# Diseño de una experiencia de modelización en una situación de optimización

## Instructional design of a modeling experience in an optimization situation

**María Elena Irigoyen Carrillo**
Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango
México
elena.irigoyen@ujed.mx

**Angelina Alvarado Monroy**
Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango
México
aalvarado@ujed.mx

**Maria Teresa González Astudillo**
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
maite@usal.es

**Resumen.** La necesidad de optimizar está presente en numerosas situaciones de la vida real y se pueden encontrar una variedad de contextos para modelar fenómenos que requieren encontrar un valor óptimo. En este trabajo se describe y analiza el proceso de diseño y experimentación de una tarea de optimización situada en un contexto real y centrada en la perspectiva de Modelos y Modelización desarrollada por Lesh y Doerr. En la experimentación participaron 13 estudiantes de Educación Media Superior, 24 estudiantes recién egresados del mismo nivel que iniciaban estudios de licenciatura en Matemáticas Aplicadas y 7 estudiantes de una maestría en modelización. Se realizaron dos ciclos iterativos de Investigación Basada en el Diseño en la que los principios de diseño de una actividad de la perspectiva de Modelos y Modelización y las formas de pensamiento reveladas por los estudiantes fueron los principales instrumentos para informar sobre la evolución de la tarea. Los resultados obtenidos de la experimentación evidencian el proceso de modelización que siguieron los estudiantes y los modelos generados. Además, se reflexiona sobre el cumplimiento de los principios de diseño, se describen los cambios de la tarea y se discute su factibilidad.

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 30(1) 242-266
https://doi.org/10.48489/quadrante.23593
Received: January 2021 / Accepted: May 2021

*Palabras-clave:* optimización; perspectiva de Modelos y Modelización; investigación basada en diseño; derivada.

**Abstract.** The need to optimize is present in numerous real-life situations. A variety of interesting contexts can be found for modelling phenomena that require finding an optimal solution. In this paper we describe and analyse the design and experimentation process of an optimization task situated in a real context and focused on the Models and Modelling Perspective developed by Lesh and Doerr. The experimentation was carried out with 13 high school students, 24 starting their undergraduate studies in Applied Mathematics and 7 master's students on Models and Modelling. Through the models generated, the participants showed the development of their conceptual systems associated with optimization. The Design-based research was the adopted methodology, by carrying out two iterative cycles, in which the principles of instructional design of a model-eliciting activity of Models and Modelling and the ways of thinking revealed by the students were the main instruments to inform the evolution of the modelling sequence. The results obtained from the experimentation show the modelling process followed by the students and the models they generated. It was the basis to reflect on the adherence to the principles of instructional design, considering the changes in the task, and, finally, we discuss its feasibility.
*Keywords*: optimization; Models and Modelling Perspective; instructional design; derivative; design based research.

## Introducción

Optimizar es una acción natural a la que se recurre cuando buscamos la forma ideal para realizar numerosas actividades como ir de un lugar a otro, realizar alguna compra, planear un viaje, establecer un negocio, entre otras. Estos ejemplos involucran realizar una mejor gestión de los recursos que tenemos a nuestro alcance, por ejemplo, tiempo, dinero, distancia, material y esfuerzo.

En México, la optimización es uno de los temas abordados en el curso de Cálculo Diferencial durante la Educación Media Superior (EMS), nivel obligatorio para estudiantes de entre 15 y 17 años (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) que se desarrolla a partir del concepto de derivada. Con la resolución de problemas de optimización se pretende estimular una perspectiva intuitiva en el estudiante con el fin de que pueda dar soluciones óptimas a los problemas cotidianos que se le presenten. Esta intuición, muchas veces no se desarrolla adecuadamente por el hecho de presentar prematuramente formalizaciones y métodos específicos (Malaspina, 2007). Esto conlleva que los estudiantes aprendan los procedimientos algorítmicos quizás de manera correcta, pero carentes de significado (Hiebert & Lefevre, 1986). Estos dos estudios ponen de relieve la necesidad de un tratamiento de situaciones contextualizadas de optimización en el nivel previo a la educación superior.

Por otro lado, Trigueros (2009) sugiere la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos. Con la introducción de la modelización matemática en el aula, se espera que los estudiantes sean capaces de enfrentar situaciones de optimización y de explorar distintas formas de representarlas en términos matemáticos, de examinar las relaciones que éstas conlleven, manipular dichas representaciones y relaciones, así como, desarrollar ideas que permitan una aproximación hacia las matemáticas que se desean enseñar (Lehrer & Schauble, 2000; Lesh & English, 2005). Algunos estudios situados en la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM), presentan evidencias de que la modelización matemática puede aprenderse en ciertos entornos (Abrantes, 1993; Aliprantis & Carmona, 2003; Domínguez, 2010; Galbraith & Clathworthy, 1990; Kaiser-Messmer, 1987), a pesar de la dificultad en su enseñanza.

La necesidad de un tratamiento de situaciones contextualizadas de optimización en el nivel previo a la educación superior ha guiado la realización de esta investigación con la que se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características deberá tener una secuencia de optimización y cuáles son los cambios que se deben producir en el diseño de la secuencia para cubrir todos los principios de la PMM?

## Marco conceptual

Para Kaiser (2016), la modelización matemática es concebida como un proceso creativo que da sentido al mundo real para describir, controlar y optimizar aspectos de una situación; interpretar resultados y hacer los ajustes necesarios al modelo en caso de no ser adecuado para la situación. Abassian, Safi, Bush y Bostic (2020) proponen seis perspectivas para introducir la modelización en el aula clasificadas de acuerdo a los objetivos y a las creencias teóricas de los investigadores: educativa, realista, sociocrítica, modelos y modelización, epistemológica y modelos emergentes. En este artículo nos centramos en la PMM en la que los *modelos* se conciben como:

> sistemas conceptuales (consistentes de elementos, relaciones, operaciones y reglas gobernando interacciones) que se expresan usando sistemas de notación externa, y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas – de manera que los otros sistemas puedan ser manipulados o predecirse de forma inteligente. (Lesh & Doerr, 2003, p. 10)

Para construir tales modelos, se diseñan tareas del mundo real que permiten promover el desarrollo de conceptos matemáticos. Dichas tareas son conocidas en la PMM como actividades detonadoras de modelos (por sus siglas en inglés, *Model Eliciting Activities*, MEAs) y con ellas, los estudiantes desarrollarán simultáneamente sus ideas matemáticas y su competencia para resolver problemas (Doerr, 2016; Lesh & Doerr, 2003). Las MEAs permiten a los docentes ver cómo se desarrollan los conceptos y las estrategias de los estudiantes; qué conceptos erróneos surgen en el proceso de modelización; y cómo las representaciones de los estudiantes son más o menos útiles para describir, explicar o para hacer predicciones sobre la situación del problema. Además, motivan a los alumnos a expresar, probar y refinar o revisar repetidamente sus propias formas de pensamiento, a través de la creación de herramientas conceptuales poderosas y reutilizables que involucran mucho más que simples respuestas a preguntas como las enfatizadas en los libros de texto y en las pruebas tradicionales (Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewsky, 2003).

Las experiencias de resolución de problemas sugeridas en la PMM pueden servir para motivar reflexiones sobre algunas ideas fundamentales, representaciones y técnicas matemáticas. Los estudiantes requieren de apoyo para familiarizarse con el contexto y la situación dada, extraer información relevante y extender los pensamientos e intuiciones que les permitirán resolver la situación en estudio y explorar la generalidad y el significado matemático de los modelos generados. Por ello, Brady, Eames y Lesh (2015), al igual que Doerr (2016), consideran que no es suficiente proponer una sola actividad, es necesario proponer secuencias de desarrollo de modelos en las cuales se incorporan actividades previas de calentamiento (AC) y actividades posteriores, de extensión y aplicación, a las MEAs.

Para el diseño de la MEA que aquí se presenta se han considerado los seis principios de diseño desarrollados por Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post (2000): *el principio de la realidad* –¿podría esto realmente suceder en la vida real?–; *el principio de la construcción del modelo* –¿asegura la tarea que los estudiantes reconozcan claramente la necesidad de construir, modificar, ampliar o refinar un modelo?–; e*l principio de la autoevaluación* –¿los criterios son claros para que los estudiantes puedan evaluar la utilidad de las respuestas alternativas?–; *el principio de la documentación del modelo* –¿la respuesta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente cómo están pensando acerca de la situación?–; *el principio del prototipo simple* –¿es la situación lo más simple posible, al mismo tiempo que crea la necesidad de un modelo significativo?–; e *el principio de la generalización del modelo* –¿el sistema conceptual que se construye se aplica sólo a una situación particular, o se puede modificar y extender fácilmente para que se aplique a una amplia gama de situaciones?–.

La interpretación matemática de un problema no siempre es trivial dada la complejidad de los problemas del mundo real para los cuales se usa la modelización matemática y la multitud de modelos que pueden construirse para una situación. En una MEA los alumnos pasan por una serie de interpretaciones de la situación presentada a través de diferentes medios de representación y varios ciclos de modelización en los que las descripciones, explicaciones y predicciones de los propios estudiantes se refinan, revisan o rechazan gradualmente según los resultados de sus pruebas de ensayo (Lesh y Doerr, 2003). El objetivo de las representaciones implica que los estudiantes se comuniquen consigo mismos y que externen sus propios modos de pensamiento de forma que puedan ser examinados y mejorados (Lesh, 1997).

Las situaciones de optimización, dada su presencia en la vida real, se prestan para el diseño de actividades de modelización. Los estudios de Aliprantis y Carmona (2003) y Dominguez (2010), que combinan el uso de la modelización matemática con la resolución de problemas de optimización, abordan un mismo problema de optimización de tipo económico, conocido como "el problema del Hotel Histórico", con estudiantes de Estados Unidos de educación secundaria (11-13 años) y universitaria (curso inicial de cálculo), respectivamente. Sus resultados muestran que las MEAs generan múltiples formas de pensamiento y resaltan los diferentes constructos obtenidos y revelados por los estudiantes. En el caso de Aliprantis y Carmona (2003), a pesar de que los estudiantes no habían trabajado conceptos relacionados con funciones cuadráticas o sobre maximización, encontraron poderosos modelos matemáticos que permitieron dar solución al problema. Por su parte, Dominguez (2010) comenta que este tipo de actividades permiten generar nuevas actividades de obtención de modelos para las matemáticas, la física, la economía, la biología, entre otras, con una sola respuesta, pero con múltiples perspectivas.

Por otro lado, en el estudio de Tran y Doughertyen (2014) realizado con estudiantes de Estados Unidos de entre 15 y 17 años se pide la optimización del diseño de una lata de refresco, ilustrando el proceso de modelización para su resolución y cómo dicha situación logra satisfacer los principios que hacen de ella un ejemplo de situación auténtica de modelización.

Finalmente, tanto en las tareas que demandan optimizar y/o explorar fenómenos que involucran variación continua, la incorporación de tecnología digital ayuda a enriquecer los ambientes de aprendizaje al promover que los estudiantes incrementen su eficiencia para razonar e interpretar los fenómenos de variación continua que se están modelizando (Ärlebäck & Doerr, 2018).

## Metodología

Para este estudio se usó una metodología de Investigación Basada en el Diseño (IBD). Se trata de una metodología cualitativa, intervencionista y con un enfoque formativo de la investigación, en la que se diseña, se desarrolla y se refina un producto o proceso a través de ciclos iterativos de concepción del diseño, observación, análisis y rediseño, acompañados de una retroalimentación sistemática de los usuarios finales (Bakker & van Eerde, 2015). Los investigadores que emplean esta metodología hacen, prueban y refinan sus conjeturas sobre la marcha basándose en las evidencias que van obteniendo durante el estudio; actuando como docentes, en algunos casos, y recogiendo evidencias sobre lo que aprenden alumnos, docentes e investigadores (The Design Based Research Collective [DBRC], 2003).

En este trabajo se siguieron dos ciclos de diseño para atender los principios de la PMM, y se reflexionó acerca del sistema conceptual asociado a la tarea. La evolución de la secuencia se informó a través de las distintas fases que componen dicha metodología:

preparación y diseño, experimentación en el aula y análisis retrospectivo; donde se consideraron los procesos de modelización y modelos generados para interpretar las situaciones y resolver las tareas. Además, se examinó el cumplimiento de los principios de diseño de la MEA propuesta.

## Contexto y participantes

De las tres investigadoras, una actuó también como profesora en las tres aulas (grupos mixtos de hombres y mujeres) en las que se realizó la experimentación y todas participaron en el diseño de las tareas y de la investigación, así como en el análisis de los datos.

En el ciclo 1, se trabajó con 24 estudiantes recién egresados de la EMS (18 años) que iniciaban la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Primero, se introdujo la necesidad de optimizar a través de una AC, que trata sobre cubrimientos en el plano y en el espacio (Sáenz de Cabezón, 2015). Luego se implementó la MEA que demandaba encontrar las dimensiones de un depósito de volumen fijo para optimizar su superficie (Figura 1). Este grupo se organizó en siete equipos de entre tres y cuatro estudiantes que trabajaron en un aula convencional a lo largo de dos sesiones: la primera de dos horas y la segunda de una hora. Para el ciclo 2 se mejoraron las tareas con el análisis de resultados del ciclo 1, resultando una propuesta refinada de la secuencia que constó de: la misma MEA que en el ciclo 1, pero con un depósito cilíndrico (Figura 2); y, una AC que demandaba encontrar el camino de menor longitud entre dos puntos en el espacio y se apoyaba de un manipulativo elaborado en GeoGebra para facilitar la comprensión a través de la exploración (Figura 3). Por motivos derivados de la pandemia actual, la secuencia no se logró implementar en su totalidad con estudiantes de EMS. Únicamente fue posible experimentar la AC con un grupo de 13 estudiantes del último año de dicho nivel que se dividieron en cinco equipos de entre dos y tres integrantes, empleando una hora y media para su solución. Fue necesario equipar el aula con un proyector y dotar de una tableta electrónica a cada equipo.

Dada la situación, y con el objetivo de seguir enriqueciendo el diseño de la secuencia y explorar su funcionamiento didáctico, se decidió implementarla de manera virtual con un grupo de 7 estudiantes de una maestría en educación con especialidad en modelización matemática, que eran profesores de educación secundaria (sus alumnos tienen entre 12 y 15 años) y EMS en servicio. La implementación se realizó en tres sesiones con una duración de 50 minutos, 3 horas y 2 horas, respectivamente. Para desarrollar la actividad los participantes se dividieron en tres equipos de entre dos y tres integrantes. Su apoyo fue fundamental para anticipar, en colectivo, los modelos y los posibles escenarios al implementar la propuesta dentro del aula de EMS.

El trabajo en el aula se organizó en tres momentos: 1) introducción mediante una AC; 2) resolución de la MEA en equipos de 3-4 estudiantes; y, 3) discusión plenaria de las producciones generadas por los equipos.

En el primer ciclo no se promovió el uso de la tecnología digital, dando libertad a los estudiantes de utilizar las herramientas que ellos consideraran necesarias para representar sus modelos. Sin embargo, para el segundo ciclo se optó por promover el uso de herramientas digitales (e.g., *Geogebra*, *Excel*, procesadores de texto, entre otros) que facilitarán la exploración de las situaciones, la representación de los modelos generados para resolverlas y la comunicación de resultados.

## Diseño de las tareas

El diseño de las tareas estuvo inspirado en problemas de optimización clásicos, tales como *El problema de Herón* y *El problema de Dido* (Tikhomirov, 1991), que se pueden abordar con técnicas algebraicas y geométricas. En el primer ciclo se propuso una MEA, que extiende *El problema de Dido* a tres dimensiones, y que trata sobre el diseño de un depósito de volumen fijo para la recolección de agua de lluvia que optimice su superficie (Figura 1).

Para generar el mayor ahorro de agua, Carlos ha decidido construir un sistema de captación de lluvia y de almacenamiento que permita recolectar el agua de lluvia para emplearla en algunas tareas del hogar. Durante el diseño de su sistema, Carlos ha tenido un problema, pues no logra decidir cuál, de todas las formas, es la ideal para el depósito de almacenamiento de agua, ya que el material con el que quiere construirlo es algo costoso.

¡Ayudemos a Carlos!
Ayuda a Carlos a encontrar un diseño para su depósito, de manera que éste pueda acumular aproximadamente mil litros de agua y que además requiera de la menor cantidad de material para su construcción. Haz una carta donde le expliques a detalle tu diseño (dimensiones) y por qué le podría ser útil, además, sugiérele qué hacer en caso de que la capacidad de almacenamiento cambie. Esto seguramente le ayudará para decidir qué formas utilizar en construcciones donde requiera mayor o menor capacidad de almacenamiento.

Figura 1. Parte de la situación contextualizada de la tarea de optimización (Ciclo 1)

En el segundo ciclo se trató una versión refinada de la situación de optimización planteada en la MEA (Figura 2). Su cambio principal consistió en resolver la tarea para una forma del depósito específica, las razones que sustentan dicho cambio se discutirán en la sección de resultados.

¡Ayudemos a Carlos!

Carlos ha decidido emplear la forma cilíndrica para el diseño del depósito. Ayúdalo a determinar las dimensiones ideales del depósito de manera que éste pueda acumular aproximadamente dos mil litros de agua y requiera de la menor cantidad de material para su construcción. Haz una carta donde le expliques a detalle tu diseño y por qué le podría ser útil, además, sugiérele qué hacer en caso de que la capacidad de almacenamiento cambie, pues esto le ayudará a decidir qué dimensiones emplear en construcciones donde requiera mayor o menor capacidad de almacenamiento.

Figura 2. Parte de la situación contextualizada de la tarea de optimización (Ciclo 2)

Previo a la resolución de la MEA, en ambos ciclos, se planteó una AC para familiarizar a los estudiantes con el contexto de la MEA. En el primer ciclo, la AC consistió en visualizar el video de Sáenz de Cabezón (2015) que trata sobre cubrimientos en el plano y en el espacio. En él se aborda la noción de optimizar al reflexionar sobre la siguiente situación: de todas las formas que pueden cubrir el plano y el espacio ¿cuál es la forma más eficaz?, donde eficaz corresponde a, en el plano, la forma que cubre una misma superficie y tiene menor perímetro y, en el espacio, a la forma que cubre un mismo volumen y tiene menor área.

En el segundo ciclo, la AC se sustituyó por una tarea que permitiera estudiar la noción de optimizar un trayecto en el espacio, de manera que se lograra articular de manera más adecuada con la MEA (Figura 2). Dicha tarea consistió en resolver un problema geométrico de optimización, que involucraba encontrar el camino de menor longitud entre dos puntos en el espacio satisfaciendo algunas restricciones (Hollebrands & Okumus, 2017). El planteamiento del problema es el siguiente.

Determinar el camino más corto entre los vértices A y F del prisma rectangular (ver Figura 3), sabiendo que, sólo se puede trazar sobre sus caras y aristas, es decir, no se puede dibujar un camino que cruce por el interior del prisma.

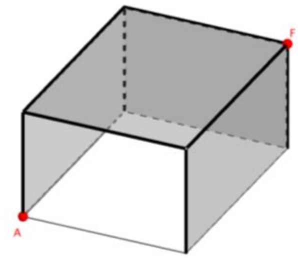



Figura 3. Prisma rectangular de dimensiones 2u × 3u × 4u

Para abordar este problema se usó un manipulativo de elaboración propia en *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/m/kaea5rpy) (Figura 4).

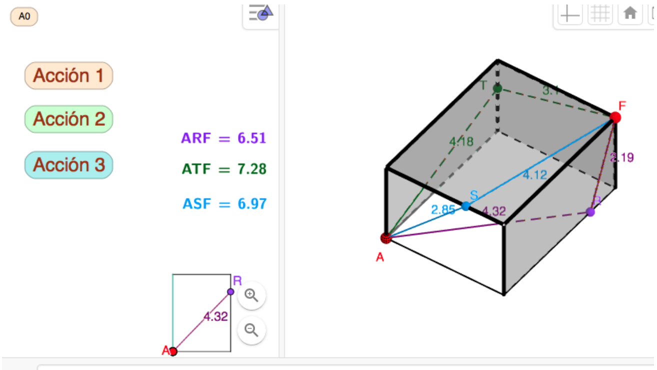



Figura 4. Visualización del manipulativo: El problema del camino más corto – Acción 2

El manipulativo propuesto está conformado por una serie de acciones que permiten estudiar el problema desde un enfoque distinto. En la Figura 5 se puede apreciar como el prisma se desdobla para transformarlo en una representación plana.

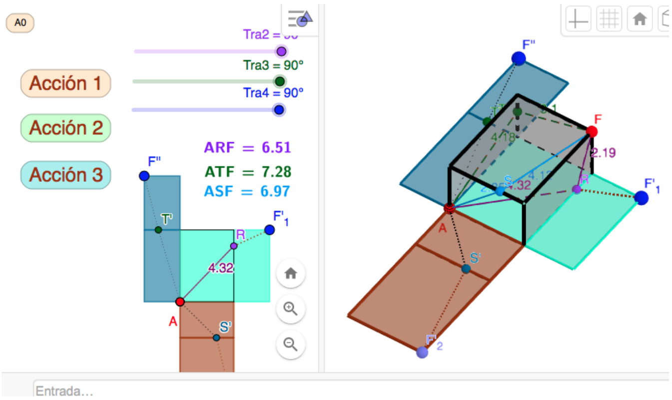



Figura 5. Visualización del manipulativo: El problema del camino más corto – Acción 3

Las acciones, parten de reconocer caminos conformados por segmentos a partir de las combinaciones de caras y aristas (Acciones 1 y 2, Figura 4), hasta identificar nuevas relaciones entre los componentes del problema al visualizarlo desde otra perspectiva: “del espacio al plano” (Acción 3, Figura 5).

El problema antes descrito, aunque no está situado en un contexto de la vida real, se eligió porque permite entender que es posible tener “una caja fija” y muchos caminos para llegar de un vértice a otro tratando de encontrar el recorrido de menor distancia. Así, al trabajar posteriormente con la MEA, la AC ayuda a entender que el volumen del cilindro se puede mantener fijo y tener una variedad de superficies para elegir la menor. Además, el ambiente tecnológico permite familiarizar a los estudiantes con el uso de tecnología que después, en la MEA, tanto en el trabajo en equipo como en las discusiones grupales, permite el trabajo con diferentes representaciones de los modelos, entender mejor la variación continua y comunicar los hallazgos.

## Recogida y análisis de datos

Durante la experimentación se trató de interferir lo menos posible y adaptarse a las condiciones habituales del aula. Y los materiales educativos o las formas de enseñanza fueron emergentes y ajustables (Bakker & van Eerde, 2015). La recopilación de datos, tanto en el ciclo 1, como en la experimentación de la AC del ciclo 2, se hizo a través de fotografías y grabadoras de voz y video previamente colocadas en el aula, además de las cartas donde los estudiantes comunican sus modelos (Anexo 1). En cuanto a la experimentación de la AC y MEA del ciclo 2, la recogida de datos se hizo a través de las grabaciones de las sesiones efectuadas en la plataforma Zoom y con las producciones de los estudiantes (archivos de *GeoGebra*, *Excel*, *Word* y a lápiz y papel).

Las observaciones, así como las formas de pensamiento revelados por los estudiantes para interpretar las situaciones de modelización fueron analizados a partir de los principios de diseño de las MEAs, los procesos de modelización perseguidos y los modelos generados por los estudiantes en sus cartas escritas a un cliente (Anexo 1). Los cambios realizados en la secuencia se hicieron de manera intencionada buscando que cumpliera los principios de diseño de la PMM además de enriquecer la diversidad de modelos generados, sus formas de representación y para que los estudiantes pudieran exhibir los elementos y relaciones presentes en las situaciones.

# Resultados

La propuesta de la secuencia de modelización involucró un refinamiento progresivo, en el sentido de que el diseño fue constantemente revisado a partir de la experiencia. En este apartado se da cuenta de los resultados obtenidos durante su experimentación en ambos ciclos y se describen los cambios realizados a la misma a partir de lo recopilado y reflexionando sobre el cumplimiento de los principios de una MEA (Lesh & Doerr, 2003).

## Ciclo 1: Egresados de EMS, MEA

La mayoría de los equipos construyeron modelos útiles para resolver la situación de optimización con la restricción del volumen fijo. Seis de ellos recurrieron al uso de poliedros como estructuras óptimas para el diseño del depósito de recolección de agua. Solo dos de los siete equipos dieron indicios de una posible extensión de su modelo a situaciones que implican un mayor o menor volumen de almacenamiento, la cual consistió en emplear un modelo a escala del depósito.

El proceso de construcción del modelo, de la mayor parte de los equipos, consistió en analizar casos particulares de depósitos, con un tipo de forma y dimensiones específicas, mayormente discretas, hasta identificar, en la medida de lo posible, un depósito de menor área. Algunos equipos reflexionaron sobre la relación de las variables involucradas en el cálculo del área y volumen de su depósito para una forma específica e identificaron, para qué valor o valores, altura y/o área de la base del depósito, su área total era mínima.

Por ejemplo, el equipo A planteó inicialmente una forma de cubo de 1 metro de lado, y con un área de 6 $m^2$. Con el objetivo de identificar nuevas estructuras con el volumen indicado y con un área menor, el equipo decidió realizar nuevos diseños empleando prismas de distintas bases. Después de estudiar distintos casos, el equipo optó por reemplazar su modelo inicial (cubo) por el cilindro (Figura 6).

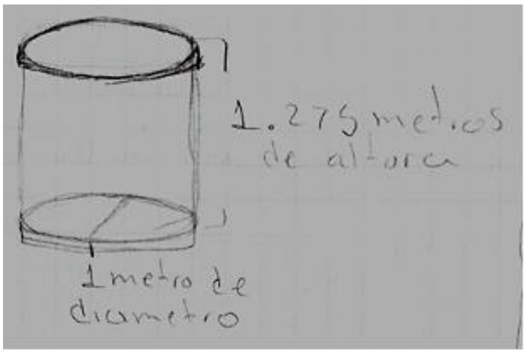



Figura 6. Depósito en forma de cilindro propuesto por el equipo A

Para el cálculo del área del cilindro, el equipo recurrió al uso de fórmulas generales y publicadas en páginas de internet a través de sus móviles por iniciativa propia (Figura 7). Se puede observar que la fórmula empleada es útil para calcular el área de la cara lateral y no su área total.

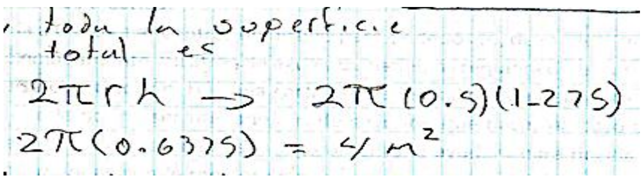



Figura 7. Cálculo incorrecto del área del cilindro por el equipo A

Cabe señalar que la mayoría de los equipos presentaron dificultades para determinar las dimensiones y área de sus depósitos con la restricción del volumen fijo, y recurrieron al método de prueba y error para identificar las dimensiones que pudieran satisfacer las condiciones del problema.

En la Figura 8 se muestran algunos otros de los depósitos diseñados por los estudiantes, con diferentes formas. En el Anexo 1 se muestra la carta del equipo D, que siguió un razonamiento similar al del equipo A para el diseño de su depósito.

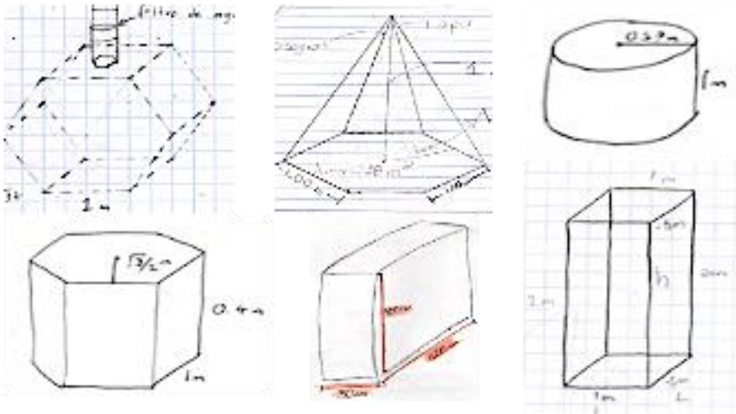


Figura 8. Algunos modelos de depósitos generados por el resto de los equipos

## Sobre los principios

La mayoría de los estudiantes tuvieron complicaciones para construir sus primeros modelos, debido a una inadecuada interpretación de la MEA. Fue notorio que las dificultades presentadas, surgieron, en gran parte, de la visualización del video propuesto en la AC, pues consideraban necesario incluir la forma hexagonal en su diseño que, en el video, fue expuesta como la forma ideal para cubrir una misma área con el menor perímetro. Un ejemplo de esta situación es el diálogo entre tres integrantes del equipo B (los nombres son ficticios).

1. Jorge: Según yo, su idea es hacer algo a base de hexágonos (se dirige al resto del equipo).
2. Pablo: Sí, con la forma que sea, pero a base de hexágonos.
3. Jorge: Pero, ¿por qué a base de hexágonos?
4. Edgar: Porque tenemos que ver la forma de ahorrar material. Así igual como lo hacen las abejas.
5. Jorge: Entonces hay que hacer una cisterna.
6. Pablo: Sí, pero a base de hexágonos.

A pesar de que Jorge no estaba convencido de utilizar hexágonos en la construcción, el resto de sus compañeros insistió en la necesidad de incluir la forma hexagonal para “ahorrar” material. Algunas situaciones similares a ésta surgieron en otros tres equipos, donde aún y cuando la MEA no hacía referencia a cubrimientos, relacionaron la eficacia de la forma hexagonal para cubrir el plano con el diseño de su modelo para optimizar material.

Aunque, al inicio la situación parecía auténtica y cercana al contexto de los estudiantes, resultó que la AC condujo a una mala interpretación de la situación y provocó que, de manera artificial, se generaran modelos alejados del principio de la realidad. Por ejemplo, el equipo C realizó una propuesta de depósito a base de canales en forma de hexágono para trasladar y acumular el agua recolectada, sin tomar en cuenta el volumen indicado, escribiendo “se utilizará una cisterna de canales hexagonales como contenedor dentro de las paredes de las casas conectado a la red local de agua” (Figura 9).

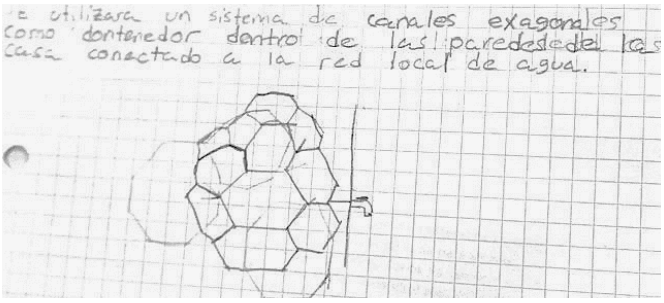



Figura 9. Propuesta de depósito por el equipo C

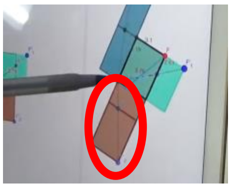
Un objetivo importante de este tipo de actividades es que los estudiantes construyan un modelo que pueda trascender más allá de la situación planteada y que pueda generalizarse a otras situaciones problemáticas. En este caso, los equipos reconocieron la necesidad de desarrollar un modelo para resolver la problemática planteando al menos una propuesta de solución en una carta donde exhibieron sus propias formas de pensamiento (*principios de la construcción y la documentación del modelo*). Se observó, además, cómo la mayor parte de los estudiantes contaban con elementos suficientes (altura, radio y superficie de los depósitos) para comparar sus respuestas y decidir cuál modelo respondía mejor con la situación de optimización (*principio de autoevaluación*).

A pesar de que todos los equipos elaboraron una propuesta de modelo para resolver la tarea, la propuesta de un modelo reutilizable y generalizable a otras situaciones similares fue casi nula (*principio generalización*). De ahí que el cambio principal de la MEA consistió en aminorar la complejidad de la tarea estableciendo una forma específica para el diseño del depósito, promoviendo así la construcción de un modelo simplificado (*principio del prototipo simple*).

## Ciclo 2A: Estudiantes de EMS - AC

En cuanto a la AC *El problema del camino más corto* (Figuras 4 y 5), todos los equipos de EMS participantes formularon al menos una propuesta de camino entre los extremos del prisma rectangular. El refinamiento de las formas de pensamiento reveladas por los estudiantes se dio, en gran parte, de acuerdo con el tipo de relaciones estudiadas en cada acción del manipulativo propuesto. En la Tabla 1 se describe brevemente su evolución.

Tabla 1. Respuestas al problema del camino más corto de los estudiantes de EMS

| **Tipos de caminos trazados** | **Descripción** |
|---|---|
| a) Caminos conformados por la unión de tres aristas. | Los equipos notaron que la longitud de todos los caminos posibles era la misma: 2u + 3u + 4u = 9u. Algunos comentarios fueron: "se puede ir por cualquier camino, todos son iguales" y "todos los caminos son equivalentes". |
| b) Caminos conformados por la unión de una arista y la diagonal de una de las caras. | Algunos argumentos fueron: seleccionar la arista de mayor longitud y/o seleccionar la diagonal de la cara de mayor área. |
| c) Caminos conformados por la unión de dos segmentos con extremos no necesariamente determinados por los vértices del prisma. Por ejemplo, la unión de los segmentos obtenidos al ubicar el punto en la arista en su punto medio. | La mayoría de los estudiantes conjeturaron que el camino más corto solo podía formarse con la unión de segmentos de color morado (camino formado por las caras de dimensiones 3x4 y 2x4).<br>Los estudiantes lograron identificar nuevas relaciones entre los elementos de la construcción. Entre estas nuevas ideas surgieron: "la longitud del segmento es igual a la longitud de la hipotenusa de cada triángulo rectángulo formado con las combinaciones de caras (Figura 10)" y "la longitud más corta entre dos puntos es la longitud del segmento recto con esos extremos".<br><br>Figura 10. Ejemplo de camino |

La desigualdad triangular les permitió probar su conjetura sobre la menor longitud entre dos puntos en el plano, y el teorema de Pitágoras calcular las longitudes de algunos segmentos que conforman los caminos. Una vez que comprobaron que la distancia menor entre dos puntos equivalía a la longitud del segmento con esos puntos como extremos, concluyeron que el camino de color morado, generado con las combinaciones de caras de dimensiones *3u x 4u* y *2u x 4u* y con una longitud de 6.4032, era el camino más corto entre los puntos A y F.

## Ciclo 2B: Estudiantes de maestría - AC

La mayor parte de las respuestas planteadas a la AC, generadas por los estudiantes de maestría, fueron conceptualmente similares a las propuestas por los estudiantes de EMS. Por ejemplo, coincidieron en cuáles combinaciones de caras podían generar caminos cortos y cuáles podrían ser algunos de esos caminos. Del mismo modo, conjeturaron sobre la posición "ideal" del punto de cruce por las aristas del prisma para generar caminos cortos. Una de sus propuestas consistió en visualizar una línea recta entre los extremos de los vértices del prisma y en diferentes perspectivas (Figura 11).

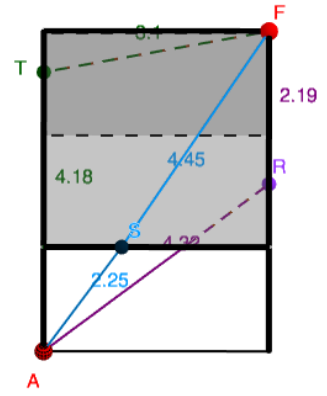



Figura 11. Perspectiva del prisma (Acción 2) que permite visualizar una línea entre los extremos A y F

Tal como ocurrió en la experimentación con los estudiantes de EMS, los equipos lograron reconocer al segmento de línea como el camino más corto entre dos puntos haciendo uso de la desigualdad triangular además de identificar al camino más corto como la hipotenusa del nuevo triángulo rectángulo formado.

Otras formas que surgieron para resolver el problema y que vale la pena mencionar tienen que ver con la idea de usar la semejanza de triángulos para determinar puntos de cruce en las aristas para generar caminos cortos. A pesar de no comprobar su conjetura, los estudiantes concluyeron que el punto de cruce en la arista que comparten las caras de dimensiones *2u x 3u* y *4u x 3u* se da cuando los ángulos $\angle AS'P$ y $\angle F'_2S'Q$ son equivalentes (Figura 12).

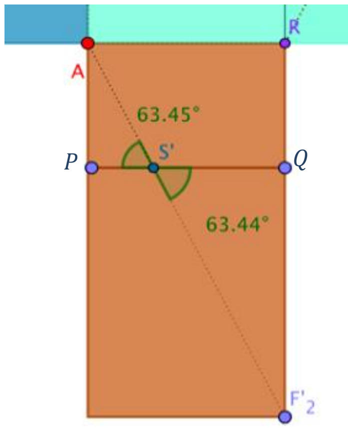



Figura 12. Aproximación de la posición del punto para generar caminos cortos

Finalmente, en su última propuesta, recurren al uso de expresiones algebraicas y su representación gráfica para determinar la posición del punto de cruce de las aristas que generan los caminos más cortos. En la Figura 13 se muestra la gráfica de una función que modela la longitud del camino de $A$ a $F'_2$ (Figura 11) a partir de la posición del punto $S'$ sobre la arista. En la expresión algebraica, $x$ representa la longitud de $S'$ a $Q$.

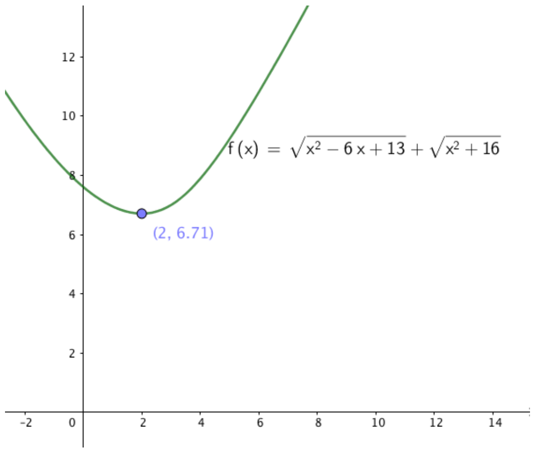



Figura 13. Representación gráfica de la expresión que modela la longitud del camino a partir de la posición del punto en la arista

## Ciclo 2B: Estudiantes de maestría - MEA

Todos los equipos, A, B y C, construyeron modelos útiles para resolver la situación de optimización planteada. Se observó una diversidad de modelos empleando distintas representaciones: gráficas, tabulares, algebraicas y dinámicas, elaborados en diferentes herramientas digitales, tales como: hojas de cálculo, software *GeoGebra* y editores de texto. Dichas soluciones involucraron desde técnicas de aproximación al explorar distintos casos particulares de dimensiones, hasta, el uso de técnicas más sofisticadas, tales como algunos métodos del cálculo diferencial para encontrar puntos críticos de una función con ayuda de la derivada.

Como el problema requería encontrar la menor superficie de un cilindro de volumen fijo, el equipo A optó por utilizar gráficas para observar: 1) la variación de la altura del cilindro en función de su radio (Figura 14, gráfica color negro en donde está ubicado el punto $B$); y, 2) la variación de la superficie a partir del radio y altura del cilindro (gráfica color negro en donde está ubicado el punto $C$).

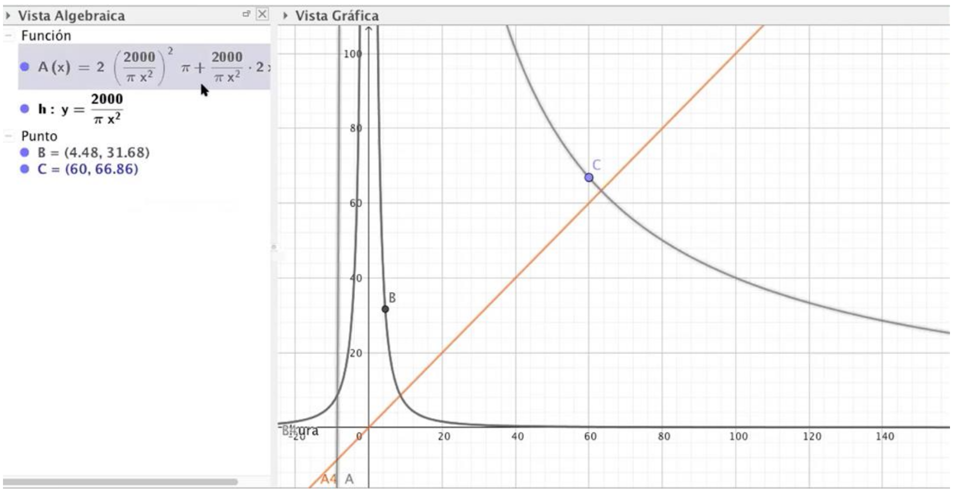



Figura 14. Modelo gráfico propuesto por el equipo A

A pesar de que el procedimiento algebraico que siguieron para modelar el problema fue correcto, el equipo tuvo complicaciones para representar esas expresiones algebraicas en el software *GeoGebra* debido a su poca familiarización con dicha herramienta. Aún y con esas dificultades, la diversidad de ideas e interpretaciones que se generaron a partir de los gráficos fue enriquecedora. Por ejemplo, se reflexionó sobre:

- la variación del radio y altura de un cilindro de volumen fijo.
- el valor de la superficie de cada cilindro generado.
- las dimensiones del depósito para generar un área menor.

El equipo concluyó que algunas dimensiones del depósito debían ser descartadas por el hecho de que no podían presentarse en la vida real y conjeturaron algunas ideas sobre cómo minimizar la superficie de los cilindros generados, las cuales no pudieron comprobar debido a que su construcción presentaba algunos errores algebraicos.

En cuanto al equipo B, sus resultados involucraron el uso de tablas y técnicas algebraicas y de cálculo (Figura 15).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| r(radio) | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| y(altura) | 150,76 | 146,22 | 141,89 | 137,75 | 133,78 | 129,99 |
| Volumen | 2000000 | 2000000 | 2000000 | 2000000 | 2000000 | 2000000 |
| ADP | 14024,12 | 14006,65 | 13995,61 | 13990,80 | 13992,05 | 13999,18 |

Figura 15. Representación tabular del equipo B

En la tabla, los valores del radio en $cm$ (r) son independientes, la fila de las alturas en $cm$ (y) están determinadas en función del radio y del volumen del cilindro en $cm^3$, y la fila $ADP$ (área del desarrollo plano) representa la superficie del cilindro para cada valor del radio.

Su procedimiento consistió en ir acotando los valores del radio para encontrar el cilindro de menor superficie (datos de color amarillo). A pesar de que el cálculo del ADP fue incorrecto (Figura 16) el razonamiento utilizado fue adecuado y esto les permitió encontrar una aproximación de las dimensiones "ideales" del depósito.

B8 fx =B6*B5+B5*B5

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 5 | r(radio) | 65 | 66 | 67 | 68 |
| 6 | y(altura) | 150,76 | 146,22 | 141,89 | 137,75 |
| 7 | Volumen | 2000000 | 2000000 | 2000000 | 2000000 |
| 8 | ADP | 14024,12 | 14006,65 | 13995,61 | 13990,80 |
| 9 | | | | | |

Figura 16. Cálculo incorrecto del área del cilindro del equipo B

Dicha solución tabular la complementaron con el uso de técnicas algebraicas y, posteriormente, a partir de la función que modela el área del cilindro (Figura 17) emplear algunos métodos del Cálculo Diferencial para determinar los puntos críticos de la función.

$$St = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Donde: St=área de la superficie total del desarrollo plano, r= radio, h= altura

**Volumen del cilindro**

$$v = \pi r^2 h$$

**Despejamos la altura**

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

**Sustituimos**

$$St = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{v}{\pi r^2}\right)$$

$$St(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{v}{\pi r}$$

**Derivamos e igualamos a cero**

$$St'(r) = 4\pi r - \frac{2v}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{2v}{r^2} = 0$$

$$r \approx 0.6827m$$

**Sustituimos**

$$h = \frac{2}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)^2}$$

$$h \approx 1.3655m$$

Figura 17. Representación algebraica del cálculo del área del desarrollo plano del equipo B

Una de las integrantes del equipo, compartió algunas de las ideas iniciales que tenía para abordar el problema pero que no logró concluir. Su método consistía en averiguar si el conjunto de datos encontrados (valores del radio y su respectivo valor del área, pensados como pares ordenados) atendía alguna regla o involucraba una relación funcional del tipo polinomial. Para esto, realizó el cálculo de las diferencias de los valores consecutivos (Figura 18). Por algunos errores en las operaciones con fracciones, no fue posible encontrar esas relaciones ni el tipo de función asociada.

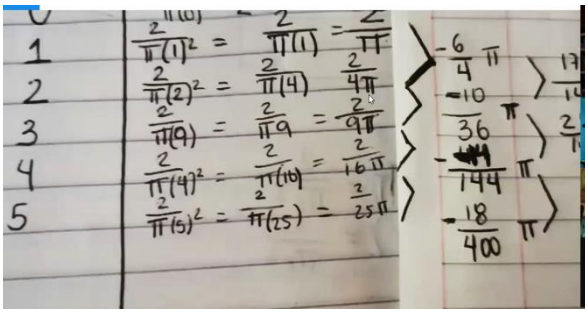


Figura 18. Búsqueda de nuevas relaciones del equipo B

Finalmente, el equipo C, recurrió al uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para expresar el área total del cilindro. Con ayuda de Excel, el equipo determinó la altura y el área total del cilindro para cada valor del radio propuesto y posteriormente encontrar las dimensiones del cilindro de menor área. Finalmente, con ayuda de la herramienta *GeoGebra*, el equipo graficó la función "Área total" para comprobar su respuesta.

Durante la discusión, tanto el equipo A como el B lograron conectar sus soluciones con la solución del equipo C contrastando su solución con los nuevos resultados obtenidos y refinando sus propios modelos.

**Sobre los principios**

Se puede decir que los estudiantes identificaron la situación del diseño de un depósito cilíndrico para optimizar material como algo que puede suceder en la vida diaria (*principio de la realidad*). El cálculo de las dimensiones del depósito de recolección de agua les permitió evaluar las posibilidades de su diseño. En todos los equipos descartaron el estudio de dimensiones (radio de la base del cilindro o altura del cilindro) "muy grandes" o "muy pequeñas", argumentando que en la vida real eso no podía suceder.

Los estudiantes reconocieron claramente la necesidad de desarrollar un modelo para resolver la problemática planteada (*principio de construcción del modelo*) identificando información relevante, tal como las restricciones y datos del problema. Establecieron la relación entre los elementos: radio, altura y volumen del depósito, y describieron la relación entre el área del depósito y el radio de su base. Se observó una diversidad de modelos empleando distintas representaciones: gráficas, tabulares, algebraicas y dinámicas, elaborados en diferentes herramientas digitales, tales como: hojas de cálculo, software *GeoGebra* y editores de texto, que comunicaron a través de cartas escritas (*principio de la documentación*).

Como se ha descrito en el diseño de las actividades propuestas, la situación contextualizada planteó condiciones y restricciones que favorecieron un refinamiento progresivo, por parte de los estudiantes, de sus propios modelos generados (*principio de la autoevaluación*). Algunas de sus reflexiones tenían que ver con las respuestas a preguntas como: ¿el depósito satisface las restricciones y tiene sentido en la vida real? ¿su diseño permite optimizar recursos? ¿el área obtenida es la menor que se puede generar? Un ejemplo claro de este proceso de refinamiento es el que siguió el equipo B, al ir acotando los valores de su radio (en su representación tabular) hasta encontrar una aproximación de las "dimensiones ideales" de su depósito.

Se observó también que la situación planteada conduce a refinar y simplificar la solución y crea la necesidad de un modelo simplificado y significativo (*principio del prototipo simple*). La situación contextualizada de optimización permite darles sentido a otras situaciones estructuralmente similares, por ejemplo, con la descripción de una posible adecuación de su modelo para que éste resultara aplicable a una gama más amplia de las situaciones y contextos (*principio de generalización del modelo*), tal como el diseño de latas y botellas, situación que se aborda en Tran y Doughertyen (2014).

## Conclusiones

La secuencia de modelización que aquí se presenta se trabajó a lo largo de dos ciclos iterativos siguiendo la Investigación Basada en el Diseño (Bakker & van Eerde, 2015) en armonía con la PMM (Lesh & Doerr, 2003). Su evolución se informó a través de las distintas fases, considerando los procesos de modelización y modelos generados por los estudiantes para resolver las actividades propuestas y, reflexionando sobre el cumplimiento de los principios de diseño de una MEA.

Los datos recopilados de la experimentación y el análisis retrospectivo en el primer ciclo dieron pauta para identificar las debilidades de las tareas de modelización y proponer un ajuste para promover el surgimiento de los *principios de la realidad*, *de construcción del prototipo simple* y *de generalización del modelo* (Lesh et al., 2000), los cuales fueron poco notorios a lo largo de la experimentación (Anexo 1).

Un objetivo de las AC es favorecer la interpretación de la MEA, sin embargo, con la AC del primer ciclo se generó una mala interpretación de la situación contextualizada por gran parte de los estudiantes y acotó las posibilidades en cuanto a la diversidad de soluciones. Considerando las dificultades de los estudiantes para calcular el área y volumen de sus diseños, el refinamiento de la secuencia en su segundo ciclo involucró una nueva propuesta de AC (Hollebrands & Okumus, 2017) que fue analizada a partir de un manipulativo de GeoGebra de elaboración propia.

En cuanto al refinamiento de la MEA, sus cambios principales consistieron en aminorar la complejidad de la tarea al establecer una forma específica para el depósito, reflexionando así, la siguiente situación: "de todos los cilindros de volumen fijo, cuál es el que tiene la menor área". Las producciones e interacciones en los grupos de los estudiantes contribuyeron para generar modos de enriquecer futuras implementaciones al alimentar el inventario de soluciones para las tareas. Además, el grupo de profesores, desde su experiencia, pensaron en los posibles modelos que pudieran generar los estudiantes y reflexionaron sobre sus posibilidades didácticas.

La diversidad de modelos generados por los estudiantes y los procesos de modelización perseguidos para resolver las situaciones del segundo ciclo, evidenciaron la exploración de distintas formas de representarlas en términos matemáticos, así como la búsqueda de las relaciones que éstas conllevan, y el desarrollo de ideas que permitieron una aproximación hacia los métodos para optimizar, incluyendo el uso de la derivada (Lesh & English, 2005; Lehrer & Schauble, 2000). Dichas representaciones (Ärlebäck y Doerr, 2018) potenciaron la exploración mediante el uso de tecnología para simular la tarea de identificar el camino más corto o bien para representar el fenómeno de variación continua de la superficie del depósito de la MEA al modificar sus dimensiones y dejar fijo su volumen. Lo anterior proporciona evidencia suficiente del cumplimiento del *principio de la documentación del modelo* (Lesh et al., 2000).

La situación contextualizada, reconocida por los estudiantes como algo que tiene sentido en el mundo real, planteó condiciones y restricciones que favorecieron la *autoevaluación de los modelos generados*. Más aún, sus propuestas de adecuación del modelo, para que éste pudiera reutilizarse productivamente en una variedad de contextos y resultara aplicable a una amplia gama de situaciones, pusieron de manifiesto al *principio de la generalización del modelo*.

De acuerdo con el análisis en torno al cumplimiento de los principios de diseño de una MEA (Lesh et al., 2000), se considera que la secuencia es adecuada para la EMS, es congruente con los planes y programas de estudio del sistema educativo mexicano y atiende la necesidad de un tratamiento de situaciones contextualizadas de optimización, tal como lo sugieren Malaspina (2007) y Hiebert y Lefevre (1986). Los docentes interesados en adoptarla pueden guiarse con la descripción del diseño y la recuperación de resultados como punto de partida.

Como hallazgo de esta investigación se observó que las AC condicionaron la resolución de la MEA posterior. En el primer ciclo, los depósitos diseñados presentaban formas hexagonales y, en el segundo, los estudiantes utilizaron la tecnología para la construcción, representación y comunicación de sus modelos. Esta influencia de las AC en la resolución de la MEA requiere una investigación más profunda en el futuro.

La investigación aquí realizada puede ser de utilidad para realizar futuros trabajos que atiendan la IBD, o bien, que involucren el estudio de situaciones de optimización desde el punto de vista de la modelización matemática. Dicho estudio aporta evidencia para reconocer las bondades que tiene el introducir la modelización en el aula convencional y sus posibilidades para transformar la enseñanza en un espacio donde los estudiantes pueden mostrar confianza para enfrentar las tareas y no temen equivocarse, logran aprender en el proceso y consiguen volver a comenzar de ser necesario, siguiendo los ciclos naturales de esta aproximación de enseñanza.

## Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por la Consejería de Educación, como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León a iniciar en 2019, bajo el proyecto SA050G19.

## Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Abrantes, P. (1993). Project work in school mathematics. In J. De Lange (Ed.), *Innovation in maths education by modelling and applications* (pp. 355-364). Chichester: Horwood.

Aliprantis, C., & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ärlebäck, J., & Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negatives rates of change throughout a model development sequence. *ZDM - Mathematics Education*, *50*, 187-200. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15-30). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W., & Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Brady, C., Eames, C., & Lesh, D. (2015). Connecting real-word and in school problem solving experiences. *Quadrante*, *24*(2), 5-38. https://doi.org/10.48489/quadrante.22924

Doerr, H. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. Hirsch, & A. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-206). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Dominguez, A. (2010). Single solution, multiple perspectives. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 223-233). Boston, MA.: Springer.

Dossey, J. A., McCrone, S., Giordano, F. R., & Weir, M. (2002). *Mathematics methods and modeling for today's classroom: A contemporary approach to teaching grades 7-12*. New York: Brooks/Cole.

Galbraith, P., & Clathworthy, N. (1990). Beyond standard models - meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics, 21*(2), 137-163.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hollebrands, K., & Okumus, S. (2017). Prospective mathematics teachers' processes for solving optimization problems using Cabri 3D. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3,* 206-232. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0033-0

Kaiser, G. (2016). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 267-291). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaiser-Messmer, G. (1987). Application-oriented mathematics teaching mathematics. In W. Blum (Ed.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 66-72). Chichester Horwood.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). The development of model-based reasoning. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21*(1), 39-48.

Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad «real» en la fluidez de las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 377-391.

Lesh, R., Cramer, K., Doer, H., Post, T., & Zawojewsky, J. (2003). Model development sequences. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *37*(6), 487-489.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. In C. Crespo (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa* (pp. 43-48). México, DF.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(3), 365-399.

Sáenz de Cabezón, E. (2015). Derivando: Cómo rellenar el espacio con figuras iguales. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=gz0TyR3bDb0

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Planes de estudio de referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior.* Retrieved from https://www.gob.mx/cms/uploads/—attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf

The Design Based Research Collective (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

Tikhomirov, V. M. (1991). *Stories about Maxima and Minima (Vol. 1).* American Mathematical Society.

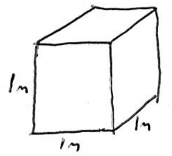
Tran, D., & Doughertyen, B. (2014). Authenticity of mathematical modeling. *Mathematics Teacher*, *107*(9), 672-678.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75-87.

# Anexo 1

## Carta escrita por un equipo

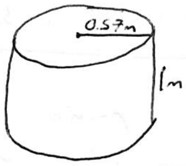
Para el problema que tienes respecto al tanque de almacenamiento de captación de agua, se nos ocurrieron algunas ideas, para aprovechar el máximo espacio con la capacidad que presentas de 1,000 litros. Nuestra primera idea para comparación fue un cubo de 1 metro de lado, la superficie total de éste tanque es de $8m^2$ como se muestra en la figura siguiente:




$1m^3$ de volúmen

$m^2$ de superficie

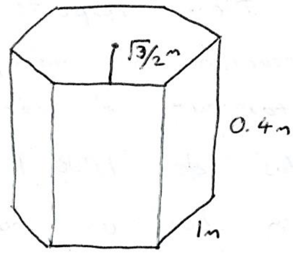
Una segunda idea es un cilindro básico como una cisterna común con las siguientes medidas:




$1.2m^3$ de volúmen

$5.62m^2$ de superficie

Con las anteriores medidas de la figura se obtiene que la superficie es menor con la misma capacidad de 1,000 litros por lo que resulta en una mejor opción para el almacenamiento. Una tercera idea fue un hexágono regular ya que sabemos que es la figura geométrica que con menos material se obtiene una mayor cantidad de volúmen. El hexágono que ideamos tiene las siguientes medidas.




1.03 $m^3$ de volumen

3.26 $m^2$ de superficie

Condensando nuestros resultados en una tabla conparativa se puede observar que el prisma hexagonal es tu mejor opción pata el tanque de almacenamiento.

| Figura | Volumen | Superficie |
|---|---|---|
|  | 1 $m^3$ | $m^2$ |
|  | 1.2 $m^3$ | 5.62 $m^2$ |
|  | 1.03 $m^3$ | 3.26 $m^2$ |

Te recomendamos construir un prima hexagonal para el tanque de almacenamiento con las medidas indicadas para almacenar 1,000 litros de agua, en caso de que la capacidad de agua cambie, solo reduce o aumenta la altura del tanque para almacenar menos o más agua respectivamente.

Atentamente: