

La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria

Modelling as a vehicle for the development of covariational reasoning in secondary education

Selene Moreno Sandoval 

Universidad Juárez del Estado de Durango
México
selene.moreno@ujed.mx

Angelina Alvarado Monroy 

Universidad Juárez del Estado de Durango
México
aalvarado@ujed.mx

Resumen. Este artículo describe cómo se favorece el desarrollo del razonamiento covariacional en 18 alumnos (14 años), a través de actividades de modelización, apoyadas con simulaciones participativas para abordar el problema del escaso acceso a la atención médica en los pueblos indígenas mexicanos, situando a los estudiantes de secundaria en diferentes escenarios presentes en la propagación de una enfermedad. Se sigue la metodología basada en el diseño y se enfatiza en la fase de experimentación para documentar la actividad colectiva de los alumnos y comprender cómo crean conciencia de la situación. Se analizan las múltiples interacciones entre los participantes utilizando los esquemas de argumentación de Toulmin y el marco de desarrollo del razonamiento covariacional. Desde la participación de los estudiantes como agentes activos dentro de las simulaciones, se provoca el surgimiento de modelos emergentes que son objeto de discusiones y cuya finalidad es el refinamiento de los mismos. Finalmente, la abstracción del modelo emerge de los patrones de la información relativa a la estructura emergente, aproximándose a la descripción matematizada de la realidad presentada.

Palabras-clave: razonamiento covariacional; modelos y modelización; simulaciones participativas; actividad colectiva.

Abstract. This article describes how the development of covariational reasoning is favoured in 18 students (14 years old), through modelling activities, supported by participatory simulations to address

the problem of scarce access to medical care in Mexican indigenous populations, placing secondary school students in different scenarios occurring in the spread of a disease. The design-based research was used as the research methodology and the experimentation phase is emphasized to describe the collective activity of the students and understand how they developed an awareness of the situation. Multiple interactions between participants are analysed using Toulmin's argumentation schemes and the covariational reasoning development framework. From the participation of students as active agents within the simulations, emerging models provoke discussions that lead to their refinement. Finally, the abstraction of the model emerges from the patterns of the information relative to the emergent structure, approaching the mathematized description of the presented reality.

Keywords: covariational reasoning; models and modelling; participatory simulations; collective activity.

Introducción

Un reto del docente de matemáticas de la escuela secundaria es lograr que los estudiantes se interesen por una situación de cambio con variables, para desarrollar el conocimiento matemático e interpretarlo. Esta investigación se centra en la covariación como un fenómeno que involucra diferentes conceptos, procesos y representaciones matemáticas que se introducen en la educación secundaria, además de que aparece en una gran variedad de contextos. Para León (2017), cobra importancia si se recuerda que su interpretación se puede hacer en contextos no escolares: por ejemplo, el nivel de la lluvia o la modificación anual del valor del salario mínimo en el país.

En este punto, se refleja la necesidad de favorecer la comprensión y capacidad de análisis de los estudiantes al tratar modelos matemáticos con patrones de cambio en sistemas dinámicos. Al respecto, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) puntualiza en la oportunidad que deberían de tener los educandos de usar modelos matemáticos para representar relaciones cuantitativas. Sin embargo, indican que la noción de cambio es incomprendida, aun después de estudiar el cálculo diferencial. Thompson y Carlson (2017) proponen un marco para estudiar el razonamiento covariacional en los estudiantes cuando tratan de comprender situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian de manera simultánea.

Es importante desarrollar de manera temprana los aspectos cualitativos de los procesos de cambio a través de simulaciones participativas permitiendo a los estudiantes interactuar con sistemas dinámicos de su contexto (Stroup et al., 2007; Stroup & Wilensky, 2014). Por ejemplo, las simulaciones en NetLogo¹ (con HubNet, para crear una red local) abren la participación a los estudiantes al permitirles formar parte del modelo como agentes activos representados en un espacio común con un ícono, a la vez que interactúan con sus compañeros visualizando la

manera en que sus acciones modifican el compartamiento del fenómeno estudiado (e.g., ser parte de la población en la que se propaga una enfermedad). Este enfoque basado en un diseño generativo implica “orquestrar la actividad en el aula de manera que provoque un compromiso productivo y creativo de los participantes, caracterizado por una agencia colectiva” (Stroup et al., 2005, p. 188).

Por su parte, Carlson et al. (2003) han mostrado estudios sobre la mejora de la instrucción de la covariación a través de actividades de modelización, lo cual da pie a pensar en trabajar con éstas desde temprana edad para evitar esperar hasta años posteriores cuando se agudizan las dificultades en la comprensión de éstas.

Con la motivación precedente se propone una secuencia didáctica centrada en actividades de modelización y enriquecida con simulaciones participativas para comprender cómo favorece el desarrollo del razonamiento covariacional en jóvenes de secundaria.

Marco teórico

Atendiendo al panorama presentado en la introducción, se describen ahora los enfoques teóricos que sustentan esta propuesta: la perspectiva de modelos y modelización (Lesh & Doerr, 2003), así como, la emergencia de modelos en diseños para grupos desde simulaciones participativas en NetLogo (Stroup et al., 2007) para desarrollar los comportamientos del razonamiento covariacional de los estudiantes (Thompson & Carlson, 2017).

Modelos y modelización

A nivel internacional existe un consenso para introducir la modelización matemática en el aula desde edades tempranas con la intención de conectar problemas de la realidad con las matemáticas en un sentido apropiado, donde los estudiantes puedan procesarlos y resolverlos utilizando las matemáticas que ya conocen y/o provocando el surgimiento de matemáticas nuevas para ellos, a través de modelos que emergen de situaciones en un contexto real, figurado o formal. Los modelos, de acuerdo con Lesh y Doerr (2003), son entendidos como:

sistemas conceptuales expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas – de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente. (p. 10)

La perspectiva de modelos y modelización (PMM) de Lesh y Doerr (2003) propone emplear situaciones abiertas para permitir a los alumnos desarrollar el conocimiento y la habilidad para la construcción de modelos e interpretaciones, de modo que el producto del aprendizaje no es el modelo por sí mismo, sino que el proceso para su creación es el generador de aprendizajes.

Una Secuencia de Desarrollo de Modelos (SDM), en esta perspectiva, es vista como un conjunto de situaciones propuestas como medio para provocar el surgimiento de modelos y el interés por aprender a pensar matemáticamente, construyendo una interpretación acerca de la situación, la cual está ligada a conocimientos y experiencias previos. Para Lesh y Doerr (2003) las SDM:

van más allá de simples ecuaciones algebraicas de forma cerrada, implican describir situaciones matemáticamente, y los procesos de matematización relevantes pueden ir desde la cuantificación de información, a la cualificación en el espacio y coordinaciones de ubicaciones necesarias. (pp.15-16)

Además, requieren de un esquema organizativo (Figura 1), para proporcionar una herramienta poderosa que enfoque la atención en un sistema conceptual y se diseñan siguiendo seis principios pedagógicos (Lesh et al., 2003) con el propósito de crear simulaciones auténticas de la vida real, que en muchos casos el uso de tecnología digital ayuda para que los estudiantes puedan adentrarse o ser parte de las propias simulaciones como veremos en la siguiente sección.

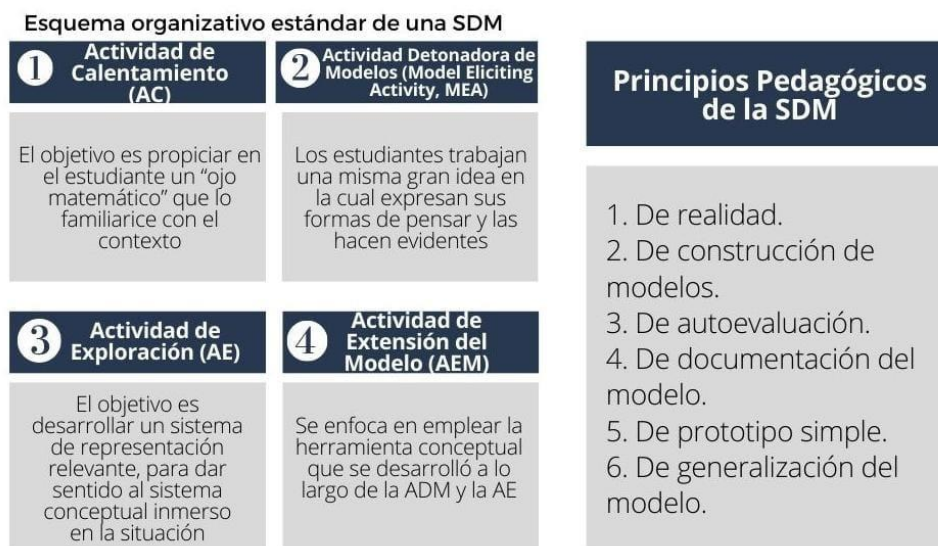


Figura 1. Componentes de una SDM con información de Lesh et al. (2003)

Simulaciones participativas y modelos emergentes

La teoría de modelos emergentes ayuda a construir una ruta para reinventar las matemáticas convencionales, permitiendo apropiarse de conceptos en ciertos contextos, haciendo más sencilla la transferencia de éstos a nuevos problemas y contextos (Gravemeijer, 1999). Estos modelos resultan de un proceso compuesto por varios modelos informales empleados para resolver algún problema en cierto contexto, los cuales se van refinando y terminan por surgir modelos

genéricos que se pueden adecuar a contextos diferentes, pero similares en el sistema conceptual empleado. Entonces, el modelo es una entidad con derecho propio y se vuelve significativo para simbolizar la actividad matemática (Gravemeijer, 1999). Por ello, éste surge siendo familiar para los alumnos y, posteriormente, se mueve hacia un modelo que busca el razonamiento de uno o varios conceptos.

Las simulaciones participativas (SP) son la vía para provocar los modelos emergentes; para Stroup et al. (2007) son “actividades de juego de rol apoyadas en una red [local], en las que se deben incorporar y discutir explícitamente ‘ideas fundamentales’ relacionadas con la dinámica de los sistemas y la teoría de complejidad” (p. 381). Para su diseño e implementación, ha sido utilizado NetLogo, por ser un lenguaje de modelización multiagente que se ha creado en la comunidad de sistemas complejos y es de uso libre. Para abrir la participación es necesaria una red local de conexión grupal provista por HubNet (Stroup & Wilensky, 2014). Con ésta los participantes pueden conectarse en un espacio común que promueve la diversidad y permite el desarrollo de formas de razonamiento, impactando de forma directa en la comprensión de sistemas dinámicos (Stroup & Wilensky, 2014). En este trabajo se utilizaron SP de NetLogo, en las cuales los estudiantes eran parte de la población en la que se propagaba una enfermedad (Figura 2).



Figura 2. Proceso de interacción de los estudiantes con NetLogo

Las actividades de modelización enriquecidas con SP han tomado un papel importante dentro de la educación matemática, pues en ellas los estudiantes entran en un juego, en el cual asumen un rol icónico dentro del modelo (los representa un cubo, un pulpo, etc.), generando interacciones y creando comportamientos emergentes en dicho sistema. De esa manera, en la red del aula, los estudiantes usan sus dispositivos individuales para controlar movimientos dentro de un sistema dinámico, haciendo que los comportamientos y el rol de cada alumno sea objeto de análisis. La atención se centra en las construcciones colectivas, pues los educandos

tienen una apreciación inicial cuando trabajan como agente individual y al introducirse en un entorno su comportamiento cambia, teniendo consecuencias en las características emergentes del sistema complejo (Stroup & Wilensky, 2014).

Las SP llevan consigo justo este compromiso participativo que está encaminado a desarrollar una comprensión poderosa de los fenómenos complejos, que son realmente interesantes para los alumnos y, por lo regular, están fuera del contexto de las escuelas. De esta manera toma más sentido para los educandos aprender ideas fundamentales, tales como la variación que sucede entre dos cantidades que cambian de manera coordinada, pues son exploradas a partir de su propia experiencia (Stroup et al., 2007).

Razonamiento covariacional

Diversos autores (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk & Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994) han realizado estudios en jóvenes que ingresan a la universidad, mostrando significativas deficiencias en la comprensión y análisis de las funciones y evidenciando dificultades para modelar relaciones funcionales; dichas complicaciones las presentan aun los estudiantes considerados talentosos en matemáticas.

Carlson et al. (2002) enfatizan la relevancia de la modelización de relaciones funcionales para la interpretación de eventos dinámicos y la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Asimismo, retoman la necesidad de refinar y profundizar en el razonamiento covariacional que, para ellos es: “la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la variación simultánea de dos cantidades” (p. 123), entendiendo la imagen como “dinámica, se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, como la fuente y el vehículo de operaciones mentales” (p. 124).

Para conceptualizar el razonamiento covariacional, Thompson y Carlson (2017) brindan una herramienta descriptiva de los comportamientos para caracterizar la capacidad de una persona en razonar covariacionalmente, explicando que un nivel utilizado para definir el comportamiento, da la confianza de razonar en todos los entornos en el nivel implicado, pero no en niveles superiores (Tabla 1).

Oehrtman et al. (2008) sostienen que, para razonar dinámicamente, el estudiante debe ser capaz de atender simultáneamente tanto a los valores cambiantes de la salida de una función como a la tasa de cambio a medida que los valores de entrada varían en intervalos en el dominio.

Tabla 1. Desarrollo del razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017)

Niveles de desarrollo del razonamiento covariacional (NDRV)	La persona ...
Variación coordinada continua suave	prevé aumentos o disminuciones en el valor de una variable simultáneamente con los cambios de otra, visualiza que ambas varían suave y continuamente (Razón de cambio instantánea).
Variación coordinada continua a tramos	visualiza cambios en el valor de una variable simultáneamente con cambios en el valor de otra, visualiza que ambas cambian de manera continua gruesa.
Coordinación de valores	coordina los valores de una variable con valores de otra para crear una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación gruesa de valores	forma una imagen gruesa de cantidades que varían juntas, como "esta cantidad aumenta mientras que otra disminuye".
Precoordinación de valores	visualiza que los valores de dos variables varían, pero asincrónicamente: una variable cambia, luego en la segunda variable hay cambios, etc. No anticipa creando pares de valores como objetos multiplicativos.
No coordinación	no tiene imagen de variables que varían de manera simultánea, se enfoca en la variación de una u otra sin coordinación de valores.

Con sustento en los elementos teóricos expuestos se diseña una secuencia de desarrollo de modelos enriquecida con simulaciones participativas que permiten promover el razonamiento covariacional de los estudiantes de educación secundaria.

Metodología

Se propone una SDM para promover el pensamiento covariacional de los estudiantes de secundaria en un ambiente enriquecido por simulaciones participativas de NetLogo. Para ello, se emplea la Metodología Basada en el Diseño (Cobb & Gravemeijer, 2008) iniciando con un análisis prospectivo, la experimentación de la secuencia y un análisis retrospectivo que toma en cuenta los resultados de los participantes para informar la mejora del diseño.

Participantes

Para explorar la secuencia, participaron ocho docentes de matemáticas de educación secundaria (tres hombres y cinco mujeres) con edades entre 25 y 35 años. En la experimentación de la secuencia, participaron estudiantes de tercer grado de una escuela secundaria

pública y obligatoria de un poblado rural de Durango, México, con limitaciones de infraestructura tecnológica y de conectividad. Las actividades se llevaron a cabo con 18 estudiantes (siete mujeres y 11 hombres) de edad promedio 14 años, durante el ciclo escolar 2019/2020 en siete sesiones de 50 minutos cada una.

Para un diagnóstico preliminar se exploraron con los estudiantes los ítems de PISA liberados en EducaLAB (2015) sobre cambio. Más del 80% de los estudiantes mostraron dificultades para ofrecer una solución. El aprendizaje de la covariación requiere de experiencias con entornos dinámicos de aprendizaje con tecnología y en el caso de estos estudiantes existen limitaciones para su uso, por ello en este trabajo se generaron condiciones para aproximarlos a estas experiencias.

Diseño de la Secuencia de Desarrollo de Modelos

La secuencia comprende cinco tareas, una para contextualizar, tres enriquecidas con simulaciones participativas para favorecer la exploración de situaciones donde emergen modelos asociados con la idea de covariación, y una para comunicar resultados, como se describe brevemente a continuación.

Tarea 1. Aquí no hay clínica, ni médicos, ni medicina... Los estudiantes leen un artículo que refleja la realidad de las poblaciones indígenas de los estados de Durango y Chihuahua en México. Presenta una noticia de una familia que vive en un pueblo sin acceso a la atención médica. El objetivo es promover la empatía de los estudiantes con la situación que atraviesan las poblaciones indígenas vecinas ante la falta de atención médica.

Tarea 2. Contagios en un pueblo sin médicos (Anexo 1). Los estudiantes: 1) experimentan simulaciones de NetLogo, sobre la propagación de una enfermedad contagiable al contacto en una comunidad sin médicos; 2) grafican sus predicciones sobre la propagación y las comparan con la gráfica de la simulación. Lo anterior, para analizar y refinar los modelos propuestos de la covariación cuali y cuantitativamente.

Tarea 3. ¡Llegaron los médicos a la comunidad! (Anexo 2). Aquí experimentan con simulaciones en NetLogo la propagación de una enfermedad que se contagia al contacto en una comunidad con médicos. Se pretende estudiar los modelos y compararlos con la situación de la Tarea 2 para generar conexiones.

Tarea 4. Comunicar los resultados. Los estudiantes escriben recomendaciones para las autoridades de la Secretaría de Salud de los estados implicados en la Tarea 1, con la intención de exponer la necesidad de mejorar la calidad de vida de estas poblaciones vulnerables. Con ello, se pretende identificar cómo los educandos hacen uso de los modelos experimentados en las simulaciones para construir sus argumentos.

Tarea 5. El virus (Anexo 3). Analizar cuali y cuantitativamente la propagación de un virus considerando las variables respecto al tiempo: total de población, personas enfermas, saludables e inmunes. El objetivo es provocar el uso de modelos propuestos para predecir una situación que involucra más de dos variables de manera que se evidencie el NDRV en otro contexto; así como expresar la razón de cambio por tramos en sus modelos para dar un valor que pueda interpretarse en la situación.

Ciclos de anticipación e implementación

Para el diseño, se llevaron a cabo dos ciclos que tuvieron momentos de implementación, análisis y rediseño, refinando iterativamente de acuerdo al entorno de aprendizaje (Brady et al., 2015). El primero fue el *ciclo de anticipación*, donde participaron docentes que, desde su experiencia, aportaron una visión preliminar de lo que pudiera suceder en el aula de secundaria. Dicha mirada permitió realizar un primer refinamiento del diseño elaborado por las autoras de esta investigación, además de integrar un inventario de posibles soluciones y anticipar un sistema conceptual emergente. El segundo *ciclo de implementación en el aula* se realizó con los estudiantes de secundaria.

Ambos ciclos pasaron por etapas de: concepción, prueba y refinamiento. Se realizó el *análisis prospectivo y retrospectivo* de la experiencia vivida en los ciclos, además de una evaluación a posteriori para validar el desempeño de los estudiantes en los ítems de cambio, liberados por PISA (EducaLAB, 2015).

Recolección y análisis de datos

La recolección de datos se realizó a través de videos, fotografías de las producciones de los participantes y capturas de pantallas de las simulaciones. Se seleccionaron episodios que daban cuenta de los rasgos de los NDRV, se transcribieron utilizando una numeración entre corchetes para distinguir los diálogos y para identificar a los estudiantes, se utilizó la E_x , donde el subíndice indica el número asignado al estudiante para una mejor referencia, mientras que a la profesora con P .

Los modelos emergentes fueron analizados mediante los esquemas de Toulmin (adaptados de Rasmussen y Stephan, 2008) como herramienta teórico-metodológica para documentar la actividad colectiva, misma que permite identificar:

- a) *Datos*: ideas que se buscan provocar con la actividad propuesta para luego ser compartidas en colectivo.
- b) *Garantías*: acciones que se evidencian en el grupo y que se quieren mantener para poder compartirlas y analizarlas.

c) *Conclusiones*: acciones mostradas por el colectivo, que permiten concluir ideas, las cuales se convierten en una práctica matemática en el aula, que de acuerdo a esta metodología es una colección de ideas compartidas que forman parte fundamental de la actividad matemática general del grupo.

Para fines prácticos, al finalizar cada escenario (sección de resultados) se muestra una tabla con las ideas y acciones que surgieron en cada una de las socializaciones propiciadas durante el análisis de los diferentes modelos emergentes, referentes al desarrollo del razonamiento covariacional, evaluado a través de los niveles propuestos por Thompson y Carlson (2017) y los elementos de matematización involucrados.

Resultados

Se analiza la información especificando la finalidad de cada una de las iteraciones realizadas y se ha procurado respetar el lenguaje usado en cada intervención.

Fase 1: análisis prospectivo

Para la SDM, se consideraron los elementos de la matematización alrededor de la covariación (Tabla 2). Siendo la finalidad identificar los conocimientos previos que se requieren para su ejecución y el alcance de las ideas matemáticas a desarrollar en los estudiantes, además de vincularlo con los aprendizajes esperados (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017); esto para empatar los objetivos de la SDM con el perfil de egreso al concluir la educación básica, así como un registro de vinculación entre los elementos de matematización y los NDRV. Para lo anterior, antes de llevar la secuencia a los estudiantes se revisó con un grupo de docentes de educación básica desde dos enfoques: a) vivir la experiencia como si fueran estudiantes; y b) reflexión y retroalimentación como docentes.

Tabla 2. Vinculación entre los elementos de matemáticas y NDRV

Tareas	Elementos de matematización para el NDRV asociados a los subgrupos
T2	Ubicar puntos en el plano. Relacionar coordenadas de un punto con su localización en el plano. [B: Precoordinación de valores] Visualizar la variación y las variables involucradas a través de gráficas. Identificar la relación de dependencia en la situación. [C: Coordinación gruesa de valores]
T3	Diferenciar y caracterizar variables dependiente e independiente. Refinar gráficas: presentar escala en los ejes y analizar el comportamiento por tramos. Caracterizar cualitativamente la variación: evidenciar la dirección del cambio con una noción intuitiva de la razón de cambio. [D: Coordinación de valores] Dar significado al comportamiento de la gráfica (variación nula, creciente y decreciente). Graficar sus predicciones: evidencia del sentido de cambio en diferentes escenarios. Vincular el valor de la

pendiente (cero, positiva, negativa) con su gráfica. Verbalizar diferentes direcciones de cambio en la situación y coordinarlo en una variable respecto a otra. Calcular la razón de cambio, en un tramo específico de la gráfica y relacionar su valor con el sentido de la variación. **[E-1. Variación coordinada continua a tramos o pieza]**

- T5** Verbalizar y analizar la dirección del cambio en una gráfica, argumentando su comportamiento con las variables involucradas. Calcular la razón de cambio a tramos (rectas): $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Establecer relaciones entre aspectos cualitativos y cuantitativos de la variación... Formalizar conceptos: elementos del plano cartesiano, razón de cambio, pendiente (representación verbal, gráfica, tabular, algebraica). **[E- 2, 3. Variación coordinada continua a tramos o piezas]**
-

Fase 2: implementación en el aula

La SDM se implementó para evaluar el diseño en un ambiente natural y observar de qué manera favorece el NDRV. La profesora fue administradora y gestora del espacio común de la SP, así como moderadora de la actividad colectiva en las socializaciones y el análisis de los modelos emergentes.

Como resultados, a modo de síntesis, se presentan las Tablas 3-10 con la ubicación y movimientos de NDRV, reflejando el nivel inicial de los estudiantes al comenzar cada escenario, los movimientos y el estado final revelado a través de los modelos emergentes propuestos, el análisis y la socialización de éstos. La Tabla 1 brinda información sobre el pensamiento de los jóvenes y el tránsito de los NDRV en ellos.

Los modelos emergentes del segundo ciclo se analizaron con los esquemas de Toulmin; así, al finalizar cada escenario se muestra una tabla con ideas y acciones que surgieron en cada una de las socializaciones referentes al tránsito de los NDRV, evaluado a través de los niveles propuestos (Tabla 1) y los elementos de matematización involucrados (Tabla 2).

Tarea 1

Los estudiantes leen el artículo periodístico sobre la noticia que expone las complicaciones de los pueblos indígenas para el acceso médico, posteriormente se les pregunta: ¿qué impacto crees que pueda tener en la población indígena la llegada de una enfermedad transmisible al contacto?

Al intercambiar sus ideas respecto a lo que habían leído, surgieron los comentarios [1-6], relacionados con la lectura:

- [1] E₈: [...], ellos viven como nosotros vivíamos hace una década, y si nos fijamos en los *tarahumaras* que hay aquí [los demás asienten] se nota que incluso solos se excluyen, casi no hablan o bueno ni siquiera intentan darse a entender, y nosotros estamos mal, porque tampoco les intentamos hablar, ¿se ha fijado? [...]

- [5] P: Justo para intentar comprender esto mejor, vamos a usar un programa en donde vamos a simular lo que estamos platicando.
- [6] E₇: Y con eso, ¿vamos a poder ver cómo se contagian?, porque al principio también pensaba como dice E₄, pero en algo tiene que ver los médicos en la propagación, sí cambia como se propaga, bueno eso pienso.

En la socialización se percibía una conexión y cercanía al contexto, los comentarios particularizan situaciones [1], la totalidad de los estudiantes hacen alusión a la vulnerabilidad de un pueblo - ante una enfermedad transmisible - que no cuenta con médicos, pero algunos dudan [6] cómo sería la propagación sin apoyo médico.

En lo anterior cobra sentido el *Principio de realidad* de una SDM (Figura 1), al propiciar el tránsito natural entre la lectura y la SP a través de NetLogo en donde los estudiantes interactúan simulando ser los habitantes de un pueblo indígena, tal como la lectura de la tarea 1 contextualiza una necesidad conectada con su realidad. Así las simulaciones permitirían comprender el comportamiento de la propagación de una enfermedad, poner a prueba sus ideas, generar un conocimiento matemático, y brindar la posibilidad de crear consciencia de la necesidad evidenciada.

Familiarización con NetLogo

La profesora ingresa a NetLogo a los modelos de HubNet donde encuentra la simulación de *propagación de una enfermedad* e indica a los estudiantes que accedan a una red común y que ingresen a HubNet para “recibirlos” en el espacio. Los estudiantes seleccionan el rol icónico que estarán jugando a lo largo de toda la sesión, si bien es bastante intuitivo el empleo de NetLogo, se vuelve indispensable interactuar entre todos los participantes, para identificar elementos importantes dentro del modelo empleado. La Figura 3 señala los elementos que reconocieron los participantes en su pantalla: apariencia del ícono seleccionado para que los represente, su localización en el plano expresada en coordenadas, su estatus sano/enfermo, el número de habitantes de la población, el número de contagiados, la representación gráfica tiempo-número de contagiados. El reconocimiento de tales elementos, posteriormente, facilita la interacción con el ambiente y encontrar patrones presentes en los diferentes modelos emergentes.

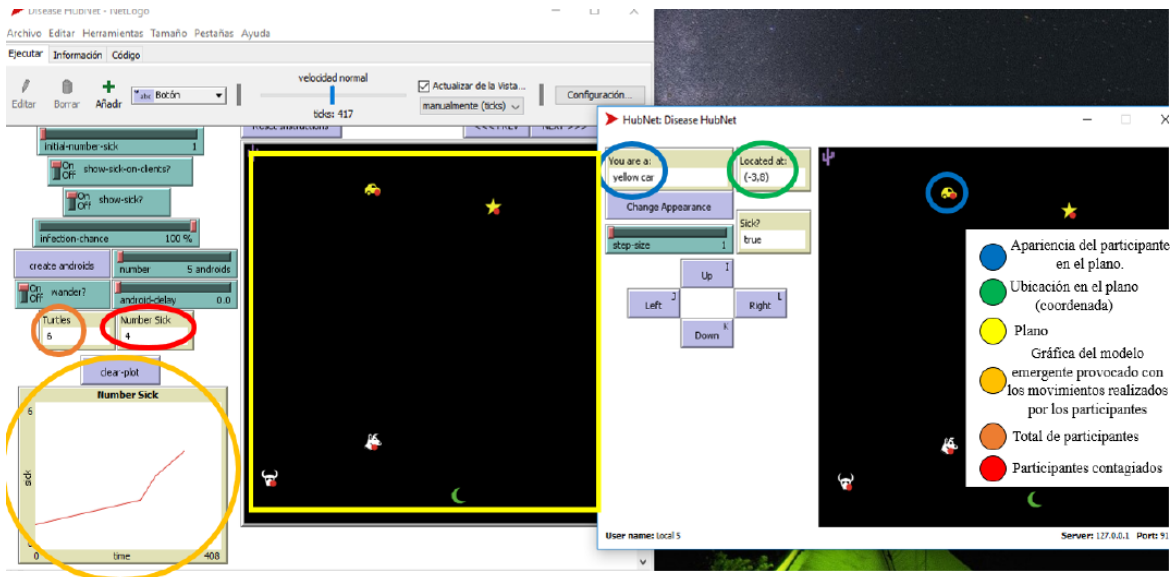


Figura 3. Elementos identificados de la SP en la pantalla de NetLogo y HubNet

Tarea 2

Se exponen los modelos emergentes en un escenario experimentado con la SP donde se analizó la situación del pueblo sin médicos. Esto propició la emergencia de modelos que revelaron el NDRV de los estudiantes (Tabla 3), respecto a la situación socializada previamente. Escenario 1, ¿Qué sucede cuando no sabes que estás enfermo?

Tabla 3. Escenario 1: Movimiento de niveles

NDRV y sus movimientos		
Subgrupo	Ubicación inicial	Alumnos en dicho nivel
B	Precoordinación de valores	15
C	Coordinación gruesa de valores	3
Subgrupo	Movimiento de niveles	Alumnos en dicho nivel
B	Precoordinación de valores	8
C	Coordinación gruesa de valores	10

Se socializó el siguiente escenario: “hay una persona en el pueblo con una enfermedad que se contagia al contacto, él no sabe que tiene la enfermedad y los síntomas que presenta no son inmediatos”. Se llevó a cabo una primera predicción del comportamiento en gráficas que para ellos representaban el escenario (Figura 4).



Figura 4. Escenario 1: Predicción. Ciclo de implementación en el aula

La predicción (Figura 4) es una muestra similar a la realizada por nueve de 18 estudiantes (subgrupo B) la cual, refleja una *precoordinación de valores* en los NDRV, aún en su forma primitiva, pues, aunque se genera la consciencia de qué cambia, y por qué está cambiando, aun no es de manera continua, existe una confusión en la representación mental (para ellos al enfermarse tiene sentido que su trazo sea decreciente, pues “caen enfermos”). Sin embargo, considerando las variables involucradas, la gráfica únicamente puede ser creciente o con tramos horizontales, es decir, los jóvenes requieren estimulación para el desarrollo de los NDRV, de modo que la imagen mental que tienen construida, respecto a las variables involucradas y su comportamiento, se empate con la gráfica de dicha variación.

Una vez trazadas las predicciones se procedió a “jugar” la SP en NetLogo, es decir, cada estudiante desde su dispositivo comienza a mover el ícono que se le asignó, de modo que a partir de dichos movimientos se empieza a trazar una gráfica en el simulador en donde se establece la relación entre tiempo (eje x) y enfermos (eje y), todo gracias a las interacciones provocadas por los estudiantes quienes se mueven de acuerdo al escenario que se les plantea en cada ocasión, en donde los íconos con un círculo rojo son quienes ya han sido contagiados.

Luego de jugar se traza la gráfica obtenida en el simulador en el mismo plano de la predicción para poder realizar comparaciones; al ser el primer escenario no se estableció una escala común pues se pretendía observar si para los estudiantes era necesaria (Figura 5).

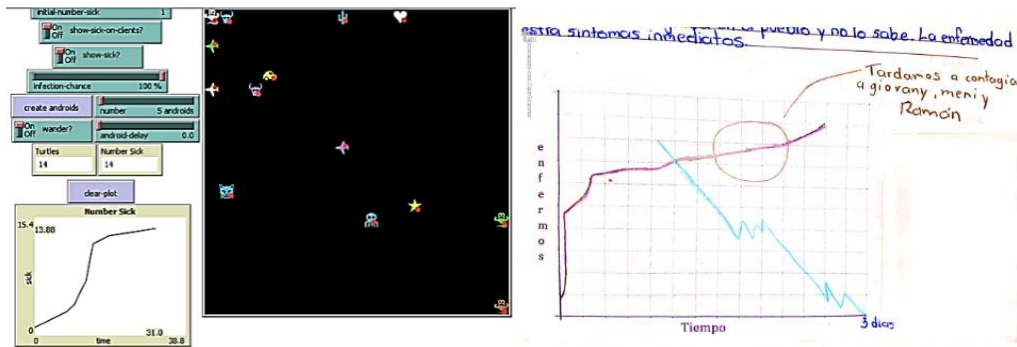


Figura 5. Comparación entre el modelo obtenido en la SP y la predicción de un estudiante

La gráfica obtenida inevitablemente provocó oportunidades para revisar sus predicciones, lo cual permite observar que se debe propiciar la habilidad de predecir el comportamiento de eventos en sus diferentes representaciones, dado que es una práctica común brindarles a los jóvenes la gráfica para que ellos obtengan información de allí, siendo más enriquecedor permitir que planteen la relación de dependencia, y reflejar en su predicción el comportamiento de la variación que consideran se está dando, buscando refinarse para tener conciencia de la relación en las variables involucradas. La Tabla 4 concentra la experiencia ¿qué sucede cuando no sabes que estás enfermo?

Tabla 4. Actividad colectiva: Implementación del escenario 1

Datos	Garantías	Conclusión	Coordinación gruesa de valores
Comprensión de la presencia de variación: Predicción del comportamiento de la situación con el bosquejo de gráficas. [7 - 11]*	Verbalizar la variación, se evidencia la dirección del cambio. Comparación entre las gráficas del bosquejo y la simulación. Diferenciar a la variable dependiente y la independiente, logrando caracterizarlas. [12- 16]*	Evidenciar la existencia de conciencia de que un modelo matemático es una representación ajustada de la realidad. [17 -23]*	Coordinación gruesa de valores

- *[7] P: ¿La gráfica que obtuvimos, se parece a la que predijeron?
- [8] E₃: No, yo la puse al revés.
- [9] P: ¿A qué se debe eso?, para los que pusieron algo como lo de E₃, ¿por qué consideraron que eso pasaría en la gráfica?
- [10] E₁₄: Lo puse así porque pensé que iban a caer muy rápido todos en la enfermedad, entonces no se me ocurría como representarlo y pensé que era así (señala la caída) era una buena idea.
- [11] E₁₂: Sí maestra, es que, p.ej., *yo lo puse como escaloncitos para abajo*, por lo mismo, *como que sentía que se iban a enfermar pronto, muchos*

- porque pues no, el infectado no sabía ni qué, entonces fue la primera idea que se me vino a la mente, *como que una caída*.
- [12] E₆: Es que ahí fue donde no se fijaron, porque si aquí (señala eje y) hubiera dicho personas sanas entonces sí sería, pues menos conforme pasa el tiempo. Pero dice enfermos, se supone que nos infectamos, ¿no?, tiene que ir para arriba.
- [13] P: ¡tiene sentido!
- [14] E₉: Sí, va para arriba pues
- [15] E₁₃: Sí, ¿cómo va a ir para abajo si no podemos curarnos?, yo por eso también le puse para arriba, ¿sí está bien verdad maestra?
- [16] E₁₄: Pues sí, pero de eso nos dimos cuenta hasta que jugamos, por eso dije que a mí no se me ocurría cómo ponerlo
- [17] P: ¿Qué pasó al principio con los contagios?
- [18] E₂: Corrieron más rápido, porque al principio muchos se contagiaron y va para arriba
- [19] P: ¿Qué sucedió al final?
- [20] Varios: Más lento.
- [21] E₁₅: Tal vez porque las personas vieron que se estaban contagiando y los últimos dos se están protegiendo.
- [22] P: ¿Y cómo logran ver eso en la gráfica?
- [23] E₁₇: Se ve que nosotros estábamos huyendo porque la gráfica no va tan arriba como al principio que fue rápido.

Tarea 3

Luego de potenciar modelos simulando a un pueblo sin atención médica, tuvieron la oportunidad de experimentar y comparar los modelos que emergieron cuando existía atención médica (representando con íconos blancos el rol de médicos). En esta simulación los habitantes enfermos acudían a los médicos y al tocarlos era posible desaparecer el círculo rojo (señal de contagio). Además, en la simulación se incluían habitantes “virtuales” o androides que el simulador controlaba, esto fue útil para observar lo que sucedía cuando no existe un control total del comportamiento en la población.

Por ello, inicialmente se les hizo una pregunta. Las respuestas fueron similares a la mostrada en la Figura 6: consideraron que la llegada de un médico provocaría disminución en la rapidez del contagio y habría modo de controlar la enfermedad.

Responde a la pregunta: ¿Cómo podría la presencia de un médico modificar la rapidez de propagación de la enfermedad en una comunidad?

no se van a contagiar rapido pues el medico la va a detener poco y no se propagara ya tan rapido.

Figura 6. Respuesta respecto al rol de un médico en la rapidez de propagación de una enfermedad

En el escenario 2 se provocó el movimiento de niveles sintetizados en la Tabla 5.

Tabla 5. Escenario 2. Movimiento de niveles

NDRV y sus movimientos		
Subgrupo	Ubicación inicial	Alumnos en dicho nivel
C	Coordinación gruesa de valores	2
D	Coordinación de valores	7
E-1	Primer acercamiento a variación coordinada continua a tramos	9

Subgrupo	Movimiento de niveles	Alumnos en dicho nivel
D	Coordinación de valores	7
E-1	Primer acercamiento a variación coordinada continua a tramos	11

El escenario corresponde con la situación: “Ha llegado al pueblo un médico con un lugar fijo para dar consulta, sin embargo, los dos contagiados en la comunidad no saben que están enfermos”.

Durante la interacción en NetLogo, las personas contagiadas tenían la oportunidad de acercarse al médico y curarse. Se estableció un lapso de 50 días pues consideraron pertinente el tiempo para observar cómo se comportaban los enfermos, la emoción por jugar la SP aumentaba, pues estuvo presente un agente que provocaba un cambio positivo, es decir, poder curarse de la enfermedad.

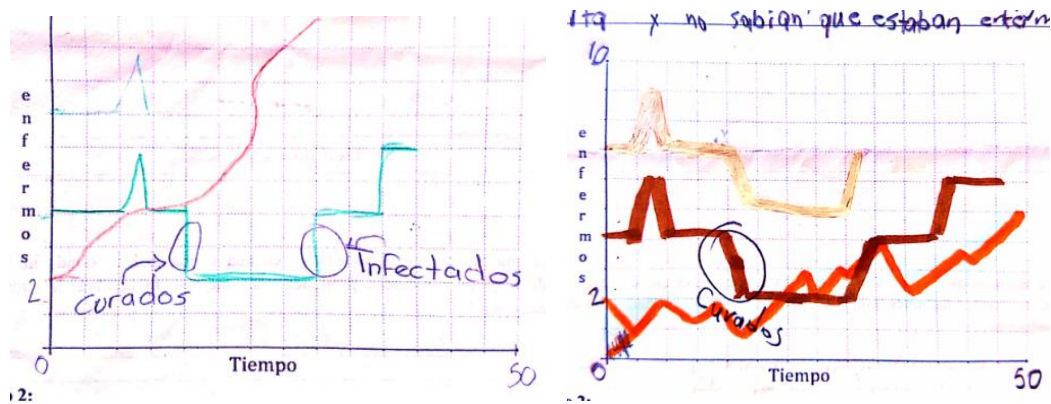


Figura 7. Escenario 2: Predicción del modelo (izquierda - subgrupo D; derecha - subgrupo E-1)

Luego de interactuar en la SP, siguió el análisis colectivo de las gráficas trazadas en las predicciones y la obtenida con NetLogo (Figura 7), permitiendo identificar dos tipos de predicciones:

1) Como en la Figura 7 (izquierda) así fue la predicción de siete de 18 estudiantes. Se observa que el trazo describe un crecimiento lento de los contagiados, no manejan descenso en la gráfica, lo que indica que la condición de la presencia del médico aún no tiene relevancia para ellos. Sin embargo, existe la consciencia del cambio, las variables involucradas, pero hace falta identificar el sentido del cambio acorde a las condiciones planteadas, vinculado con un nivel de Coordinación de valores (Tabla 1).

2) La Figura 7 (derecha) refleja un ejemplo similar a la predicción elaborada por 11 jóvenes, los cuales consideraron la condición del doctor, lo que se traduce en el trazo de las gráficas en la presencia de tres tipos de tramos en las rectas: ascendente, horizontal y descendente. Lo anterior muestra que han concebido la variación de la situación bajo las condiciones que modifican los valores de las variables, logrando refinar su predicción e incluso describir a la gráfica obtenida en la SP (Figura 8), mostrando una variación coordinada continua a tramos o piezas (Tabla 1).

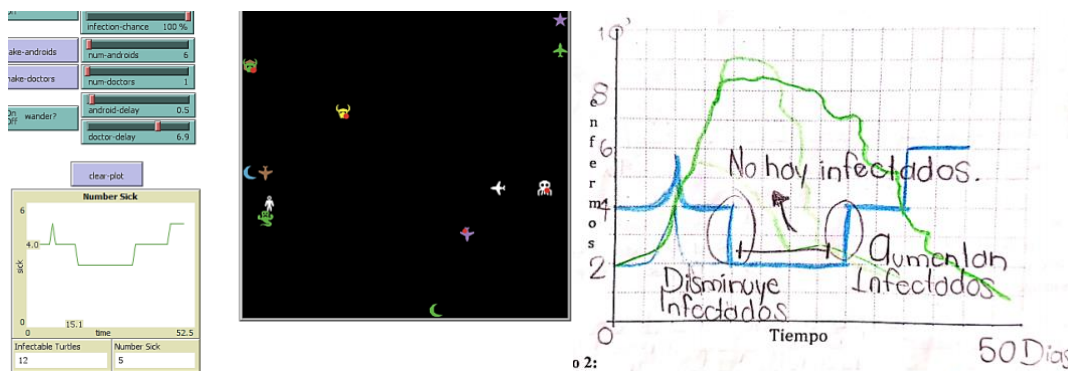


Figura 8. Comparación entre el modelo en la SP y la predicción de un estudiante

Enseguida se lee cómo los estudiantes caracterizaron el comportamiento cualitativo de la gráfica obtenida por la SP, y esto permitió al grupo corroborar las predicciones iniciales respecto a la presencia de tramos descendentes.

- [24]E₁₁: Aquí casi no infectaron, pero aquí infectaron a muchos, luego aquí tampoco casi no hubo infectados y aquí se curaron unos.
- [25]P: Entonces, E₁₁, ¿qué significa cuando la gráfica va así (señalando la recta descendente)?
- [26]E₁₁: Que se curaron unos.
- [27]P: Ok, fíjense lo que dice E₁₁, que cuando la gráfica en lugar de ir creciente, ¿cómo va?
- [28]E₈: Para abajo, bueno descendente más bien
- [29]P: ¡Exacto! para E₁₁ significa que hubo curados y cuando va creciente, ¿para E₁₁ que significa?
- [30]E₄: ¡Que hay aumento de infectados!
- [31]P: pero dice, cuando se mantiene horizontal casi no hay infectados, ¿casi no hay?
- [32]E₁₁: Sí, porque... quiero decir que no hay infectados más bien.

- [33]P: ¡Ah!, no infectaron a nadie, bien.
 [34]E₉: Es lo que le iba a decir cuando E₁₁ dijo eso porque más bien no hay nada de contagios en ese pedazo.

Durante la socialización surgió la interpretación de la pendiente en tres escenarios, cuando: a) incrementa la cantidad de contagios, [29-30]; b) no hay contagios, [31-33]); y c) asisten al médico y se curan, [25-28]. La Tabla 6 concentra los resultados del escenario *¡Llegó un médico al pueblo!*

Tabla 6. Actividad colectiva: Ciclo implementación en el aula, escenario 2

Datos	Garantías	Conclusión	
Descripción del comportamiento de la gráfica, cuando la variación es nula, creciente y decreciente. [24-27]	Vinculación del valor de la pendiente (cero, positiva, negativa) con su gráfica. [28 -34]	Análisis de la dirección del cambio de una gráfica argumentando su comportamiento. [30- 34]	Primer acercamiento a variación coordinada continua a tramos

Socialización Tarea 3

Una vez provocados los modelos emergentes en donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de ir refinando sus ideas, respecto a la forma en cómo debía de variar cada situación considerando además de las variables involucradas, las condiciones bajo las cuales se presentaba cada escenario, se dio la actividad colectiva para compartir sus opiniones.

Se retoma el comportamiento de las variables (tiempo y enfermos) ahora en los escenarios con médicos, de modo que sean capaces de verbalizar el cambio, describiendo de manera cualitativa la variación. Los jóvenes han creado una conexión fuerte entre el contexto y el sentido de la variación, así los modelos provocados a través de las SP cobran valor, pues son éstos los que han permitido llevarlos a generalizar la coordinación de valores más allá de un solo planteamiento: describen el sentido de cambio en distintas condiciones, logran distinguir la diferencia en la gráfica con y sin médicos, comprendiendo qué condiciones son las que influyen en que sean diferentes (Figura 9).

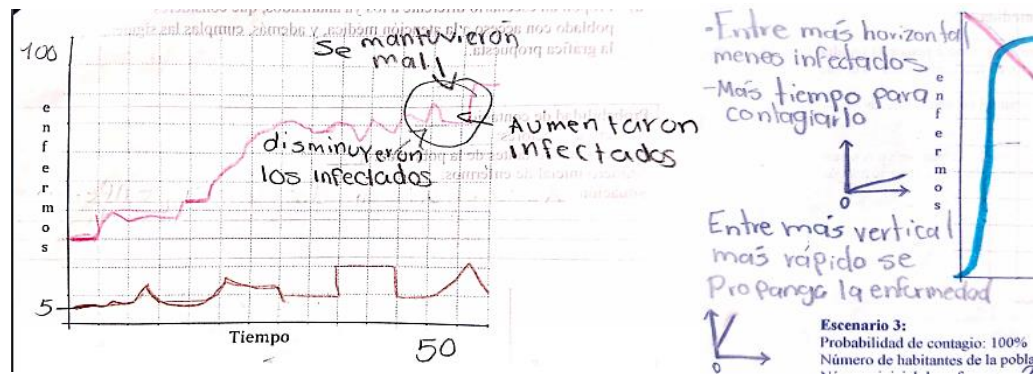


Figura 9. Verbalización del sentido de cambio en la representación gráfica

La Tabla 7 concentra los resultados del cálculo intuitivo del valor de la pendiente en la socialización.

Tabla 7. Cuantificación de valores: Movimiento de valores

NDVR y sus movimientos		
Subgrupo	Ubicación inicial	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	8
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	9
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	1
Subgrupo	Movimiento de niveles	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	6
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	9
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	3

Posterior a la socialización, se provocó que los jóvenes revelaran su pensamiento, e identificaran si era posible para ellos interiorizar la razón de cambio y de manera intuitiva obtener el valor de la pendiente en ciertos tramos de una gráfica, de modo que aun sin formalizar los conceptos ya los empleen.

Por ello, al considerar condiciones específicas de un tramo de recta, relacionan la obtención de la razón de cambio directamente con una división (Figura 10). No obstante, en algunos existe una confusión respecto al manejo de los datos, la razón obtenida representa la cantidad de días que tardaría en contagiarse una persona, lo que fue necesario corregir por ellos mismos, pues la relación era de los enfermos respecto al tiempo. Lo anterior, evidencia que probablemente en la gráfica puede ser clara la relación entre variables, pero se necesitaba más trabajo al cuantificarla, dado que puede llegar a causar conflictos en algunos estudiantes.

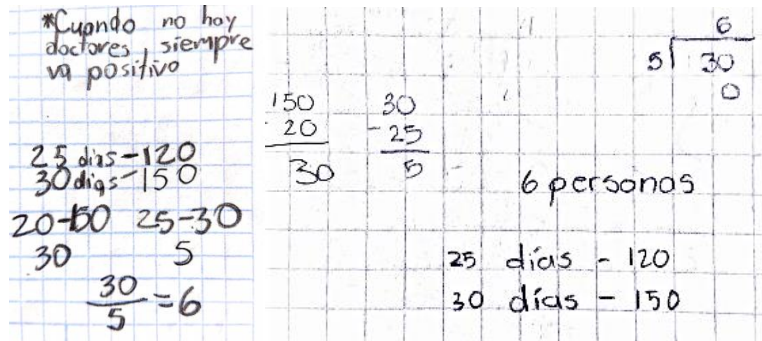


Figura 10. Primer intento de obtención de la razón de cambio.

Tarea 4

Los estudiantes explicaron en una carta lo observado durante el análisis, reflejando la empatía que puede propiciar una situación como la propuesta, mostrando que las matemáticas permiten comprender fenómenos a los que somos vulnerables, y reconocer cómo puede afectar a otros.

Las cartas aluden a la necesidad de atención médica en los pueblos, siendo interesante cómo 11 de los 18 jóvenes se apoyan de las gráficas para explicar a las autoridades la necesidad que evidencian, haciendo explícita la conexión entre las matemáticas y el ámbito social. La tarea fue relevante para estimular formas de comunicar resultados a través de gráficas, cuya interpretación permite revelar habilidades de deducción, argumentación o predicción, vinculadas a NDRV.

Tarea 5

Se buscaba provocar el uso de modelos emergentes propuestos por los estudiantes, para la predicción de una situación en donde se involucran más de dos variables, la propagación de un virus (vinculada con NDRV), para evaluar y extender las actividades aplicadas.

En una segunda etapa se buscaba lograr la obtención de la razón de cambio por tramos en los modelos propuestos de modo que dieran un valor que se interpretara en la situación. La Tabla 8 concentra cómo conectan la razón de cambio y la pendiente de una recta.

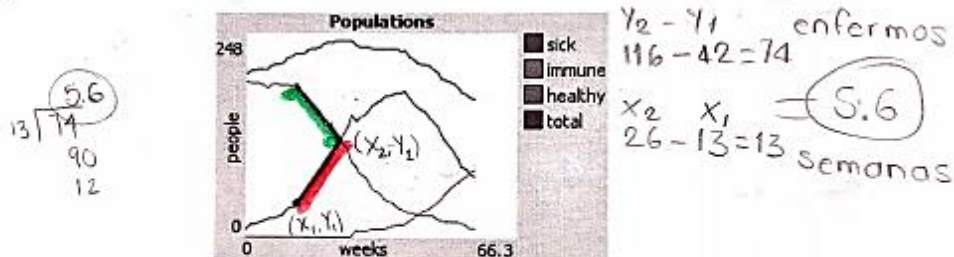
Tabla 8. Uso de la herramienta conceptual: Movimiento de niveles

NDVR y sus movimientos		
Subgrupo	Ubicación inicial	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	5
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	8
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	5

Subgrupo	Movimiento de niveles	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	5
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	6
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	7

Derivado de esta actividad se realiza el análisis de la gráfica obtenida de la simulación: *El virus* (Figura 11), posteriormente se analiza lo referente a la cantidad de personas que se enfermaban por semana durante un tiempo. En ella 13 jóvenes (subgrupos E-2, E-3) siguieron procedimientos similares (Figura 11), refiriendo los recuerdos que les generaba la actividad anterior. Por ello fue importante la socialización para asegurarse que no fuera un proceso mecanizado, sino que se había interiorizado el significado de cada uno de los valores en las coordenadas proporcionadas.

Evalúa la siguiente situación en particular que se presentó en una población con la misma cantidad de habitantes que la presentada anteriormente, para poder determinar las personas contagiadas del virus en cierto lapso de tiempo.



Determina lo siguiente:

- ¿Qué cantidad de personas se enfermaban por día durante el lapso señalado?
- Entre 5 y 6 personas se enferman por semana entre la semana 13 - 26

Figura 11. Obtención de la pendiente de un tramo de recta determinado

Mientras que cinco jóvenes, aun cuando emplearon un razonamiento similar al subgrupo E-1 descrito, mostraron confusiones al relacionar los valores de los pares ordenados (Figura 12) es decir, la idea de razón de cambio existe, sin embargo, las relaciones a establecer aun no son claras, lo que evidencia una necesidad de seguir desarrollando con ellos las interpretaciones cualitativas de las coordenadas, con respecto a la cuantificación de éstas, esto podría mejorar la idea de razón de cambio en los estudiantes.

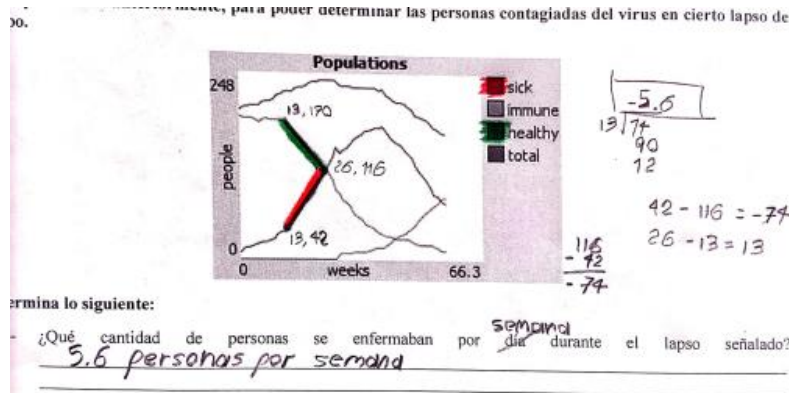


Figura 12. Confusión en la relación de los pares ordenados, para la obtención de la pendiente

La formalización de la obtención de la pendiente de una recta se puede ver en la Tabla 9.

Tabla 9. Formalización de la herramienta conceptual. Movimiento de niveles.

NDVR y sus movimientos		
Subgrupo	Ubicación inicial	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	5
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	6
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	7
Subgrupo	Movimiento de niveles	Alumnos en dicho nivel
E-1	Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	5
E-2	Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos	5
E-3	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	8

La formalización, no fue un proceso complicado, desde las relaciones que establecen entre lo cualitativo y cuantitativo, se propicia un tránsito natural para la generalización de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sin embargo, esto determina la necesidad de emplear dicha expresión general en otras condiciones (*Principio de generalización del modelo*), es decir, los estudiantes externalizan el entendimiento de la aplicación de la expresión obtenida y verbalizan su significado, lo que está conectado con el NDRV: *variación coordinada continua a tramos* (Tabla 1). Al mismo tiempo el profesor adquiere el compromiso de hacer crecer aún más la herramienta conceptual que se ha construido con el apoyo de las actividades de modelización y las SP. La Tabla 10 concentra la formalización conceptual.

Tabla 10. Actividad colectiva: Formalización de la herramienta conceptual

Datos	Garantías	Conclusión	
Deducción de los elementos formales vinculados con la razón de cambio	Vinculación de cada elemento con el concepto de formalización, establecer generalidades para expresar coordenadas y la diferencia entre los valores de las abscisas y ordenadas de modo que el proceso intuitivo se formaliza.	Generalización: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Consolidación de la variación coordinada continua a tramos

Dos meses después se realizó una evaluación para validar los NDRV con diferentes ítems tipo PISA (EducaLab, 2015) centrados en la covariación. Éstos fueron piezas clave para reconocer el desarrollo del NDRV en el grupo, siendo una oportunidad para reafirmar el alcance de la secuencia.

La atención a este tipo de reactivos, obedece a las deficiencias mostradas en éstos, por la población estudiantil de esta zona próxima a egresar de la educación secundaria (Instituto Nacional de la Evaluación de la Educación [INEE], 2017) con acceso limitado a la tecnología, y como ya lo han mencionado Blum et al. (2007), esta prueba pone un énfasis especial en el uso del conocimiento matemático en multitud de contextos, cobrando importancia el papel de los modelos matemáticos, las aplicaciones matemáticas, las simulaciones y las relaciones con el mundo real. De ahí que resulta ser un indicador interesante y relevante para el análisis de la presencia del razonamiento covariacional en jóvenes de secundaria.

Análisis retrospectivo y conclusiones

Se realiza desde una reflexión informada en la investigación y la práctica, integrando la mirada docente-investigadora con el beneficio de dar recomendaciones para el diseño y llevarlo a la

práctica para futuras aplicaciones. Se inicia reflexionando sobre lo obtenido en la ejecución de la SDM y el impacto en el objetivo principal respecto al NDRV en los estudiantes.

La secuencia permitió desencadenar una serie de acciones matemáticas en los estudiantes que revelaron sus NDRV, pues fueron refinando los modelos que proponían. Así sus predicciones lograron acercarse a los modelos emergentes que surgían al interactuar con la SP. Es relevante puntualizar que el aprendizaje y, en este caso, el NDRV, no se da propiamente en un entorno lineal, es decir, los estudiantes no necesariamente deben partir del nivel *No coordinación*, y llegar a la *Consolidación de la variación coordinada continua a tramos*. Cada joven posee un desenvolvimiento cognitivo que en ocasiones presenta retrocesos o “estancamientos” en algún nivel, siendo natural del proceso de aprendizaje de todas las personas y se debe respetar. Esto no quiere decir que alguien que no logró consolidar la *variación coordinada continua a tramos* en estas actividades, carezca de la capacidad para desarrollar el razonamiento covariacional, más bien significa que requiere mayor estimulación para fortalecer todas las habilidades potenciadas a través de este razonamiento.

Sin embargo, luego de la implementación con el grupo, se visualiza (Tabla 11) que el 50% de los jóvenes evidenciaron una consolidación de la *covariación coordinada continua a tramos*. Esto está propiamente ligado al cumplimiento de los objetivos de la SDM, en gran medida se atribuyen los resultados a las características y principios propios de ésta (Lesh & Doerr, 2003) que van de la mano con las SP (Stroup, 2014) donde el contexto es relevante, pues en todo momento los jóvenes hacen alusión a la situación inicial planteada, tienen un espacio concreto para provocar sus modelos y refinarlos. Aquí la herramienta conceptual involucrada emerge gracias a las conexiones que establecen partiendo de la realidad que les es posible experimentar a través de NetLogo, de modo que tienden a cualificar los cambios que observan, y logran expresar la variación, así la cuantificación del cambio sólo tiene sentido cuando se liga a una interpretación del contexto, cuando se reconoce como un saber vivo (León, 2017).

Por otra parte, el análisis de la actividad colectiva permitió darle un valor especial al trabajo colaborativo que desarrollan los jóvenes. En donde se pudo observar que la consolidación de ideas, se logró en gran medida gracias al intercambio de opiniones y argumentos construidos de forma conjunta por los estudiantes. Esto posibilitó el establecimiento de prácticas matemáticas, asociadas con la variación, propiciando la movilización de niveles (Tabla 11) que los llevó a un logro en los NDRV.

A lo largo de la instrumentación, fue posible comprender cómo el uso de la SDM ha favorecido en los jóvenes, habilidades que, según Cantoral (2004), son indispensables, como: el promover que los alumnos formen consensos, busquen la legitimidad y validez de una situación, siendo lo más importante, el impacto de estas habilidades en el manejo de la herramienta conceptual en juego. Esto permitió reflejar un avance grupal en la presencia de ideas matemáticas

colectivas que terminaron por ser prácticas, como es el manejo de: la verbalización del sentido de cambio, análisis de la dirección del cambio de una gráfica, llevando a la generalización de la forma de la pendiente representada de manera gestual, con movimientos de las manos, gráfica, simbólica y algebraica.

Tabla 11. Ciclo de implementación en el aula: Visualización del movimiento de niveles

Subgrupos en el 1er escenario analizado (<i>Contagios en un pueblo sin atención médica</i>)	Alumnos	Movilización de niveles de Razonamiento Variacional	Subgrupos en el ultimo escenario analizado (<i>El virus</i>)	Alumnos
B: Precoordinación de valores	15	Análisis de la dirección del cambio de una gráfica, argumentando su comportamiento dadas las variables.	E1: Primer acercamiento a la variación coordinada continua a tramos	4
C: Coordinación gruesa de valores	3	Cálculo de la razón de cambio a tramos (rectas). Generalización: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	E2: Seguimiento de la variación coordinada continua a tramos E3: Consolidación de la variación coordinada continua a tramos	5 9

Los resultados evidencian los alcances de la SDM, por lo que regresando al diseño y analizando su impacto en los estudiantes, se puede sugerir a los docentes que para futuras aplicaciones tengan presentes las hojas de trabajo diseñadas, atendiendo a las necesidades particulares del grupo. Es decir, el docente puede agregar escenarios o quitarlos conforme perciba el NDRV en armonía con los elementos de matematización que puede potenciar con cada una de las secciones de las actividades (Anexos 1-3). Cabe destacar la importancia de tener en mente la herramienta conceptual a generar con la SDM y las posibilidades que, dada la experiencia descrita, ofrece para experimentarla con jóvenes de menor edad para el desarrollo de la variación coordinada al menos con las primeras cuatro partes de la actividad propuesta.

De la experiencia informada, se infiere que es posible consolidar la promoción del NDRV en los estudiantes de secundaria al involucrarlos en actividades que les generen diversión, atracción y empatía, lo cual, según Brady et al. (2015) son características de este tipo de secuencias, brindando la experiencia a los educandos de construir una herramienta conceptual a partir de la idea de hacer matemáticas desde su realidad inmediata, en donde las SP son pieza clave,

pues justamente fueron el medio para vivir la situación contextualizada al experimentar diferentes escenarios para la predicción y contraste con lo sucedido, siendo agentes activos y participando para modificar los resultados de acuerdo a las decisiones tomadas.

Finalmente, el impacto de esta propuesta es posible analizarlo mediante los resultados expuestos de los ítems tipo PISA de *evaluación a posteriori*, dado que se percibe una mejora significativa en los estudiantes con respecto al historial obtenido en cuestionamiento similares, es decir, las competencias asociadas con los NDRV, tales como: la comunicación, matematización, representación, argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y técnico.

Notas

¹ Se descarga de manera gratuita en <http://www.netlogoweb.org>

Referencias

- Brady, C., Eames, L., & Lesh, D. (2015). Connecting real-world and in-school problem-solving experiences. *Quadrante*, 24(2), 5-38. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22924>
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study*. (1ª. ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Cantor, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, 111. *Issues in Mathematics Education*, 7, 115-162. <https://doi.org/10.1090/cbmath/007/04>
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, E., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 465-478). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315759593>
- EducaLab (2015). *Preguntas liberadas de PISA como recursos didácticos de Matemáticas*. <http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/preguntas-liberadas-pisa-piaac/preguntas-pisa-matematicas>
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- INEE (2017). *México en PISA 2015*. <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D316.pdf>

- León, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: Herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis TED*, 2(42), 159-171. <https://doi.org/10.17227/01203916.6969>
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective in mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). Mathematical Association of America.
- Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, 139-168.
- NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Thales.
- Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.004>
- Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 195-215). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315759593>
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programa de Estudio, orientaciones didáctica y sugerencias de evaluación*. Secretaría de Educación Pública. <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf>
- Stroup, W., Ares, N., & Hurford, A. (2005). A dialectic analysis of generativity: Issues of network-supported design in mathematics and science. *Mathematical Thinking & Learning*, 7(3), 181-206. https://doi.org/10-1207/s15327833mtl0703_1
- Stroup, W., Ares, N., Hurford, A., & Lesh, R. A. (2007). Diversity-by-design: The why, what, and how of generativity in next-generation classroom networks. In R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 367- 393). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781003064527>
- Stroup, W., & Wilensky, U. (2014). On the embedded complementarity of agent-based and aggregate reasoning in students developing understanding of dynamic systems. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 19-52. <https://doi.org/10.1007/s10758-014-9218-4>
- Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274. <https://doi.org/10.1007/BF01273664>
- Thompson, P., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Anexo 1

Actividades detonadora y de exploración de modelos Contagios en un pueblo sin atención médica

¿Qué sucede en un pueblo en el cual la atención médica es nula?, te has puesto a pensar la rapidez con la que se puede propagar una enfermedad transmisible al contacto, en una comunidad en donde no existe una atención médica pública.

Imagina que viven en algún pueblo indígena que no cuenta con un hospital en donde puedas acudir cada vez que estás enfermo.

Instrucciones: En cada escenario, dibuja primero la gráfica que consideras que se va a trazar después del contagio de la población. Una vez realizada la simulación traza la gráfica que se marcó.

Escenario 1 (2 y 3 se repite):

Probabilidad de contagio: 100%

Número de habitantes de la población:

Número inicial de enfermos: _____

Situación:

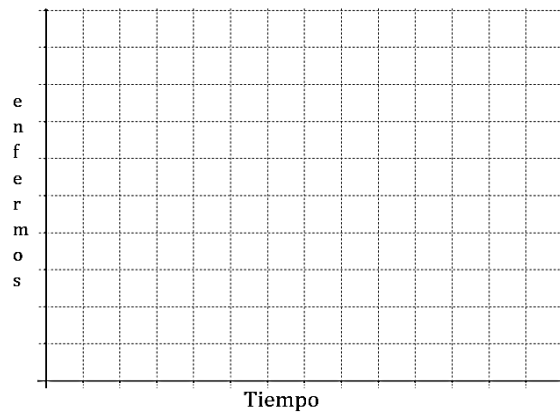
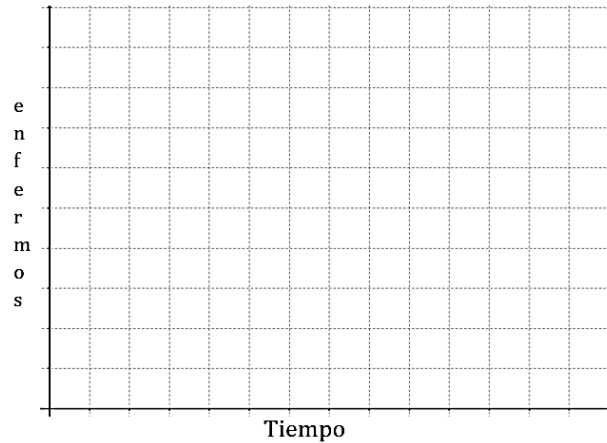
- a) Propón un escenario diferente a los ya analizados, que consideres se pueda presentar en un poblado que no cuenta con acceso a la atención médica, y además cumplan las condiciones de la gráfica propuesta.

Probabilidad de contagio: 100%

Número de habitantes de la población: _____

Número inicial de enfermos: _____

Situación:



- b) Desde los escenarios en una comunidad en donde no existe la atención médica, ¿qué soluciones propones para mejorar la calidad de vida en las poblaciones indígenas?

Anexo 2

Llegaron los médicos a la comunidad

Te has imaginado, ¿qué pasaría si una comunidad lejana tuviera la oportunidad de contar con salud médica pública?, ¿cómo cambiaría la calidad de vida de la población? Responde a la pregunta: ¿Cómo podría la presencia de un médico modificar la rapidez de propagación de la enfermedad en una comunidad?

Escenario 1 (se repiten escenarios 2 y 3):

Probabilidad de contagio: 100%

Número de habitantes de la población: _____

Número de doctores: _____

Número inicial de enfermos: _____

Situación:

- a) Propón un escenario diferente a los ya analizados, que consideres se pueda presentar en un poblado con acceso a la atención médica, y además, cumpla las siguientes condiciones de la gráfica propuesta.

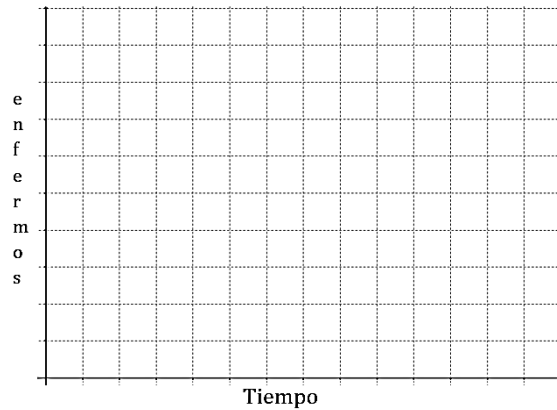
Probabilidad de contagio: _____

Número de doctores: _____

Número de habitantes de la población: _____

Número inicial de enfermos: _____

Situación:



- a) Ahora que ya analizaste la situación de una población con y sin acceso a la atención médica gratuita, escribe algunas recomendaciones que le darías a las autoridades de la Secretaría de Salud de Chihuahua y de Durango, para mejorar la calidad de vida de poblaciones susceptibles a enfermedades transmisibles.
- b) Redacta algunos consejos para los habitantes de estas poblaciones, con la intención de hacerles saber la importancia de cuidarse de las enfermedades transmisibles a las que están expuestos.

Anexo 3

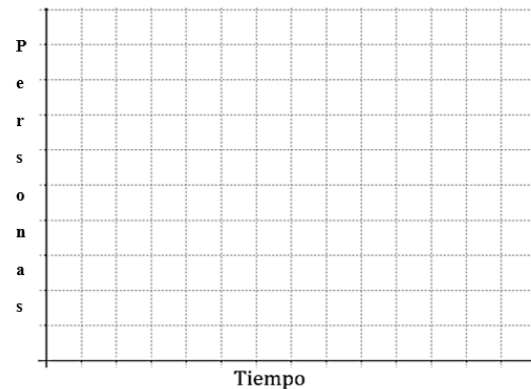
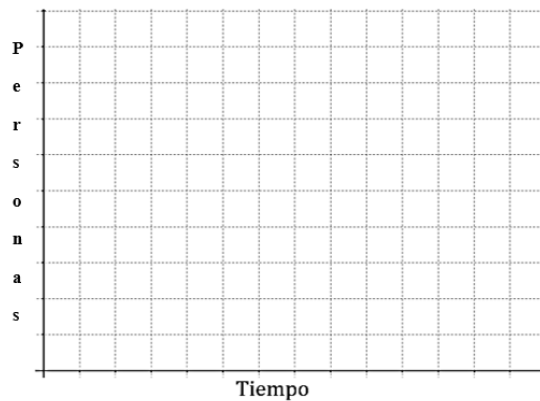
Actividad de extensión

El virus

Un virus ha llegado a una comunidad y tiene ciertas características: la duración de su proceso de incubación, desarrollo y declive, es de 26 semanas. Es altamente transmisible y una vez desarrollado en alguna persona, luego de desprenderse de él, se vuelve inmune durante algunas semanas.

El gobierno del lugar, desea informar a la población los riesgos que corre al estar en contacto con este virus, por ello ha buscado graficar cómo se comportaría la situación en un año, para definir el impacto que tendría en los habitantes.

Dicha gráfica consta de cuatro indicadores, con su trazo cada una:



	Total de población		Personas enfermas		Personas saludables		Personas inmunes
--	--------------------	--	-------------------	--	---------------------	--	------------------

¿Cómo crees que sería la gráfica de cada uno de los indicadores anteriores si se evaluara el comportamiento de cada indicador por un año?

Traza en el siguiente plano, cada una de las gráficas correspondiente a tu predicción por indicador.

Ahora corrobora en la simulación si tu predicción fue cercana a lo que sucedería.

Traza en el siguiente plano las gráficas que resultaron en la simulación.

Responde las siguientes preguntas:

¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de personas enfermas crece más rápido? ¿Cómo se nota eso en la gráfica?

¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de personas enfermas comienza a disminuir más rápido? ¿Cómo se percibe en la gráfica?

¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de personas sanas disminuye más rápido?

¿Qué sentido tiene la gráfica cuando disminuye dicha cantidad? ¿Cuál cuando comienza a aumentar las personas sanas?

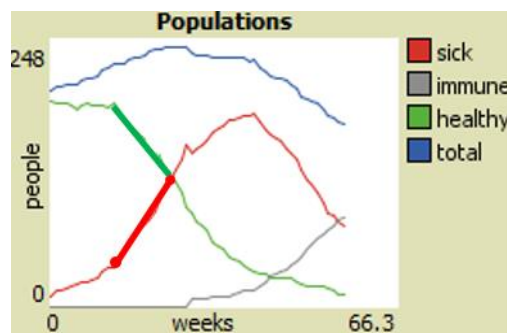
¿Qué significado tiene la intersección entre la gráfica de personas sanas y personas enfermas?

¿Cómo se puede interpretar el comportamiento de la gráfica de las personas inmunes en las primeras 26 semanas?

¿Cuál será el valor del incremento en dicha gráfica durante las primeras semanas?

¿Por qué consideras que la gráfica de la población resultó con ese trazo, es decir, que no se mantiene constante? Explica su comportamiento.

Evalúa la siguiente situación en particular que se presentó en una población con la misma cantidad de habitantes que la presentada anteriormente, para poder determinar las personas contagiadas del virus en cierto tiempo.

**Determina lo siguiente:**

¿Qué cantidad de personas se enfermaban por día durante el lapso señalado?

¿Qué sucedía cada día con la cantidad de personas sanas durante el tiempo indicado?

¿Por qué crees que sucedía lo anterior?