas P1 y P4, consistentes en estimar el número de personas y de vehículos, dan lugar a resoluciones individuales que introducen en mayor proporción factores de complejidad, en particular la incorporación de un elemento de referencia con un tamaño “medio” o “estándar”. Al observar las resoluciones grupales, la eliminación de obstáculos aumenta significativamente pero el *tamaño/densidad media* disminuye también de manera significativa. En las resoluciones grupales de los problemas P2 y P3 hay un aumento considerable de la incorporación del factor de complejidad *eliminación de obstáculos* (especialmente en P3). En cualquier caso, en el problema P2 la presencia de factores de complejidad es baja tanto en planes de resolución individual como en resoluciones grupales. Globalmente, se observa que en las resoluciones grupales disminuye la proporción que incluye el uso de un *tamaño/densidad media*, mientras que aumenta de forma significativa (sobre todo en el primer problema) el número de resoluciones grupales que consideran la *eliminación de obstáculos*.

Respecto a la proporción de producciones en las que se identifica uno o más problemas resueltos considerando factores de complejidad, en la Tabla 3 se muestran los resultados grupales e individuales.

Tabla 3. Número de resoluciones individuales y grupales que incorporan factores de complejidad

Cantidad de problemas en los que se consideran factores de complejidad	**Individuales**	**Grupales**
0	133 (59%)	11 (17%)
1	53 (24%)	24 (38%)
2	35 (16%)	18 (29%)
3	3 (1%)	7 (11%)
4	0 (0%)	3 (5%)
Total	224	63

Se observa que el porcentaje de estudiantes que, individualmente, son capaces de incorporar factores de complejidad en más de un problema es muy bajo. En el caso de las producciones grupales el porcentaje es superior. Globalmente, sólo el 41% de los estudiantes incorporan factores de complejidad en sus resoluciones individuales, mientras que una amplia mayoría (83%) las incorporan en sus producciones grupales. Cabe pensar que el hecho de que las resoluciones grupales se realizaran *in situ* haya influido a la hora de identificar aspectos que no habían sido considerados previamente.

Finalmente, se han cuantificado, para cada problema, las producciones que incorporan más de un factor de complejidad. Los resultados se presentan en la Tabla 4. Hay pocos estudiantes que en sus producciones individuales proponen más de un factor de complejidad; esto ocurre, en mayor medida, en el primer problema P1, en el que siete estudiantes consideran la *eliminación de obstáculos* y un valor promedio para la densidad. Esta proporción es también reducida en las resoluciones grupales, en el primer problema solo tres grupos consideran un par de factores de complejidad (*eliminación de obstáculos* y *densidad promedio,* o *eliminación de obstáculos* y *densidad diferenciada*). Al analizar las producciones grupales esta proporción se multiplica, en particular en el problema P4 (consistente en estimar el número de vehículos).

Tabla 4. Incorporación de uno o más factores de complejidad en la resolución individual y grupal según el problema

	Producciones que consideran 1 factor de complejidad		**Producciones que consideran 2 factores de complejidad**	
	Individual	Grupal	Individual	Grupal
P1	21%	58%	3%	4,5%
P2	4,4%	15%	0%	0%
P3	10,7%	37%	0,8%	3%
P4	21%	20%	0,4%	1,5%

Discusión y conclusiones

Los resultados del análisis permiten dar respuesta al primer objetivo del estudio: se han determinado cuáles son los factores de complejidad que se incorporan en las resoluciones individuales y grupales, y en qué medida su aparición evoluciona de la resolución individual a la grupal. Se ha observado que, aunque la proporción de propuestas que incorporan factores de complejidad es creciente en las grupales respecto a las individuales, el aumento es desigual en función de los factores de complejidad analizados. Mientras que aumenta el factor *eliminación de obstáculos* en todos los problemas de la secuencia, disminuye el factor *tamaño/densidad media* en los problemas P1 y P4. El crecimiento del factor *eliminación de obstáculos* se puede explicar por el hecho de que el trabajo *in situ* permite observar obstáculos que no se habían evocado en la resolución individual en el aula. Por otro lado, el hecho de que en el aula los alumnos se hayan limitado a plantear individualmente un plan de resolución, y no una resolución completa, parece promover que incorporen procedimientos cuya implementación es compleja, tales como calcular tamaños o densidades medias, que en la realidad implicaría hacer varias mediciones. En cualquier caso, esto se confirmaría replicando esta experiencia con la variación de las condiciones del trabajo individual, pidiendo en ese caso a los alumnos que no se limitaran a obtener un plan de resolución, sino que trataran de razonar con valores estimados.

En respuesta al segundo objetivo sobre las características del contexto que promueven la incorporación de factores de complejidad, en base a los resultados del análisis cuantitativo del presente estudio, se observa (véase la Tabla 5) que las variables de contexto (descritas en la Tabla 1) influyen sobre la presencia de determinados factores de complejidad que completan tanto el plan de resolución individual como la resolución grupal completa. La Tabla 5 resume, en base a los resultados del análisis, las relaciones entre los valores de las variables de contexto de los problemas de la secuencia y los factores de complejidad identificados en las producciones individuales y grupales. Solo se ha incluido en la Tabla 5 los valores de las variables de contexto que, en base a lo observado en este estudio, condicionan la incorporación de factores de complejidad.

Tabla 5. Relación entre variables del contexto del problema y factores de complejidad considerados en las resoluciones

Variable del problema	**Plan de resolución individual**	**Resolución grupal completa**
Tamaño región: pequeño/ mediano	Los problemas P1 y P3 en los que la región tiene un tamaño medio o pequeño parecen promover, en las resoluciones individuales, la incorporación del factor de complejidad que considera los obstáculos.	En las resoluciones grupales de los problemas P1 y P3 la incidencia de resoluciones que consideran el espacio útil como factor de complejidad es muy alta, tanto en relación a los otros factores de complejidad, como en relación a los otros dos problemas.
Tamaño elementos: mediano/grande	Los problemas P1 y P4 en los que los elementos cuyo número se quiere estimar tienen un tamaño medio o grande parecen promover, en las resoluciones individuales, la incorporación de estimar en base a un tamaño medio.	En las resoluciones grupales de los problemas P1 y P4, sin embargo, la incidencia de las resoluciones que consideran un tamaño medio se reduce en, aproximadamente un tercio.

Estas relaciones ponen de manifiesto que existe una evolución desde los planes individuales a las resoluciones grupales. Por una parte, esta evolución implica la casi total desaparición del factor complejidad consistente en estimar en base a un área o densidad media en los problemas P1 y P4 (en P2 y P3 ya era bajo en los planes de resolución individual). Esto se explica porque la ejecución de los cálculos es más complicada cuando hay que promediar tamaños o considerar heterogeneidad que cuando solo hay que sugerir el procedimiento (en el plan individual), ya que implica un trabajo experimental sobre el terreno que los participantes no hacen, quizá porque sea costoso o tal vez por falta de tiempo. Sin embargo, el factor de complejidad consistente en considerar el área útil aumenta en todos los problemas, pero especialmente en P1 y P3, donde ya era relativamente alto en los planes de resolución individuales. Esto se explica porque son dos problemas con regiones pequeñas o medianas, en las que es sencillo hacer mediciones y estimaciones de las dimensiones del espacio, y por tanto calcular su área. En esa tarea relativamente asequible para sus instrumentos de medida (odómetros y metros extensibles), el hecho de considerar las partes de la región con obstáculos no supone una carga de trabajo excesiva. Cabe destacar que, en los problemas P2 y P4 los obstáculos (árboles y alcantarillas en P2; barreras en P4) ocupan un área muy pequeña en relación con la superficie total, que es grande, y por tanto, en este caso, considerar o no el área útil no es significativo a la hora de estimar el número de elementos del área total. De hecho, en el problema P2, el tamaño de la región es grande y el de los elementos es pequeño, lo que explica la reducida proporción de producciones que incorporan factores de complejidad. Los resultados de este análisis se alinean y completan los obtenidos en trabajos previos (Ferrando, Segura, & Pla-Castells, 2021; Ferrando & Segura, 2020), en los que observó que las variables de contexto influyen sobre el tipo de resolución escogida por los estudiantes.

En relación a los resultados sobre el número de factores de complejidad considerado por los resolutores, los resultados muestran que los futuros maestros no construyen modelos y estrategias muy refinadas para estimar cantidades, sino que ofrecen planes de resolución individuales y resoluciones grupales simples, en el mejor de los casos incluyendo un único factor de complejidad. Observamos que los futuros maestros extraen poco potencial a la geometrización del espacio y de los elementos, y a los procedimientos matemáticos que permiten un mayor rigor en el proceso cuanta más información empírica se incorpore.

Los resultados de este estudio son claves para identificar la importancia del trabajo de campo en el proceso de resolución de tareas de estimación formuladas en contextos reales cercanos a los estudiantes y, por tanto, el interés de proponer tareas con contextos auténticos y cercanos a los estudiantes. En efecto, se observa que los planes de resolución se enriquecen en las resoluciones grupales, aunque esto no ocurre en la misma medida en todos los problemas. Entendemos que la actividad individual pone forzosamente a cada futuro maestro ante la necesidad de resolver el problema, pero que es la actividad grupal la que le permite observar la riqueza de las diferentes visiones de la realidad y su relación con los conceptos y procedimientos matemáticos usados para explicarla. En nuestro estudio los futuros maestros trabajan siguiendo las instrucciones proporcionadas, pero sin incluir una guía específica por parte de sus profesores (los formadores de maestros). Entendemos que en una actividad de tipo exclusivamente formativo es potencialmente posible proporcionar sugerencias a los alumnos que enriquezcan los modelos que construyen y aumentando las posibilidades de reflexión sobre la complejidad de la actividad.

En relación al conocimiento del profesor, los resultados del análisis nos permiten detectar carencias en conocimiento de las tareas matemáticas para la enseñanza por parte de los maestros en formación. Los problemas de Fermi utilizados en el estudio son tareas cognitivamente demandantes para los alumnos de Educación Primaria a la par que accesibles para los futuros maestros, pero es necesario que el profesorado conozca en detalle la forma de trabajar adecuadamente con ellos en el aula. Dado que este tipo de actividades de introducción a la modelización matemática no son comunes en España, los futuros maestros no las han trabajado previamente en su etapa como alumnos. Por ello es necesario que los futuros maestros reciban una formación específica que incluya la resolución de problemas de Fermi en contextos reales y cercanos, para que observen las dinámicas de trabajo que se requieren en su resolución. Sin embargo, entendemos que la formación debe incluir aspectos teóricos que expliciten la naturaleza de la actividad desarrollada en la resolución, en este caso la modelización matemática, y que se analice a posteriori el trabajo realizado desde esta perspectiva. Esta podría ser la forma de promover que los futuros maestros planteen actividades de este tipo manteniendo el nivel de desafío adecuado para promover las competencias de modelización matemática de su alumnado, superando así las dificultades identificadas por Wilkie (2016). En cualquier caso, para tener una visión más completa de esto sería necesario complementar este estudio con una investigación centrada en aspectos afectivos que permita analizar la reflexión de los futuros sobre las dificultades y las ventajas de implementar este tipo de actividades en las aulas de educación primaria.

Agradecimientos

La segunda autora agradece la ayuda del proyecto de Investigación del Plan Nacional de I+D+I, EDU2017-84377-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad/Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Lluís Albarracín es profesor Serra Húnter en la Universitat Autònoma de Barcelona y agradece el soporte de los proyectos EDU2017-82427-R (Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, Spain) y 2017 SGR 497 (AGAUR, Generalitat de Catalunya).

Referencias

Albarracín, L., Ferrando, I. & Gorgorió, N. (2020). The role of context for characterising students' strategies when estimating large numbers of elements on a surface. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10107-4

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Albarracín, L. & Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 27*(2), 33–45. http://dx.doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004

Anderson, P. M., & Sherman, C. A. (2010). Applying the Fermi estimation technique to business problems. *Journal of Applied Business and Economics, 10*(5), 33–42.

Arbaugh, F., Lannin, J., Jones, D. L., & Park- Rogers, M. (2006). Examining instructional practices of CorePlus lessons: Implications for professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 517–550. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9019-3

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J., & Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 597-609). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_52

Ärlebäck, J. B., & Frejd, P. (2013). Modelling from the perspective of commognition–An emerging framework. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 47–56). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_3

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record, 110*(3), 608–645.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham, Switzerland: Springer international publisher. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Camacho, A. M. R., & Guerrero, L. S. (2019). Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. *Quadrante*, *28*(2), 100-124. https://doi.org/10.48489/quadrante.23029

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5), 308–309.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Mathematics, Science and Technology Education, 3*(1), 19-36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(2), 77-106. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148530

Efthimiou, C. J. & Llewellyn, R. A. (2006). Avatars of Hollywood in physical science. *The Physics Teacher, 44*, 28–33. https://doi.org/10.1119/1.2150756

Ferrando, I. & Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. & Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Ferrando, I. & Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 84-97. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.306

Ferrando, I. Segura, C. & Pla-Castells, M. (2020). Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 557-573. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00102-w

Ferrando, I., Segura, C. & Pla-Castells, M. (2021). Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks involving estimations. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 119-128). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_10

García, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon, 30*(2), 57-68.

Goldin, G. A., & McClintock, C. E. (Eds.) (1979). *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* Ohio: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00006-6

Haberzettl, N., Klett, S., & Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule—Modellieren mit Fermi-Aufgaben. In K. Eilerts, & K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31–41). Wiesbaden: Springer Spectrum.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. W. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop* (pp. 14-27). Ohio: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the learning of mathematics, 26*(1), 42-47.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. In B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131-146). Dordrecht: Springer.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sriraman, B., & Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange, 40*(2), 205-223. https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80. https://doi.org/10.1080/1380361960020103

Thompson, A. G. (1985). Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 281-294). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tirosh, D., Tirosh, C., Graeber, A., & Wilson, J. (1991). Computer-based intervention to correct preservice teachers' misconceptions about the operation of division. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 10*, 71-78.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders*. Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 577-601. https://doi.org/10.2307/749692

Webb, N. L. (1980). Content and context variables in problem tasks. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* Philadelphia, PA: The Franklin Institute Press.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41-65. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1

Wilkie, K. J. (2016). Rise or resist: Exploring senior secondary students' reactions to challenging mathematics tasks incorporating multiple strategies. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(8), 2061-2083. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1260a