

Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior

A study on the potential of experimentation in mathematical modelling activities in higher education

Lourdes Maria Werle de Almeida 

Universidade Estadual de Londrina
Brasil
lourdes@uel.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva 

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
karinapessoa@gmail.com

Adriana Helena Borssoi 

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
ahborssoi@gmail.com

Resumo. Neste artigo investiga-se a questão: Como a experimentação pode mediar a aprendizagem em atividades de modelagem matemática? A investigação se fundamenta em um quadro teórico que considera elementos da experimentação, da modelagem matemática, da tecnologia digital e suas relações com aprendizagem em atividades de modelagem matemática, bem como em uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem são desenvolvidas por grupos distintos de estudantes universitários. Discutimos como os estudantes usam a experimentação com tecnologia, porque a usam e como dela decorrem elementos que indicam aprendizagem. Concluímos que, usando a experimentação com tecnologia digital, os estudantes formulam questões relativas à situação da realidade que estão estudando na atividade de modelagem, bem como analisam as respostas obtidas para estas questões. Ancorada em ferramentas tecnológicas e no uso da matemática, a experimentação proporcionou meios para que os estudantes sinalizassem o que estavam aprendendo nestas atividades. O artigo aponta para o potencial de incluir a experimentação com tecnologia na dinâmica de atividades de modelagem como subsídio para a aprendizagem.

Palavras-chave: modelagem matemática; experimentação; aprendizagem; ferramentas tecnológicas.

Abstract. In this article we investigate the question: How can experimentation mediate learning in mathematical modelling activities? The study is based on a theoretical framework that considers elements of experimentation, mathematical modelling, digital technology, and their connections with learning in mathematical modelling activities, as well as on empirical research in which mathematical modelling activities are developed by different groups of university students. We discuss how students use experimentation with technology, why they use it, and how experimentation leads to elements that indicate learning. We conclude that, in using experimentation, students ask questions regarding the real situation they are studying in the modelling activity, as well as analyze the answers obtained to those questions. Supported by technological tools and the use of mathematics, the experimentation provided the means for students to signal what they were learning in these activities. The article points to the potential of including experimentation with technology in the dynamics of modelling activities as a possibility for learning.

Keywords: mathematical modelling; experimentation; learning; technological tools.

Introdução

Uma temática recorrente nas discussões relativas às finalidades da integração de atividades de modelagem matemática¹ nas aulas diz respeito às suas possibilidades para promover a aprendizagem dos estudantes.

Conforme apontam Brito e Almeida (2021), diferentes lentes teóricas, bases epistemológicas e pesquisas empíricas orientam e sustentam as argumentações que defendem a aprendizagem dos estudantes nessas atividades (Almeida, 2018; Halverscheid, 2008; Rellensmann et al., 2019). D'Amore (2007) sugere que a aprendizagem se caracteriza por comportamentos identificados nas ações dos estudantes quando realizam tarefas na sala de aula. Assim, dirigir a atenção para a aprendizagem em atividades de modelagem implica olhar para a atuação dos estudantes nessas atividades. A problematização relativa à aprendizagem em atividades de modelagem, nesse artigo, é mediada por um diálogo com o que vem se entendendo por experimentação na área de Educação Matemática.

A abordagem experimental na realização de tarefas em aulas de matemática, segundo Borba e Villarreal (2005), inclui a formulação de conjecturas, o uso da matemática para resolver problemas bem como a análise das soluções obtidas. Segundo esses autores, esta abordagem tem repercussões na aprendizagem dos estudantes. Particularmente, as iniciativas de pesquisar a experimentação em atividades de modelagem ainda são pouco frequentes, embora investigações já tenham colocado seu foco nessa temática (Carreira & Baioa, 2018; Halverscheid, 2008; Ye et al., 2003). No presente artigo, considerando o desenvolvimento de atividades de modelagem por diferentes grupos de estudantes universitários, temos a intenção de olhar para a experimentação realizada por eles com o apoio da tecnologia digital e como dela decorrem indícios de aprendizagem.

Modelagem matemática e tecnologia digital

Em termos gerais, a modelagem matemática se refere à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade, mediada pela construção e validação de um modelo matemático (Araújo & Lima, 2020; Blum, 2015; Burkhardt, 2018).

Para Bean (2015):

A modelagem adotada em qualquer época ou em qualquer local, além de se apoiar em quadros conceituais de uma variedade de comunidades, como a dos biólogos, matemáticos, entre outras, remete às linguagens, informações, tecnologias e conhecimentos disponíveis aos modeladores, bem como às problemáticas abordadas e aos interesses dos modeladores em abordá-las. (p. 3)

Na sala de aula, as ações dos estudantes em atividades de modelagem têm relação com o que eles aprendem por meio dessas atividades. Kaiser (2020) e Wess et al. (2021) sugerem que as reflexões relativas ao que se aprende com essas atividades podem se categorizar em duas perspectivas: (a) aquela em que o foco é a formação matemática dos estudantes, na medida em que desenvolvem habilidades para criar ou interpretar relações entre matemática e realidade, denominada *científico humanista*, e vem respaldada no pensamento de Hans Freudenthal; (b) aquela em que se dá ênfase às habilidades dos estudantes para usar a matemática na proposição e resolução de problemas da realidade e é reconhecida como *perspectiva pragmática*, tendo suas origens nas argumentações de Henry Pollak. Embora na sala de aula possa se dar mais ênfase a uma perspectiva do que a outra, a aprendizagem relativa à matemática e àquela relativa à sua aplicação em um problema da realidade, guardam entre si uma estreita relação. Nas últimas décadas, esta relação tem sido associada ao uso de diferentes recursos da tecnologia digital.

Conforme sugerem Galbraith e Fisher (2021), o uso de tecnologias na sala de aula deve considerar especificidades do uso da ferramenta digital bem como o conteúdo a ser aprendido por meio desse uso. Desse modo é possível “explorar o valor epistêmico da ferramenta digital como instrumento de ensino e de aprendizagem” (Galbraith & Fisher, 2021, p. 201) e, como sugere Greefrath (2011), essas ferramentas podem favorecer novas formas de entender e aprender matemática.

De fato, Carreira (2019, p. 54) menciona que, além de “especialmente relevante para apoiar processos como experimentar, explorar, simular, visualizar, calcular, estimar”, as múltiplas representações possibilitadas pela tecnologia incentivam a interação entre aspectos empíricos e teóricos dos objetos em atividades de modelagem matemática.

De acordo com Carreira et al. (2013), muitas das possibilidades oferecidas pelas ferramentas digitais para o desenvolvimento de atividades de modelagem podem ser exploradas por meio de *softwares* de geometria dinâmica. Os autores destacam que o GeoGebra, por exemplo, pode favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. Neste

mesmo sentido, Meier e Gravina (2012) argumentam que *softwares* de geometria dinâmica (SGD) “propiciam atividades de investigação que organizam o processo de aprendizagem na forma de espiral com as etapas de ação, de formulação e de validação” (p. CCLI).

No âmbito da modelagem, particularmente, Greefrath (2011) evidencia que o uso da tecnologia digital pode não ser somente um apêndice relativamente às ações requeridas no processo de modelagem. Ao invés disso ela pode ser incorporada em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade e, entre outras finalidades, pode proporcionar ao estudante *experimentar* ao desenvolver atividades de modelagem matemática.

A experimentação

Segundo Cunha (2007), o significado etimológico da palavra *experimentação* refere-se ao ato de experimentar, de investigar ou verificar as propriedades de algo. *Experimentar*, por sua vez, significa submeter à experiência, empreender. Segundo Vinci (2018), a experimentação possibilita construir considerações próprias e reconstruir experiências.

No contexto educacional, a experimentação é vista como um método para a geração de conhecimento e, especialmente a partir da década de 1990, sua introdução na sala de aula vem se intensificando (Ye et al., 2003). Entretanto, conforme apontam Emden e Sumfleth (2014), é preciso evitar que, ao usar a experimentação na sala de aula, o estudante mais manipule equipamentos do que manipule ideias.

Emden e Sumfleth (2014) consideram que, em contextos de ensino e de aprendizagem, se requerem três etapas para a experimentação: (1) os estudantes precisam ter uma ideia e estruturar uma hipótese para resolver um problema; (2) a partir dessa ideia ou hipótese eles planejam e executam um experimento (físico, computacional, geométrico ou algébrico); e (3) os resultados da experimentação são apresentados, podendo levar à revisão da hipótese inicial, se necessário.

Na área de Educação Matemática, a experimentação se associa ao processo de geração de conhecimento em que novas ideias, ferramentas e procedimentos podem ser aprendidos e diferentes maneiras de encaminhá-la coexistem neste contexto, como mencionado em Borba e Villarreal (2005) e em Ye et al. (2003).

Borba e Villarreal (2005), a partir de um levantamento de discussões relativas ao tema e, considerando diferentes bases epistemológicas, sugerem que uma abordagem experimental na Educação Matemática diz respeito: ao uso de procedimentos ou ensaios que dão suporte à formulação de conjecturas; à descoberta de resultados não previamente conhecidos por aqueles que realizam a experimentação; à testagem de diferentes alternativas para a obtenção de resultados; a uma maneira de aprender matemática. Esta perspectiva para uma abordagem experimental leva a vislumbrar na modelagem uma possibilidade para a inclusão da experimentação na sala de aula.

A experimentação em atividades de modelagem matemática

A atividade matemática de construir modelos matemáticos vem sendo associada à experimentação em estudos recentes (Araki, 2020; Bassanezi, 2002; Carreira & Baioa, 2018; Gallegos & Rivera, 2016; Halverscheid, 2008; Schwartz, 2007; Villarreal & Mina, 2020; Ye et al., 2003).

Ao se referir à dinamicidade de atividades de modelagem, Bassanezi (2002) caracteriza atividades intelectuais e situa entre elas a experimentação. Esta possibilidade também se evidencia na pesquisa de Halverscheid (2008) que, ao propor uma abordagem experimental para atividades de modelagem, sugere que esse tipo de atividade é vinculado à oportunidade de construir modelos matemáticos e produzir conhecimento matemático e conhecimento sobre a situação, através de questões geradas e respondidas por meio da experimentação.

Atividades de modelagem podem também fomentar a experimentação como compreendida no trabalho de Ye et al. (2003), em que ela é apontada como ferramenta que associa teoria de alguma área de conhecimento com uma prática empírica. É neste sentido que Carreira e Baioa (2018) discutem a experimentação em atividades de modelagem e sugerem que os estudantes têm oportunidade de aprender enquanto manipulam dados, ferramentas ou materiais concretos. Esta abordagem experimental da modelagem encontra ressonância na aprendizagem experiencial, como é evidenciado na pesquisa de Vos (2006).

Greefrath (2011) caracteriza a experimentação como uma função da tecnologia em atividades de modelagem matemática. Manipular e articular dados de um *software* com dados de uma planilha, por exemplo, constitui, neste contexto, uma experimentação. Segundo esse autor, a simulação é uma ação muito semelhante à experimentação mediada pela tecnologia uma vez que, com a simulação, é possível realizar experimentos com o modelo matemático. Segundo Lévy (1993), a manipulação de parâmetros e testagem de diferentes respostas para o problema se caracteriza como uma experimentação que proporciona ao estudante uma espécie de intuição sobre relações de causa e efeito presentes no modelo. Para este autor, o estudante aprende com este tipo de experimentação diferentes facetas daquilo que está sendo modelado.

Na perspectiva de Birta e Arbez (2007), em atividades de modelagem ocorre a criação de modelos matemáticos e estes são então usados como meios para a simulação, viabilizando a análise da adequação do modelo ou mesmo para fazer novas deliberações em relação ao problema em estudo. Esta perspectiva foi também apontada por Villarreal e Mina (2020) que concluíram que a experimentação com modelos matemáticos e sua relação com a aprendizagem podem ser fortalecidas pela tecnologia digital.

O problema de pesquisa

A questão que orienta nossa pesquisa é a seguinte: Como a experimentação pode mediar a aprendizagem em atividades de modelagem matemática? Para a investigação dessa questão analisamos atividades de modelagem desenvolvidas por estudantes de dois cursos de ensino superior e nos orientamos pelas indagações: (a) Como diferentes grupos de estudantes usam a experimentação em atividades de modelagem matemática? (b) A experimentação realizada pelos estudantes fornece elementos para que eles expressem o que aprendem ao desenvolver atividades de modelagem matemática? (c) Por que os estudantes usam a experimentação quando desenvolvem atividades de modelagem matemática?

A pesquisa empírica e a metodologia

A pesquisa empírica tem por base o desenvolvimento de atividades de modelagem por estudantes de dois cursos do ensino superior em disciplinas ministradas pelas autoras do presente artigo em duas universidades públicas brasileiras.

Uma atividade de modelagem refere-se à variação da temperatura no interior de um veículo automotor e foi desenvolvida por 18 estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática, durante quatro aulas da disciplina de *Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática*, no segundo semestre de 2020. A outra foi desenvolvida por 80 estudantes de diferentes cursos de Engenharia (Engenharia Ambiental, Engenharia Mecânica e Engenharia de Materiais), no decorrer do segundo semestre de 2020. A temática de interesse dos estudantes refere-se ao estudo da eficiência de um radar fixo de controle de velocidade, no âmbito de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Em ambos os cursos as aulas foram realizadas de forma não presencial, mas síncronas e com salas criadas em ambientes virtuais. As atividades foram escolhidas entre outras atividades de modelagem desenvolvidas nestas disciplinas, levando em consideração o uso da experimentação com tecnologia pelos estudantes.

Os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática já tinham experiências anteriores com modelagem e, além disso, eram do quarto ano do curso, de modo que conheciam conceitos, técnicas e ferramentas matemáticas diversificadas. Já os estudantes dos cursos de Engenharia eram do primeiro ano e não possuíam experiências anteriores com modelagem matemática.

A coleta e análise dos dados

Para a coleta de dados nos dois cursos foram usadas gravações em áudio e vídeo das aulas, registros dos estudantes produzidos no desenvolvimento das atividades, bem como um relatório entregue ao final da atividade, que era desenvolvida em grupos nas duas disciplinas. Selecionamos para análise os grupos cujos estudantes participaram de todas as

aulas em que as atividades foram desenvolvidas e que entregaram relatório escrito, incluindo os procedimentos e o detalhamento das resoluções realizadas.

A análise dos dados segue o paradigma de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1982). Trata-se de uma análise interpretativa dos dados, é descritiva e se fundamenta no quadro teórico do artigo, visando apresentar indicativos de como se dá a experimentação com a tecnologia por esses grupos de estudantes.

As atividades de modelagem matemática

A variação da temperatura no interior de um veículo

Para esta atividade foram apresentados aos estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática dados relativos à variação da temperatura no interior de um veículo automotor. Os dados foram coletados em um veículo que, após exposição ao sol, foi colocado na sombra e com os vidros abertos, conforme consta em Silva e Dalto (2017). Desenvolvida em aulas no modo remoto, a atividade iniciou com a apresentação dos dados da Tabela 1, compartilhados na tela do computador juntamente com o seguinte problema: “Depois de quanto tempo a temperatura no carro vai ser de 27°C, que é a temperatura do ambiente?”.

Tabela 1. Temperatura no interior do veículo

Tempo	Temperatura no interior do veículo
0 min	35°C
2min	34,1°C
4min	33,2°C
6min	32,6°C
8min	32°C
10min	31,4°C
12min	30,9°C
14min	30,4°C

Alinhada com a perspectiva pragmática de modelagem a que nos referimos em seção anterior do texto, a atividade foi desenvolvida por estudantes que já tinham familiaridade com modelagem e, sendo do último ano do curso, já tinham um bom repertório de conhecimentos matemáticos. Os estudantes não tiveram, portanto, dificuldade em reconhecer que a temperatura no interior do veículo poderia se estabilizar em 27°C, como sugere o problema, uma vez que era essa a temperatura do meio exterior na data e horário da coleta de dados.

Para desenvolver a atividade, os estudantes formaram grupos que se reuniram em salas criadas no *Google Meet*, sendo visitados pela professora, oportunamente. Consideramos os dados provenientes de um desses grupos formado pelos estudantes L_1, L_2, L_3, L_4 .

Neste grupo, os estudantes decidiram, primeiramente, *plotar* os dados da Tabela 1 no plano cartesiano (Figura 2) e considerar essa representação para deliberar sobre a construção de um modelo matemático e posterior obtenção de uma resposta para o problema, como indica o diálogo a seguir.

- L_1 : Agora a gente tem a tabela e o gráfico, a tendência da temperatura, né?
 L_2 : Eu acho que é linear...
 L_1 : Não, linear não é, dá para ver nos dados da tabela.
 L_2 : Ah tá, mas... É, linear não é mesmo... Estou fazendo as contas aqui.
 L_3 : Eu já acho que dá para usar exponencial, tipo daquela outra atividade, porque é sempre positivo.
 L_1 : Exponencial... mas e para achar a função? (referindo-se ao modelo como função).
 L_3 : Ah, acho que dá para usar o ajuste de curvas porque daí usa todos os pontos da tabela.

Usando a hipótese sugerida por L_3 de que se trata de um fenômeno com comportamento exponencial, os estudantes usaram *softwares*² já conhecidos e realizaram um ajuste de curvas para construir o modelo e compartilharam uma tela (Figura 2) em que consta um modelo obtido e seu uso para determinar a temperatura no interior do veículo.

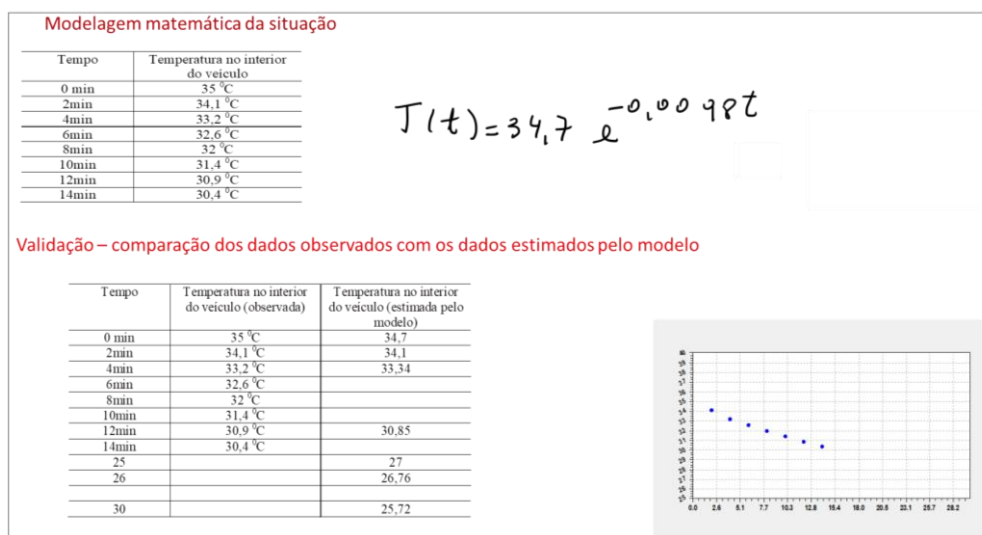


Figura 2. Parte da resolução do problema realizada pelo grupo

Ao analisar os dados na tela compartilhada, entretanto, um estudante observou que a temperatura depois de 30min seria de 25,72°C. Isso gerou uma discussão em que o estudante L_3 argumentou que a temperatura não pode ser inferior a 27°C:

L3: Gente, mas não dá para a temperatura ficar menor do que 27°C. Só se ligar o ar condicionado!

Após seus cálculos e um exame dos dados da tabela, o estudante L₂ afirmou:

L₂: Ah, então dá para usar essa aproximação exponencial, mas só pode ter o tempo t indo até 25min.

Outro estudante, L₄, então reagiu:

L₄: É, para ser mais exato, dá para usar t menor do que 26, porque os 27 graus dá para $t=25,6$ min.

Neste momento, os estudantes chegaram ao consenso de que um modelo matemático para essa situação poderia ser: $T(t) = 34,7e^{-0,0098t}$ para $0 \leq t < 26$ e por meio desse modelo a temperatura estaria próxima de 27°C depois de 25 minutos.

Embora a hipótese de considerar o decaimento da temperatura como um comportamento exponencial tenha produzido uma resposta para o problema, os estudantes ainda quiseram rever essa hipótese inicial e testar outra matematização para a situação. Este aspecto se refletiu no decorrer de uma intervenção da professora com os estudantes:

P: Certo, então vocês estão certos de que a temperatura não vai ficar inferior a 27 graus? Mas, vejam, isso não poderia ser usado já na matematização, nesse caso?

[...]

L₃: Ah, eu acho que dá para usar equações diferenciais, como a gente já falou lá com todos os estudantes da turma (referindo-se à discussão antes de se formarem os grupos).

A assertiva desse estudante fez com que o grupo retomasse o problema e, como disse L₂: “Vamos começar tudo de novo”. Assim, novos encaminhamentos foram definidos e características da situação foram incorporadas à matematização.

P: Vocês estão pensando o que podem usar nesse caso?

[...]

L₄: Ah, eu acho que dá para usar aquela equação lá de EDO, acho que lei de Newton.

P: É, lei de resfriamento de Newton, um modelo assintótico.

L₄: É, daí tem que ver como é. Acho que... acho que tem que usar a temperatura do ambiente na EDO como sendo esse 27 graus.

P: Isso mesmo.

Neste caso, os estudantes usaram uma equação diferencial já conhecida e relativa à lei de resfriamento de Newton, de modo que a hipótese, nesse caso, é de que a situação em estudo na atividade segue essa lei. Usando os dados da situação, obtiveram o modelo $T(t) = 27 + 8e^{kt}$, conforme indica a Figura 3. Entretanto, o valor do parâmetro k ainda não era conhecido e o meio de determiná-lo foi discutido pelo grupo.

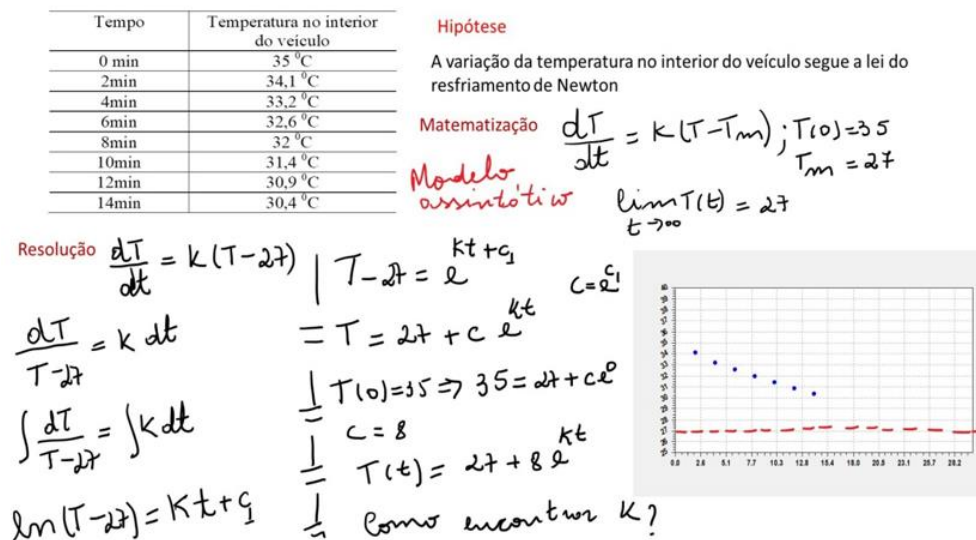


Figura 3. Parte da resolução do grupo considerando uma EDO

- L4: Ah, então Prof., a gente tá pensando como achar o valor do k . Porque aí vai ter que ter aquela assíntota aí no 27, aquele risco vermelho (mostrando na imagem)
- P: Certo... e isso tem a ver com o limite da função, não é?
- L4: É!
- L4: Ô Prof, o L3 (ele se refere ao nome do colega) falou que dá para pegar um dos pontos para calcular o valor do k , mas acho que não é uma boa.
- L3: É, eu fiz com um ponto só.
- P: Mas não é melhor usar todos os dados?
- L3: Ah tá.
- L4: Ah, vamos usar o ajuste lá, o método dos mínimos quadrados que nós usamos lá no problema dos peixes.

Os estudantes usaram o *software CurveExpert* para determinar o valor de k considerando as temperaturas no interior do veículo conhecidas (Figura 4a). Assim, um segundo modelo matemático para esta situação foi dado como: $T(t) = 27 + 8e^{-0,06047t}$. Usaram este modelo para determinar depois de quanto tempo a temperatura no interior do carro seria de 27°C.

A resposta para esta questão, aproximadamente 60min, informada pelos estudantes (Figura 4b), foi discutida com eles. Como há na tabela da Figura 4b a informação de que de depois de 60min a temperatura é de 27,21° e também a informação de que $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 27$, era preciso identificar que eles tinham clareza de que, com esse segundo modelo contruído, iriam determinar um tempo para uma temperatura muito próxima de 27°C, porém superior.

Os estudantes falaram sobre seus procedimentos conforme indica o diálogo a seguir.

- L4: Bom, eu fiz aqui e dá o tempo de 60 minutos mais ou menos. É bem mais do que no outro modelo lá que usava a função exponencial direto.
- L1: É, o meu também dá isso. Mas aí o certo é que o limite é 27. Mesmo que demore mais para chegar nessa temperatura.
- [...]

- P: Mas vocês colocaram aqui (apontando no slide do relatório) $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 27$. Então a temperatura vai chegar a 27°C exatamente?
- L1: Ah professora, é como eu disse, o limite é 27.
- L4: É, por isso eu falei que é mais ou menos 60 minutos. Tipo, se eu colocar $T(60)$ vai dar 27,21. Mas aí, se eu quero chegar mais próximo de 27 eu coloco talvez, um tempo maior. Tipo, qualquer tempo vai dar maior do que 27 graus.
- L1: Ah, mas é que o que a gente estava falando no grupo, é vai dando bem pouca diferença na temperatura. Porque dependendo do termômetro que usa, não vai marcar essa diferença pequena da temperatura.
- [...]
- P: Ah sim. Vocês compararam então os dois modelos?
- L4: Sim, professora.

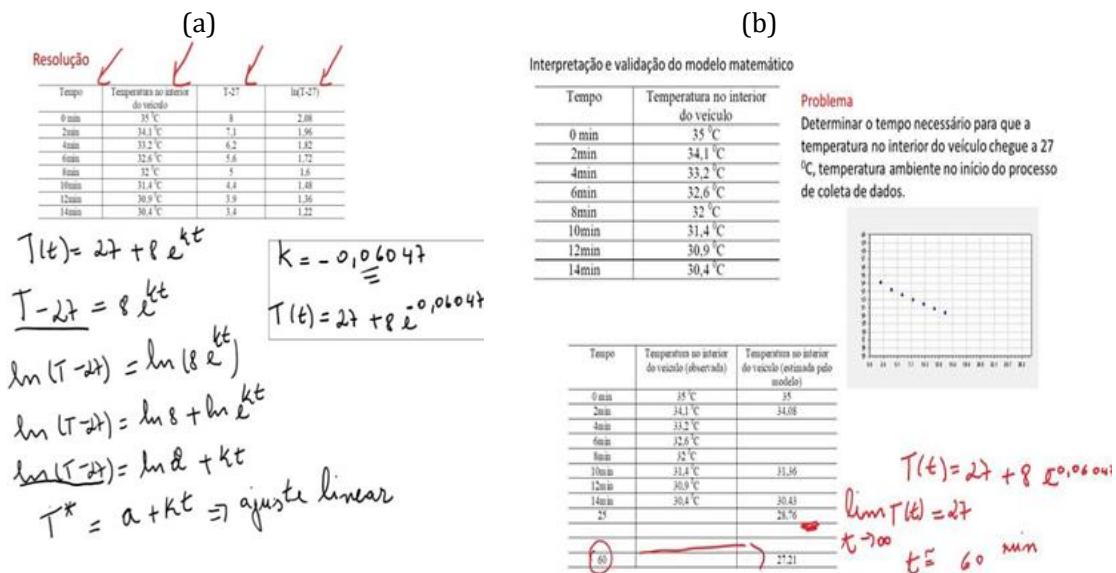


Figura 4. (a) Determinação do valor de k , (b) Determinação do tempo para 27°C

O uso de um radar de velocidade fixo investigado pelos estudantes do curso de Engenharia

A atividade de modelagem com a temática *radar fixo* foi sugerida pela professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I por meio da pergunta: como funcionam os radares fixos que podem ser instalados tanto em perímetro urbano quanto em rodovias? A atividade foi desenvolvida por grupos cujos integrantes poderiam interagir virtualmente de forma remota, síncrona ou assincronamente. Cada grupo dispunha de uma *wiki* no ambiente virtual de ensino e aprendizagem da turma (*MOODLE*) onde os registros do desenvolvimento da atividade deveriam ser realizados no decorrer de um período de 30 dias. O desenvolvimento era monitorado pela professora que interagiu com os estudantes. Referimo-nos aqui a um grupo com quatro integrantes (E_1, E_2, E_3, E_4).

Este grupo, inicialmente, demonstrou interesse em conhecer como a velocidade dos veículos era mensurada pelo radar a fim de concluir sobre a pertinência de autuações. O grupo, a partir de pesquisas na *Internet*, considerou para o estudo um tipo de equipamento (radar fixo de laços indutivos). Os estudantes também souberam por meio destas pesquisas que os medidores de velocidade de veículos automotores baseiam-se na medição do tempo de passagem do veículo entre dois ou três sensores de distância fixa e conhecida, instalados no asfalto (Figura 5). Assim, o tempo de passagem do veículo sobre esses sensores (representados na Figura 5 pelos nove pequenos quadrados) é medido a partir de um campo eletromagnético e a velocidade é calculada pela razão entre a variação do espaço e do tempo.

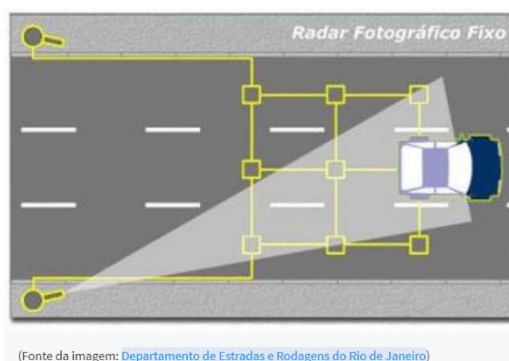


Figura 5. Representação da instalação dos laços indutivos e posicionamento de câmeras

Os estudantes perceberam que cada faixa de rodagem possui um conjunto de sensores exclusivo, assim, o instrumento consegue identificar em qual faixa o excesso de velocidade ocorre e acionar a câmera para registrar a imagem do veículo infrator de modo que este fique devidamente enquadrado na foto. Em caso de aparecer mais de um veículo na imagem, o reconhecimento do veículo infrator ocorre pela identificação da faixa em que o limite de velocidade da via foi excedido.

Após a inteiração com a situação, os estudantes perceberam que a obtenção da velocidade não seria um problema a ser modelado já que o radar registra as informações necessárias e realiza o cálculo automaticamente.

O diálogo transcrito da gravação de um encontro de orientação indica que os estudantes tinham dúvidas sobre como dar sequência à atividade.

- P: O radar que vocês estão considerando aqui é do tipo que faz o registro fotográfico?
- E₁: É sim, aquele que a gente pesquisou.
- P: Aham, aí podemos avançar pensando na relação entre essa leitura da velocidade e a captura da imagem, por exemplo. Vamos supor que tenha que instalar esse radar. Existe uma influência para captura dessa imagem?
- E₁: A gente formula uma pergunta mesmo e resolve, né?
- P: Vocês estão analisando o radar de ondas eletromagnéticas, já entenderam como se obtém a velocidade e, para complementar,

- poderiam estabelecer uma relação da velocidade máxima permitida com o alcance, a captura da imagem.
- E₁: Seria em relação à resposta da câmera, o tempo de resposta da câmera e a velocidade que o carro passa?
- P: Deve ter alguma relação, né, com o tipo de câmera, inclusive.
- E₃: Ah, vamos pegar algum local que tenha radar e ver o tipo e fazer também qual é a velocidade permitida nesse local.

Os estudantes optaram por definir um contexto para analisar o posicionamento da câmera como parte do sistema e definiram como problema: Qual é a distância da câmera até o veículo quando esse está sobre o terceiro sensor? Também consideraram investigar em qual situação o sistema deixa de funcionar.

Na Figura 6 apresentamos recortes de registros captados do ambiente virtual em que um estudante explica um esboço gráfico da instalação do sistema, da seguinte forma:

Aqui mostra uma explicação visual para essa questão.[...] representa uma via com 3 faixas de rodagem e 9 laços indutivos, distribuídos de tal forma que cada grupo seguido de 3 sensores fique em cada faixa, um radar instalado a 3 metros do chão, onde sua base está a 9 metros até o início do terceiro sensor. Cada laço apresenta 1 metro de comprimento e distância de 3,5 metros entre eles, aí a distância entre os centros dos laços é de 4,5 metros. (Aluno E1).

a problemática é: Como é feita a determinação da velocidade? Qual a distância da câmera até o veículo quando esse está sobre o terceiro sensor? Prove matematicamente em qual situação o sistema deixa de funcionar?

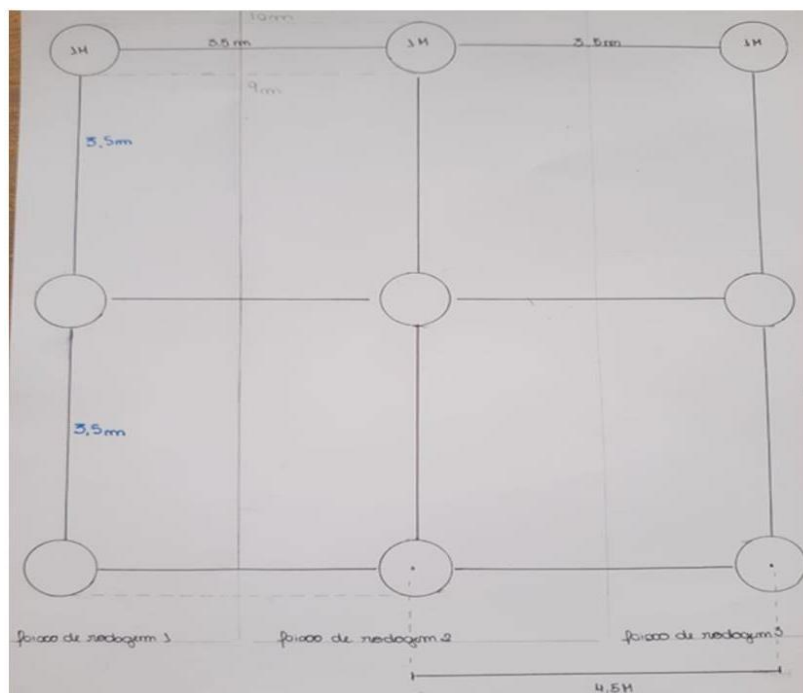


Figura 6. Informações do contexto pensado pelo grupo para instalação do radar

Na Figura 7, o grupo deixa em destaque apenas uma faixa de rodagem, o posicionamento do poste e o campo de alcance da câmera instalada no topo do poste. O estudante E₂ explica a imagem da Figura 7:

- E₂: Levando em conta também que a câmera está disposta da mesma maneira que na imagem abaixo. Nessa imagem, como podemos ver, a câmera está posicionada a 54° e nesse 54° tem o campo de visão dessa câmera, que pega a partir do terceiro laço indutivo do radar.

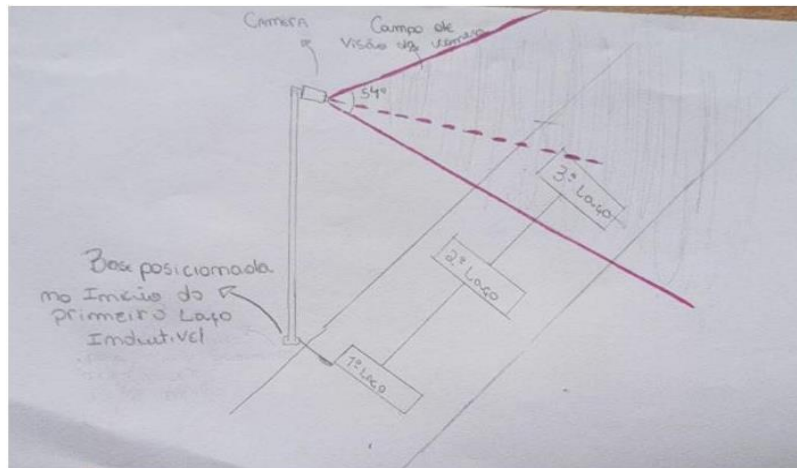


Figura 7. Detalhamento da localização da câmera do radar

O grupo percebeu que a eficiência do sistema para a autuação está relacionada com o posicionamento da câmera que registra a imagem quando o veículo tem velocidade superior ao limite permitido na via. Assim, características técnicas sobre as câmeras foram necessárias: tempo de resposta de 1/3 de segundo, alcance máximo para reconhecimento da placa do veículo de 30 metros e abertura da lente de 54°.

Para determinar qual é a distância (H) da câmera até o veículo, quando esse está sobre o terceiro sensor, os estudantes usaram o Teorema de Pitágoras (Figura 8) e registraram:

Para determinar a hipotenusa do momento em que é descoberta a velocidade, ou seja, instante mais próximo possível do início de terceiro laço indutivo (9 metros da base do radar até o início do 3.º laço), podemos fazer a substituição na fórmula também mencionada no início.

$$\begin{aligned}
 H^2 &= CO^2 + CA^2 \\
 H^2 &= 9^2 + 3^2 \\
 H^2 &= 81 + 9 \\
 H^2 &= 90 \\
 H &= \sqrt{90} \quad H \approx 9,49 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Figura 8. Resolução dos estudantes para determinar a distância da câmera até o veículo

É possível perceber uma simplificação excessiva da situação-problema, pois os estudantes consideraram a base do poste junto ao primeiro sensor e a câmera apontada para o terceiro laço indutivo. Embora E₁ tenha expressado que “A gente viu que a verificação é feita

só após o terceiro nó, certo? Então a câmera teria que ter um tempo de resposta suficiente para que, quando o carro passar em cima do terceiro nó a câmera já está acionada”, esta constatação não foi contemplada na resolução da primeira parte do problema.

Quanto às situações em que o sistema deixa de funcionar, segunda parte do problema, o grupo concluiu:

Primeiro precisamos lembrar que o tempo de resposta da câmera é 0,333... segundos e também que a distância máxima de reconhecimento da câmera é de 30 metros, ou seja, 21 metros após a identificação da velocidade do veículo pelo terceiro laço; logo câmeras mal posicionadas, angulação errada, irão afetar a funcionalidade do mesmo. [...] Vamos fazer os cálculos para uma situação imaginária onde um veículo percorre 21 metros em $\frac{1}{3}$ de segundo (para que a velocidade do veículo maior que a velocidade do obturador da câmera, e assim atingir distância superior a capacidade de identificação do radar, antes dele executar a fotografia), ou $\sim 70\text{m/s}$, que equivalem a 252km/h, tal resultado se aproxima muito do valor máximo identificado pelos sensores magnéticos, que é 250km/h. Com isso concluímos que velocidades iguais ou acima de 252km/h podem ‘burlar’ o sistema, não conseguindo captar e identificar o automóvel, podendo assim, ser considerada uma falha, mesmo que seja necessária uma velocidade intangível para veículos comuns.

Nesta interpretação, destacamos um aparente equívoco do grupo ao registrar o resultado “ $\sim 70\text{m/s}$ ” ao invés de 63m/s, no entanto, tal resultado se deve a uma aproximação grosseira adotada para o tempo de resposta da câmera ($1/3 \cong 0,3$). Nesse caso, o veículo passaria no radar com a velocidade de 226,8km/h e não 252km/h, como concluíram.

Neste instante do desenvolvimento da atividade de modelagem pareceu oportuno colocar algumas questões para que o grupo refletisse e pudesse refinar sua abordagem da situação: qual a implicação prática de desconsiderar a existência de uma distância do poste do radar até o primeiro sensor na pista? Se a câmera tem um tempo de resposta de $1/3$ de segundo entre seu acionamento e a captura da imagem, então é possível que ela capture a imagem de um veículo infrator assim que o mesmo cruza a linha do terceiro sensor? Qual a implicação de arredondar o tempo de $1/3$ de segundo para 0,3?

Com o intuito de contribuir para a reflexão dos estudantes, tendo em vista que eram iniciantes em atividades de modelagem, foi sugerido que se inteirassem de um recurso digital elaborado pela professora no GeoGebra.

A elaboração de tal recurso leva em conta as escolhas do grupo, conforme indicadas na Figura 6 e na Figura 7, bem como em sua descrição da atividade, e permite perceber geometricamente as implicações para a captura da imagem quando veículos estão em diferentes posições e faixas de rodagem. Na Figura 9 (9a, 9b e 9c) temos as seguintes representações: A indica a câmera, C a posição do poste em que está a câmera, B e D representam veículos, os segmentos de retas pontilhados demarcam as pistas de rodagem, as pequenas circunferências indicam os sensores, os segmentos AB e AD indicam a distância da câmera ao veículo dadas duas posições de veículos, sendo as medidas mínima e máxima,

respectivamente, considerando que a captura da imagem deve ocorrer a partir do terceiro laço e que se limita a 30 metros.

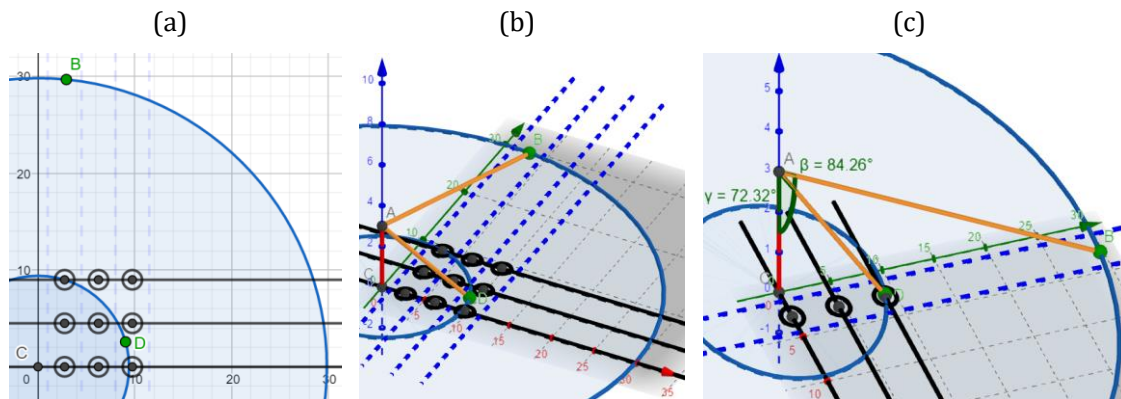


Figura 9. Representações do sistema estudado: (a) sensores no plano, (b) três pistas de rodagem, (c) destaque para uma pista de rodagem

Esta construção foi associada a controles deslizantes que permitiram aos estudantes a experimentação, usando diferentes medidas como: largura das faixas de rodagem, distância entre sensores, posição da base do poste em relação ao primeiro sensor. Além disso, os pontos B e D poderiam ser manipulados. Com a experimentação associada à geometria dinâmica, os estudantes tiveram a oportunidade de analisar diferentes conjecturas e simular a implicação de se alterar parâmetros.

- P: Não é interessante ter a informação de qual é a largura da faixa?
 E₂: Entendi..., faria uma diferença sim, porque, conforme o posicionamento da câmera e daí, conforme o tamanho da faixa influencia bastante.
- P: Essa ideia para vocês estava clara quando pensaram no sistema de funcionamento do radar?
 E₂: Aham, estava sim.
- E₁: Quando ele passa no terceiro sensor, no caso, já estará calculada a velocidade média do carro. Vai disparar a imagem no final dessa linha laranja?
 P: Então, vai depender do tempo de disparo da câmera. Vocês anotaram essa informação, né? Mas você concorda que vai depender da velocidade do carro para identificar em que altura desse trecho [movimentando o cursor] vai ser registrada a imagem?
 E₁: Sim, antes disso [último laço] é só para fazer as contas, na verdade.
- P: É, aqui é onde está o sistema, não é aqui que o carro é multado, é fotografado, não é nesse pedaço...
- E₂: Agora com o “esqueminha” deu para entender, deu para ter uma visão do sistema. Dá até para associar a velocidade, porque tá falando da velocidade, da angulação da câmera em relação ao poste...
- P: Então usem esse recurso, manipulem os parâmetros com os controles deslizantes para analisar diferentes possibilidades e procurem obter um modelo matemático que indique em que

- ponto, além do terceiro sensor, o veículo infrator teria a imagem registrada.
- E₁: A gente pode, com base nesse gráfico do GeoGebra, pegar algumas informações e a partir delas calcular a distância. Acho que o que faltava era isso, essa imagem já clareou bastante coisa.

Por meio da experimentação subsidiada pela construção do sistema no GeoGebra, os estudantes associaram diferentes medidas de forma a considerar que o poste estava a certa distância do primeiro sensor, além do fato de que o registro fotográfico é feito depois do veículo passar pelo terceiro sensor. E, para o caso investigado, o tempo de reação da câmera considerado, não registraria um veículo com velocidade acima de 250km/h.

No entanto, o relatório final dos estudantes sinalizou que estes não tiveram autonomia para estabelecer as relações de forma generalizada. Assim, considerando a impossibilidade de realizar novos encontros de orientação devido à finalização do semestre letivo, a professora buscou sistematizar a abordagem desse grupo mostrando-lhe que é possível formular um modelo matemático que permite responder ambas as questões. Isso se deu de forma expositiva na última aula síncrona com a turma e o *link* para manipular o recurso digital indicado na Figura 9 e na Figura 10 foi disponibilizado previamente aos estudantes.

Para simplificar a situação e viabilizar a obtenção do modelo supôs-se que: o poste tem 3 metros e está alinhado ao primeiro sensor e dista 2,5 metros deste; a distância entre o início do primeiro sensor e final do terceiro é de 9 metros; a câmera sempre é ativada assim que o veículo infrator finaliza a passagem sobre o terceiro sensor e leva 1/3 de segundo para disparar e capturar a imagem; a câmera tem alcance máximo de 30 metros; o limite de velocidade para esse radar é de 70km/h, ou seja, aproximadamente 19,4m/s.

As variáveis e parâmetros são: velocidade do veículo calculada pelo sistema (V em m/s); deslocamento do veículo, em linha reta, do primeiro sensor até o ponto em que a imagem é captada (d em metros); distância da base do poste até o ponto em que a imagem é registrada (d_p em metros); distância da câmera até o ponto em que a imagem é registrada (d_c em metros). A Figura 10 ilustra essa situação.

Temos então que $d = \frac{1}{3}V + 9$ é o deslocamento realizado pelo veículo entre o início do primeiro sensor até o momento em que a imagem é registrada. Esse modelo depende da velocidade do veículo, e pode ser escrito como $d(V) = \frac{1}{3}V + 9$ e faz sentido se $V \geq \frac{70}{3,6}$ e $d_c = \sqrt{(d_p)^2 + 3^2}$, sendo que $(d_p)^2 = (2,5)^2 + d^2$ ou seja, $(d_p)^2 = (2,5)^2 + \left(\frac{1}{3}V + 9\right)^2$ ou, ainda, $(d_p)^2 = \frac{1}{9}V^2 + 6V + 88,5625$.

Assim, $d_c = \sqrt{\frac{1}{9}V^2 + 6V + 97,5625}$ é o modelo que indica a distância da câmera até o momento em que a imagem é registrada e também depende da velocidade do veículo, ou seja, $d_c(V) = \sqrt{\frac{1}{9}V^2 + 6V + 97,5625}$. Com esse modelo, foi possível responder “em qual situação o sistema deixa de funcionar?”, pois, fazendo $d_c(V) = 30$ resulta, aproximadamente,

$V = 62,2\text{m/s}$ ou, ainda, $223,94\text{km/h}$, estando o veículo a $29,7\text{m}$ do início do primeiro sensor.

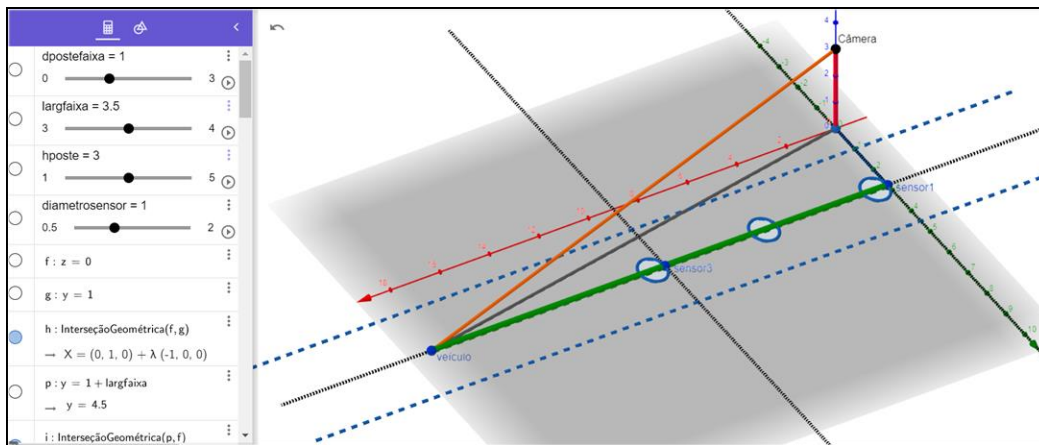


Figura 10. Representação do sistema ajustada aos dados

Discussão e resultados

A pesquisa empírica incide sobre dois grupos de estudantes que têm especificidades com relação às experiências com modelagem matemática, à formação matemática e à natureza dos dados coletados em cada uma das situações investigadas nas atividades de modelagem. Para estes grupos, destacamos elementos que revelam *nuances* relativas às indagações mediadoras da nossa questão de investigação: (a) Como diferentes grupos de estudantes usam a experimentação em atividades de modelagem matemática? (b) A experimentação realizada pelos estudantes fornece elementos para que eles expressem o que aprendem ao desenvolver atividades de modelagem matemática? (c) Por que os estudantes usam a experimentação quando desenvolvem atividades de modelagem matemática? Estes elementos são apresentados na Tabela 2.

Os estudantes dos cursos de Engenharia não tinham experiências anteriores com modelagem e cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. É possível considerar que isso os influenciou, inicialmente, a não usar a experimentação para explorar diferentes possibilidades para construir soluções para o problema, sendo necessária a intervenção da professora que sugeriu a experimentação com o GeoGebra. Integrar essa ferramenta na abordagem matemática da situação ampliou as possibilidades de matematizar essa situação, embora também tenha surgido para os estudantes a necessidade de se familiarizar com o *software*, o que implicou em uma carga cognitiva mais elevada, como já pontuam Greefrath et al. (2018).

Tabela 2. Elementos dos dois grupos relativos às indagações da pesquisa

Indagações	Licenciatura em Matemática	Engenharias
(a)	<p>Usam hipóteses e matematizações distintas e, com apoio da tecnologia, obtêm dois modelos matemáticos distintos.</p> <p>Fazem simulações com os modelos matemáticos para obter uma resposta para o problema.</p>	<p>Realizam ensaios que dão suporte à formulação de conjecturas: “analisar diferentes influências na detecção de infrações – posicionamento do carro, captura de imagens pela câmera, ângulo de inclinação da câmera em relação ao poste”.</p> <p>Elaboram uma representação do sistema para compreender as relações entre as variáveis.</p> <p>Fazem simulações manipulando parâmetros em um recurso digital elaborado pela professora com GeoGebra, a fim de averiguar a viabilidade das respostas que encontraram.</p>
(b)	<p>Analisa os dados e visualiza seu comportamento: “<i>Não, linear não é, dá pra ver nos dados da tabela. [...] Eu já acho que dá pra usar exponencial, tipo daquela outra atividade, porque é sempre positivo</i>”.</p> <p>Esclarecem procedimentos para a construção do modelo: “<i>[...] usar o ajuste de curvas porque daí usa todos os pontos da tabela</i>”.</p> <p>Reconhecem conteúdos já estudados: “<i>[...] usar aquela equação lá de EDO, acho que lei de Newton chama</i>”; “<i>[...] vamos usar o ajuste lá, o método dos mínimos quadrados que nós usamos lá no problema dos peixes</i>”.</p> <p>Reconhecem especificidades da situação que precisam ser incorporadas no modelo matemático: “<i>a temperatura não pode ser menor do que 27°C</i>”, pois entendem que isso só seria possível se ligassem o ar condicionado.</p>	<p>Percebem que a obtenção da velocidade não seria um problema a ser modelado já que o sistema registra as informações e realiza o cálculo.</p> <p>Usam conhecimentos técnicos sobre a situação para a formulação de hipóteses.</p> <p>Reconhecem conteúdos já estudados.</p> <p>Experimentar com o recurso digital auxilia na percepção do que é possível implementar: “<i>Dá até para associar a velocidade, porque tá falando da velocidade, da angulação da câmera em relação ao poste...</i>”.</p>
(c)	<p>Para aprimorar o modelo inicialmente construído: “<i>[...] eu acho que dá pra usar equações diferenciais</i>”;</p> <p>Para comparar resultados: “<i>[...] Vocês compararam então os dois modelos?</i>”</p> <p>Para simular resultados do modelo com o parâmetro obtido para o modelo.</p>	<p>Para fazer simulações hipotéticas com dados sugeridos nas suas fontes de pesquisa.</p> <p>Para explorar as características da situação usando recursos digitais.</p> <p>Para aprimorar a resposta e obter um modelo para a situação: “<i>Agora com o ‘esqueminha’ deu para entender, deu para ter uma visão clara do sistema.</i>”</p>

No curso de Licenciatura em Matemática, por sua vez, dados prontos foram apresentados aos estudantes e suas ações no desenvolvimento da atividade ficaram associadas aos diferentes encaminhamentos para a matematização e foi para isso que a experimentação com a tecnologia serviu como suporte. Nesse caso, em concordância com o que apontam Emden e Sumfleth (2014), os estudantes definiram hipóteses, executaram procedimentos com o apoio de *softwares* e, a partir de um resultado, revisaram a hipótese e passaram a outra matematização. O grupo revela uma associação entre o modelo e a situação em cada matematização e, ao final, os próprios estudantes reconhecem a robustez de um dos modelos em relação ao outro. A experimentação, apoiada na tecnologia, atua como reguladora da relação entre conhecimento matemático e conhecimento da situação.

O que se pode inferir pela análise das duas atividades é que, embora os grupos de estudantes tivessem formação e experiências específicas e a natureza das situações que investigaram também fosse distinta, o uso da tecnologia lhes proporcionou uma experimentação com configuração diversa daquela apontada em Birta e Arbez (2007) em que a ênfase da experimentação está no uso dos modelos construídos. Nas duas atividades os estudantes também manipularam e articularam dados com ferramentas digitais.

Para o grupo que resolveu o problema da temperatura, a experimentação com a tecnologia proporcionou construir modelos a partir de hipóteses e avaliar qual delas pode ser mais adequada para a situação. Já no estudo da eficiência de um radar pelos estudantes da Engenharia, a experimentação com a tecnologia proporcionou visualizar o problema geométrico associado à instalação do radar bem como, com a ferramenta de geometria dinâmica, simular e analisar conjecturas relativas a essa instalação. Assim, embora a tecnologia tenha dado suporte a grande parte da experimentação dos estudantes, seu uso pelos dois grupos tem especificidades, sendo que no segundo caso a matematização para responder as questões do grupo precisou ser sistematizada pela professora.

No caso dos estudantes do curso de Licenciatura, a tecnologia se situa como *parceira*, conforme reconhecido por Geiger (2005). Sob esta metáfora, como sugerem Galbraith e Fisher (2021), a tecnologia atua como parceira que produz resultados que promovem discussão entre os estudantes, que passam a comparar e analisar esses resultados. Foi essa a utilização da tecnologia no problema da variação da temperatura: produzir respostas que teriam que ser analisadas e interpretadas pelos estudantes, considerando o significado desses resultados no contexto matemático e no contexto do problema. Neste caso, a experimentação se associou a essa análise de respostas produzidas pela tecnologia. Os indícios de aprendizagem decorrem da expressão de comportamentos dos estudantes que sinalizam como souberam usar e avaliar os resultados por meio do uso de conceitos da matemática e sua relação com o problema real em estudo.

Já na atividade desenvolvida pelos estudantes dos cursos de Engenharias, a tecnologia tem um papel muito próximo do que em Geiger (2005) se caracteriza como *tecnologia como*

extensão de si mesmo. Segundo Galbraith e Fisher (2021) este é o modo mais completo de uso da tecnologia. Neste caso, a experiência com a tecnologia amplia o repertório matemático dos estudantes, ou, no caso da atividade de modelagem, o que se pode dizer da situação do ponto de vista matemático é parte do que o uso da tecnologia produz. Embora iniciantes no uso da tecnologia, na formação matemática e também na sua familiaridade com a modelagem matemática, o uso da tecnologia no problema do estudo da eficiência do radar, só se tornou presente na sala de aula e só pode ser entendido mediante as representações e simulações viabilizadas pelo uso do GeoGebra.

Assim, como usada pelos estudantes, a experimentação apoiada na tecnologia inclui a estruturação de ideias, o planejamento e a execução de um experimento (computacional) e a discussão dos resultados, conforme apontam Emden e Sumfleth (2014). Nestas diferentes instâncias da experimentação, os estudantes sinalizam, nos diálogos e nos seus registros, aprendizagem da matemática, da situação da realidade e da interlocução das duas na atividade de modelagem. Considerando, portanto, a questão de pesquisa - *Como a experimentação pode mediar a aprendizagem em atividades de modelagem matemática?* - nosso olhar neste artigo nos permite inferir que a experimentação permeou a aprendizagem. As particularidades de cada grupo colaboraram para que a aprendizagem dos estudantes tivesse especificidades que se referem à situação da realidade estudada, à matemática, às características do curso e ao uso da tecnologia realizado pelos grupos.

Considerações finais

Pensar atividades de modelagem como uma oportunidade para a aprendizagem exige considerar quais condições essa aprendizagem pode requerer e como ela pode se constituir no desenvolvimento de atividades de modelagem. Neste artigo abordamos esse aspecto apontando a experimentação e sua associação com a tecnologia digital como meio para gerar ideias, proporcionar ações e conduzir à utilização de ferramentas que podem colaborar para a aprendizagem.

Para inferir, a partir da experimentação dos estudantes em atividades de modelagem, a possibilidade de proporcionar aprendizagem, discutimos como eles usam a experimentação, porque a usam e como dela emergem comportamentos que indicam aprendizagem. Concluímos que, embora especificidades dos estudantes que desenvolveram as atividades possam ter tido influência sobre o modo como eles usaram a experimentação com a tecnologia, ela foi evidenciada nas atividades. Nos dois grupos, as experimentações realizadas com as ferramentas tecnológicas e os resultados delas decorrentes para o problema em estudo na atividade de modelagem matemática produziram condições para que os estudantes sinalizassem o que aprenderam. O enfoque do presente artigo, dirigindo-se à experimentação dos estudantes e sua associação com a tecnologia digital, lança luz sobre a relevância de, na dinâmica de uma atividade de modelagem matemática, proporcionar

meios para que o estudante se engaje nas ações, tome decisões, esteja em interação com o professor, com os colegas e com os meios que lhe permitem experimentar no desenvolvimento de atividades de modelagem.

Assim, notando que a natureza dinâmica de atividades de modelagem envolve articulações entre o domínio de inquérito, a realidade, uma base teórica e o sistema matemático, como sugere Blomhøj (2004), nossa pesquisa leva a considerar que a experimentação é uma ação que pode propiciar esta articulação e viabilizar aos estudantes aprender por meio dela.

Notas

¹ Neste texto a palavra *modelagem* é sempre entendida como modelagem matemática.

² Os estudantes do grupo já conheciam os softwares *CurveExpert* e *GeoGebra* e os usaram nesta atividade.

Referências

- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1), 19-30. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4>
- Araki, P. H. H. (2020). *Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com modelagem matemática: Uma análise semiótica* (Dissertação de mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Brasil. <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4898>
- Araújo, J. L., & Lima, F. H. (2020). The mathematization process as object-oriented actions of a modelling activity system. *Bolema*, 34(68), 847-868. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a01>
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto.
- Bean, D. (2015). A modelagem de Monteiro Lobato: O caso da fábula a cigarra e a formiga. Paper presented at the *9th Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*, São Carlos, Brasil.
- Birta, L. G., & Arbez, G. (2007). *Modelling and simulation – Exploring dynamic system behaviour*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2783-3>
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (Vol. 1, pp. 73-96). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1982). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Allyn and Bacon.
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b105001>
- Brito, D. S., & Almeida, L. M. W. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 21(1), 1-29.
- Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling – a 50-year study. *ZDM Mathematics Education*, 50(1), 61-75. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0899-8>
- Carreira, S. (2019). Modelação Matemática e simulação no contexto escolar: conexões entre mundos. In *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2019)*, (pp. 47-62). SPIEM.

- Carreira, S., Amado, N., & Canário, F. (2013). Students' modelling of linear functions: How GeoGebra stimulates a geometrical approach. In B. Ubuz et al. (Eds.) *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education - CERME 8* (pp. 1031-1040). Middle East Technical University.
- Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the students' sense of credibility. *ZDM Mathematics Education*, 50(1/2), 201-215. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0905-1>
- Cunha, A. (2007). *Dicionário etimológico da língua portuguesa* (3.^a ed.). Lexikon.
- D'Amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. Editora Livraria da Física.
- Emden, M., & Sumfleth, E. (2014). Assessing students' experimentation processes in guided inquiry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(1), 29-54. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9564-7>
- Galbraith, P., & Fisher, D. M. (2021). Technology and mathematical modelling: addressing challenges, opening doors. *Quadrante*, 30(1), 198-218. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23710>
- Gallegos, R. R., & Rivera, S. Q. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*. 28(3), 91-110.
- Geiger, V. (2005). Master, servant, partner, and extension-of-self: A finer grained view of this taxonomy. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Building connections, theory, research and practice* (pp. 369-376). MERGA.
- Greerath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA 14* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Greerath, G., Hertleif, C., & Siller, H-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, 50(1/2), 1-12. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>
- Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM - The International Journal on Mathematics*, 40(2), 225-234. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0088-x>
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: O futuro do pensamento na era da informática*. Editora 34.
- Meier, M., & Gravina, M. (2012). Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1(1), CCL - CCLXIV.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2019). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 97-110. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01085-1>
- Schwartz, J. L. (2007). Models, simulation and exploratory environments: a tentative taxonomy. In R. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 193-200). Laurence Earlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781003064527>
- Silva, K. A. P., & Dalto, J. O. (2017). Uma estratégia de avaliação de atividades de modelagem matemática. *REIEC*, 12(2), 1-17.
- Villarreal, M., & Mina, M. (2020). Actividades experimentales con tecnologías en escenarios de modelización matemática. *Bolema*, 34(67), 786-824. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a21>
- Vinci, C. F. R. G. (2018). O conceito de experimentação na filosofia de Gilles Deleuze. *Sofia*, 7(2), 322-342. <https://doi.org/10.47456/sofia.v7i2.20467>
- Vos, P. (2006). Assessment of mathematics in a laboratory-like environment: the importance of replications. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1696-1705). ERME.

- Wess, R., Siller, H-S., Klock, H., & Greefrath, G. (2021). *Measuring professional competence for the teaching of mathematical modelling: A test instrument*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5_3.
- Ye, Q., Blum, W., Houston, K., & Jiang, Q. (2003). *Mathematical modelling in education and culture*. Horwood Publishing Limited.