Generalização de padrões algébricos no ensino e aprendizagem de matemática via resolução de problemas: análise de propostas de futuros professores

Generalizing of algebraic patterns in mathematics teaching and learning via problem solving: an analysis of proposals by preservice teachers

Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá
Brasil
mcproenca@uem.br

Resumo. O objetivo do presente estudo é compreender o planejamento de propostas de ensino de futuros professores de matemática para abordar a generalização de padrões algébricos no EAMvRP, direcionadas a alunos do ensino médio. Adotamos os pressupostos da pesquisa qualitativa, baseados na vertente descritiva e interpretativa que gerou a análise dos dados, obtidos das propostas de ensino de 18 licenciandos em matemática para abordar conteúdos do ensino médio. Os resultados mostraram que as escolhas das situações de Matemática envolveram a apresentação de casos particulares, a obtenção de solução por meio da construção de expressões matemáticas e a previsão de estratégias de busca de padrões algébricos por parte dos futuros professores. Verificam-se dificuldades na condução do processo de generalização algébrica com base no uso de casos particulares, de discutir a busca de regularidades e na articulação das expressões matemáticas obtidas com base nas simbologias dos contextos das situações de Matemática. Concluímos que utilizar o EAMvRP para abordar a generalização de padrões algébricos contribui para delimitar aspectos que direcionam os futuros professores de Matemática a aprenderem a ensinar e a se desenvolverem profissionalmente.
Palavras-chave: ensino de matemática; pensamento algébrico; formação inicial de professores.

Abstract. The aim of the present study is to understand the planning of teaching proposals of preservice mathematics teachers to address the generalization of algebraic patterns in MTLvPS, directed to high school students. We adopted the assumptions of qualitative research, based on the descriptive and interpretive strand that generated the data analysis, obtained from the teaching proposals of 18 mathematics undergraduates to address high school contents. The results showed that the choices of mathematical situations involved the presentation of particular cases, obtaining solutions by constructing mathematical expressions, and foreseeing strategies for finding algebraic patterns on the part of future teachers. There are difficulties in conducting the process of algebraic

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática
https://doi.org/10.48489/quadrante.23955
Received: March 2021 / Accepted: December 2021

generalization based on the use of particular cases, of discussing the search for regularities, and in articulating the mathematical expressions obtained based on the symbologies of the contexts of the mathematical situations. We conclude that using the MTLvPS to address the generalization of algebraic patterns contributes to delimit aspects that direct preservice mathematics teachers to learn to teach and to develop professionally.
Keywords: mathematics teaching; algebraic thinking; initial teacher education.

Introdução

O uso da resolução de problemas no ensino de matemática sustenta-se, entre outros aspectos, pelo fato de possibilitar aos alunos se envolverem no uso de estratégias de resolução como a busca de padrões, o que lhes favorece o desenvolvimento da capacidade de pensamento, referente ao processo de generalização (NCTM, 2000). Fiorentini et al. (1993) apontaram que o uso de situações-problema de contextos diversos é o ponto inicial para levar os alunos a refletirem e analisarem aspectos do pensamento algébrico. Na perspectiva de Schoenfeld (2020), o uso de problemas nas aulas de matemática possibilita ao professor exercer práticas que levem os alunos a descobrirem a estrutura matemática presente como, por exemplo, a identificarem padrões pelo processo de generalização.

No entanto, por um lado, apesar do ensino baseado na resolução de problemas ser considerado eficaz à aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos (Cai & Lester, 2012; Lester & Cai, 2016; Tambunan, 2019), estudos mostraram que o uso de problemas no ensino escolar por todos ainda está longe de se tornar realidade (Giaconi et al., 2018; Lee et al., 2018). Por outro lado, o domínio do próprio processo de busca de padrões também é uma preocupação, pois outros estudos mostraram que tanto professores (Moguel et al., 2019) quanto futuros professores (Alajmi, 2016; Proença, 2019; Son & Lee, 2021; Zazkis & Liljedahl, 2002) tiveram dificuldades em realizar uma generalização algébrica.

Tendo em vista essa situação, é importante que na formação de professores sejam trabalhados conhecimentos sobre o uso da resolução de problemas no ensino, envolvendo a busca de padrões algébricos. Contudo, verificamos que são escassos ou quase ausentes estudos sobre a abordagem da resolução de problemas com foco a dotar professores e futuros professores de conhecimentos de como conduzir um ensino de matemática que leve os alunos a uma aprendizagem da busca de padrões pelo processo de generalização. Uma possibilidade seria utilizar o problema como ponto de partida. Esta estratégia pedagógica foi adotada nos estudos de Vale (2013) e Ponte e Branco (2013), cujos resultados mostraram que isso ajudou muitos alunos a construírem ou ampliarem a compreensão sobre a generalização de padrões, em sala de aula.

Utilizar o problema como ponto de partida é entendido na visão de Schroeder e Lester (1989) como *ensinar via resolução de problemas*. Esta mesma perspectiva pedagógica foi adotada por Proença (2018), o qual apresenta o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), envolvendo cinco ações de ensino, as quais tomamos como base neste artigo e que especificaremos em uma seção próxima.

Diante do fato de que a formação inicial de professores é a primeira etapa do processo formativo de ser professor, sendo necessário construir conhecimentos formais de ensino, o objetivo do presente estudo é compreender o planejamento de propostas de ensino de futuros professores de matemática para abordar a generalização de padrões algébricos no EAMvRP, direcionadas a alunos do ensino médio. Para alcançar esse objetivo, elencamos as seguintes questões de pesquisa: a) Que elementos relativos à escolha de situações de Matemática (possíveis problemas) se evidenciam nas propostas de ensino de futuros professores para envolver os alunos do ensino médio na generalização de padrões algébricos?; e b) Que condução ao processo de generalização de padrões algébricos os futuros professores apresentam em suas propostas de ensino para direcionar os alunos do ensino médio à compreensão desse processo?.

Com isso, é possível entender até que ponto os futuros professores concebem as (futuras) práticas matemáticas para abordar a generalização de padrões algébricos no contexto da resolução de problemas, revelando conhecimentos sobre o processo de generalização e da forma para abordá-lo no ensino, constituindo-se como conhecimento pedagógico do conteúdo necessário à profissão docente (Shulman, 1986; Tardif, 2012). A estrutura do artigo segue as seguintes seções: Formação inicial de professores e o processo de generalização de padrões algébricos; Ensino-aprendizagem de matemática via resolução de problemas; Metodologia de investigação; Resultados; Discussão dos resultados e; Conclusão.

Formação inicial de professores e o processo de generalização de padrões algébricos

A formação inicial de professores é entendida como sendo o primeiro momento formal de aprendizagens para ser professor (Imbernón, 2011; Marcelo, 2009; Pacheco & Flores, 1999). Para tal, deve ser proporcionada uma formação teórico-prática sólida e de cunho dialético (Imbernón, 2011; Mizukami, 2006), de modo que os futuros professores compreendam que ser professor não seria apenas dominar conceitos específicos de Matemática, mas ainda desenvolver habilidades e atitudes voltadas à melhoria das próprias práticas de ensino, o que contribui para o desenvolvimento profissional docente (Marcelo, 2009; Mizukami, 2006).

Um pensamento educativo para abordar em sala de aula determinados conhecimentos matemáticos é o que envolve a organização de situações ou tarefas para propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, referente ao processo de generalização com foco em construir padrões algébricos (Fiorentini et al., 1993; NCTM, 2000; Schoenfeld, 2020). A importância de envolver os alunos no processo de generalização pode ser vista como forma de favorecer o raciocínio indutivo que implica em partir do particular para chegar ao mais geral, o que, segundo Pimentel e Vale (2012), seria realizar observações, hipóteses e até mesmo verificar outros casos para poder, pela intuição, generalizar para uma ideia mais ampla, o que permite abordar a descoberta de padrões. Neste caso, ao direcionar o ensino para que os alunos apontem padrões algébricos, pode-se envolvê-los no uso de suas representações simbólicas para apresentar uma expressão (Rivera, 2010).

Diante disso, é importante caracterizar a ideia de generalização. Do ponto de vista da abstração de definições matemáticas, Dreyfus (1991, p. 35) destacou que a generalização é um processo mental considerado como pré-requisito, entendida no sentido de que "generalizar é derivar ou induzir a partir de elementos, para identificar pontos em comum, para expandir os domínios de validade". Nessa mesma perspectiva, Harel e Tall (1991, p. 38-39) consideraram que o termo generalização envolve "o processo de aplicação de um determinado argumento em um contexto amplo", ou seja, a abstração ocorre a partir da "seleção de propriedades generativas de uma ou mais situações específicas".

Assim, sobre a obtenção de padrões algébricos, Rivera (2010, p. 298) entende que seguir o processo de generalização implica que as pessoas realizem "a coordenação de suas habilidades inferenciais perceptivas e simbólicas, para que sejam capazes de *construir* e *justificar* uma estrutura plausível e algebricamente útil que possa ser transmitida na forma de uma fórmula direta". Na perspectiva de Radford (2006), uma definição para uma generalização de padrões algébricos seria a seguinte:

> Generalizar um padrão *algebricamente* reside na capacidade de *apreender* uma regularidade, percebida em alguns elementos de uma sequência S, sabendo que esta regularidade se aplica a *todos* os termos de S e sendo capaz de usá-la para fornecer uma *expressão* direta de qualquer termo de S. Em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão repousa na percepção de uma regularidade local que é então *generalizada* para todos os termos da sequência e que serve como uma garantia para construir expressões de elementos da sequência que permanecem além do campo perceptivo. (Radford, 2006, p. 5)

Entendemos que a ideia de generalizar um padrão está na direção do que Dreyfus (1991) e Harel e Tall (1991) indicaram, pois os pontos comuns, identificados nos elementos ou situações específicas, revelam o padrão, ou seja, o domínio de validade ou o contexto amplo, o qual abrange os demais elementos/situações específicas. Dessa forma, entendemos que Radford (2006) e Rivera (2010) explicam que se trata de obter uma estrutura algébrica para o padrão, a qual corresponde a uma fórmula/expressão.

Portanto, o processo de generalização do padrão algébrico implica no uso de um ou mais elementos ou situações específicas (que passamos a denominar de *casos particulares*) de uma sequência para que se possa perceber/apreender uma regularidade que permita generalizar a uma expressão/fórmula algébrica, a qual abrange todos os elementos ou situações especificas dessa sequência. No entanto, o estudo de Proença (2019) mostrou que seguir esse processo revelou dificuldades de 18 futuros professores de Matemáticas, pois apesar de o professor-pesquisador ter sugerido e organizado em uma tabela quatro casos particulares, sete participantes não conseguiram obter as expressões, sendo que seis deles recorreram a encontrar relações entre os valores de apenas uma das variáveis. Da mesma forma, o estudo de Son e Lee (2021) mostrou que, dos 96 futuros professores de Matemática, apenas 6,3% descreveram uma expressão algébrica para determinar a décima figura, pautados no sentido espacial de uma sequência de hexágonos.

Para Rivera (2013), a busca da construção e justificação de um padrão algébrico envolve a mobilização de habilidades de percepção e de uso de simbologias para expressar as generalizações, o que sofre influência de fatores como os culturais, linguísticos e cognitivos. A busca dessa construção e justificação pode revelar dificuldades como a apontada no estudo de Hallagan et al. (2009), envolvendo 63 futuros professores de Matemática, em que se mostrou que tiveram dificuldades para determinar a regra algébrica no processo de generalização algébrica de problemas que envolviam o tipo ‘$x^2 + 1$’ em comparação com 4x. Nessa mesma direção, Alajmi (2016) investigou 12 futuros professores sobre a generalização algébrica de funções lineares, exponenciais e quadráticas e mostrou que metade deles encontrou maiores dificuldades nas que envolviam funções exponenciais e quadráticas, pois o crescimento exponencial foi confundido com uma multiplicação de n.

Conseguir realizar essa construção e justificação pode ser vista, na visão de Harel e Tall (1991, p. 38), como uma capacidade de construção mental do indivíduo, voltada para uma generalização do tipo *generalização expansiva* em que “o indivíduo expande o âmbito de aplicabilidade de um esquema existente sem reconstruí-lo”. Ao contrário disso, pode ser que o indivíduo não consiga realizar essa construção da generalização algébrica de imediato, o que seria necessário, segundo Harel e Tall (1991), uma *generalização reconstrutiva* do seu esquema de pensamento. Para tal, indicam que seja favorecido a esse indivíduo o contato com mais exemplos genéricos (protótipos) para que possa compreender o conceito abstrato. Dessa forma, para esses autores, o uso de exemplos genéricos ajuda a dar condições aos alunos para que possam realizar a *generalização expansiva* e, assim, poderem abstrair o conceito matemático.

Dessa forma, de acordo com Rivera (2013), dois aspectos importantes na busca de um padrão, porém não tão fáceis, seriam os seguintes: a) manter a concentração na busca do que varia e do que permanece invariável, buscando por semelhanças e diferenças, atitude essa que varia de pessoa para pessoa, uma vez que uns conseguem manter a atenção para tal e outros não; e b) a necessidade de alunos, principalmente do ensino fundamental, de tomar ciência de que quando se envolvem com alguns estágios conhecidos (casos particulares), isso necessariamente implica em uma expressão que reflete o padrão.

Para tal, é importante que o futuro professor aprenda a conduzir os alunos no processo de generalização algébrica. O estudo de İmre e Akkoç (2012) investigou o conhecimento de conteúdo pedagógico (PCK) sobre padrões numéricos de três futuros professores e mostrou que não explicaram a origem dos coeficientes das expressões numéricas utilizadas pelos alunos em uma atividade realizada em sala de aula. Além disso, não sugeriram aos alunos representações pictóricas e nem mesmo fizeram uso de tabelas para os envolverem em generalizações aritméticas e/ou algébricas. Portanto, uma maneira de abordar a generalização de padrões algébricos no ensino poderia ser justamente pela proposta de EAMvRP, de Proença (2018), o qual apontou cinco ações de ensino para que o professor pudesse planejar aulas de modo a envolver os alunos na construção de conhecimento matemático.

Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas

Uma abordagem de ensino em sala de aula para tratar da introdução de conteúdos de matemática foi proposta por Proença (2018), caracterizada como Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), a qual implica em uma sequência de cinco ações de ensino, a saber: escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos, articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. Essa sequência de ações derivou de uma revisão de estudos sobre resolução de problemas no ensino, realizados nos anos de 1980 e 1990; de experiências formativas do autor para futuros professores e professores; e de sua iniciativa em ampliar a compreensão sobre ações do professor para organizar um ensino-aprendizagem de matemática em que o problema é adotado como ponto de partida.

A *escolha do problema*, primeira ação, é defendida como uma ação principal, a qual envolve dois aspectos a serem providenciados. O primeiro aspecto envolve a seleção de 'situação de matemática' (possível problema), termo esse que pode ser entendido como tarefa, adotado em vários países para designar situações que envolvem matemática e não necessariamente para classificar de antemão a tarefa como problema. Conforme já mencionou Schoenfeld (1985, p. 74, grifo do autor), ser um problema "não é uma propriedade inerente de uma tarefa matemática . . . A palavra *problema* é usada aqui nesse sentido relativo, como uma tarefa que é difícil ao indivíduo que tenta resolvê-la".

Proença (2018) sugeriu que a seleção de uma situação de matemática pode ser feita por uma escolha da seguinte forma: a) escolhendo uma situação na íntegra (retirada de livro didático, por exemplo); b) ser uma situação elaborada pelo professor; c) ser uma situação reelaborada pelo professor, de modo que mudanças sejam feitas no seu enunciado para melhor se adequar como situação que introduza o conteúdo e/ou que permita aos alunos apresentarem estratégias; e d) ser uma situação que favoreça e tenha como objetivo a busca de um padrão. Dessa forma, essa ação tem os seguintes objetivos:

> O principal consiste em direcionar os alunos a utilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente durante a escolarização para resolver a situação de matemática. O segundo é justamente levá-los a construir o conteúdo/conceito/assunto a ser introduzido, *o que envolve a construção do conceito em si ou de uma respectiva fórmula/expressão matemática por meio de um processo de generalização*. O terceiro é oriundo dos anteriores e busca propiciar condições para que os alunos estabeleçam relações entre os conhecimentos matemáticos utilizados e entre estes e o novo conhecimento. (Proença, 2018, p. 46, grifos nossos)

O segundo aspecto da *escolha do problema* é que, após obter a situação, seja feita uma previsão das possíveis estratégias de resolução. Trata-se de elencar possíveis estratégias (algorítmicas ou heurísticas) que ajudem a resolvê-la como, por exemplo, montar uma tabela, por tentativa e erro, utilizar uma equação, fazer figuras e encontrar um padrão (pelo processo de generalização algébrica). Isso servirá para que o professor possa utilizá-las, quando da terceira ação de ensino, como direcionamento aos alunos, caso eles não consigam propor um caminho de resolução.

Na segunda ação, *introdução do problema*, o foco é introduzir a situação de matemática escolhida para que ao final das aulas se possa abordar o novo conteúdo. Deste modo, o professor deve apresentá-la aos alunos, distribuídos em grupos, para buscarem resolvê-la. Assim, quando os alunos passam a se envolver na busca de uma solução, essa situação pode configurar-se-lhes como um problema.

> Uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (Echeverría & Pozo, 1998, p. 16)

Na terceira ação de ensino, *auxílio aos alunos durante a resolução*, a realização de uma reflexão e de uma tomada de decisão pelos alunos para resolver o problema poderá ser verificada pelo professor. Atuando como observador, incentivador e direcionador da aprendizagem o professor poderá verificar se os alunos conseguem propor alguma estratégia de resolução (Proença, 2018). Caso isso não ocorra, deve sugerir caminhos, ou seja, algumas das estratégias previstas na primeira ação. No caso de escolher por abordar a busca de um padrão algébrico, Proença (2018, p. 71) salientou que "podemos dizer que é difícil aos alunos conseguirem obter uma expressão matemática na primeira vez. Nesse caso, o professor deve conduzi-los à obtenção". Na visão de Harel e Tall (1991), isso indica que pode ser que os alunos não consigam realizar uma *generalização expansiva*, sendo necessário que o professor propicie a *generalização reconstrutiva*, pela sugestão de uso de casos particulares (exemplos genéricos).

Nesta quarta ação, *discussão das estratégias dos alunos*, o professor deve promover a socialização das resoluções de cada grupo, de modo que solicite que um representante de cada grupo exponha em lousa a sua resolução, evidenciando a estratégia seguida. Assim, além da discussão coletiva sobre as estratégias utilizadas pelos alunos, também é o momento de avaliar suas dificuldades na compreensão do problema, bem como para realizar cálculos e avaliar a resposta. No caso, se nesta quarta ação a discussão for sobre a busca feita por um padrão algébrico, entendemos que o professor deverá discutir a validade dos casos particulares utilizados, as regularidades percebidas e a pertinência das justificativas (Radford, 2006; Rivera, 2010) apontadas pelos alunos para as fórmulas ou expressões obtidas. Rodrigues et al. (2019) evidenciaram em seu estudo essa postura a ser adotada por futuros professores de Matemática, a qual deve ter como foco identificar simbologias utilizadas pelos alunos e como realizam a generalização, de modo a tecer discussões que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* corresponde à última ação, em que o professor deve buscar atingir o terceiro objetivo citado na ação de escolha do problema, o que corresponderia a realizar a articulação das estratégias dos alunos ao novo conteúdo. Nesse caso, o professor poderá pautar-se na estratégia apresentada por algum grupo para ser adotada como referência e, assim, discutir a possibilidade de articulação ao novo conteúdo. De um lado, se nas ações anteriores o professor incentivou os alunos a seguirem a busca de um padrão algébrico, entendemos que a articulação será da forma simbólica inferida (Rivera, 2010) para a forma matemática pretendida. Esse novo conteúdo que é introduzido pela sua forma matemática deverá ser discutido, segundo seu enfoque conceitual e procedimental em aulas posteriores. Por outro lado, entendemos que se na quarta ação as estratégias dos alunos não se direcionaram a um processo de generalização, então esta ação de articulação será justamente o início para levá-los a seguirem um processo de generalização do padrão algébrico, iniciando pela indicação de casos particulares a esses alunos ou basear-se nos que eles utilizaram em suas resoluções. Trata-se, segundo Harel e Tall (1991), de um momento de favorecer a *generalização reconstrutiva*.

Contudo, conduzir a busca de padrões algébricos por meio das cinco ações de ensino do EAMvRP é possível, uma vez que, quando se introduz um problema, o direcionamento dado pelo professor aos alunos para organizarem casos particulares pode levá-los à mobilização de representações (simbólicas, pictóricas, lógico-verbais) que fazem parte da essência dos problemas que estão sendo resolvidos, além do que essa introdução possibilita-lhes se aprofundar na compreensão de conceitos matemáticos (Lester & Cai, 2016). Para obterem uma expressão algébrica, os alunos acabam se envolvendo no processo de generalização, pois é necessário que ocorra a percepção de regularidades entre os casos particulares, justamente pelo que varia/muda e o que não varia/não muda (Rivera, 2013).

Metodologia de investigação

Os participantes foram 18 futuros professores do quarto ano do curso de licenciatura em matemática de uma universidade estadual pública do Brasil. Esses estudantes fizeram parte do estudo porque a turma já havia estudado sobre o EAMvRP e, com isso, tiveram base para se envolver na aprendizagem da docência sobre o processo de generalização de padrões algébricos em meio ao EAMvRP. Tal aprendizagem profissional ocorreu em parte das aulas teóricas de uma disciplina, relativo ao ensino médio. Desse modo, nosso estudo se insere na modalidade pesquisa participante. De acordo com Peruzzo (2003), a pesquisa participante "consiste na inserção do pesquisador no ambiente natural de ocorrência do fenômeno e de sua interação com a situação investigada" (p. 2).

Nas aulas da disciplina, tratamos de uma formação para abordar a busca de padrões, pelo processo de generalização algébrica, no contexto do EAMvRP, as quais ocorreram às segundas-feiras, período noturno, primeiro semestre de 2019, o que correspondeu ao total de 10 horas-aula. Essa formação já havia sido oferecida a esses estudantes, segundo nosso estudo anterior (Proença, 2019), em que mostramos resultados sobre abordar a busca de um padrão pelo processo de generalização algébrica, porém com enfoque geral apenas na primeira ação, a de *escolha do problema*.

Na formação oferecida, foi trabalhado o seguinte: a) estudo e discussão coletiva sobre as cinco ações de ensino do EAMvRP, proposta por Proença (2018); b) a partir de livros didáticos, busca por conteúdos e respectivas situações de matemática (possíveis problemas) em que os futuros professores apresentaram possibilidades de estratégias e de articulações a esses conteúdos; c) estudo do processo de generalização de um padrão algébrico, a partir da resolução de uma situação de matemática sobre times e jogos do Campeonato Brasileiro de Futebol (Proença, 2019), em que discutimos sobre características comuns (regularidades) entre os casos particulares, de modo a termos condições de generalizar para o padrão algébrico (fórmula/expressão); e d) por fim, fizemos a discussão coletiva sobre utilizar as cinco ações de ensino para abordar a generalização do padrão algébrico (fórmula/expressão), bem como refletimos sobre o que aconteceria quando a pergunta da situação de matemática escolhida exigiu ou não encontrar uma expressão.

Logo após essa formação, foi agendada uma avaliação escrita e individual a ser realizada no prazo de duas semanas. Para essa avaliação, foi solicitado aos futuros professores que escolhessem conteúdos matemáticos e apresentassem suas respectivas situações de matemática (possíveis problemas), de forma que tais conteúdos pudessem ser introduzidos e com foco no processo de generalização do padrão algébrico. No dia da avaliação, tiveram que realizar a seguinte atividade: descrever uma proposta de ensino que aborde a generalização do padrão algébrico para o conteúdo escolhido em meio às cinco ações do EAMvRP. Dessa forma, os registros escritos nessa avaliação escrita e individual constituíram os dados de nosso estudo.

A análise dos dados coletados ocorreu com base nos pressupostos da pesquisa qualitativa, a qual, segundo Bogdan e Biklen (1994), é o tipo de pesquisa em que o ambiente natural das pessoas é a fonte direta de dados, pois é nesse ambiente em que ocorrem suas ações, tendo o pesquisador como ator principal. Dessa forma, as aulas da disciplina em que ocorreram a formação constituíram-se no ambiente propício para investigar sobre a abordagem da generalização de padrões algébricos ao longo das cinco ações de ensino. Assim, realizamos uma análise descritiva e interpretativa dos dados, baseada nas palavras e nos significados atribuídos pelos participantes (Bogdan & Biklen, 1994).

A organização dos dados foi feita buscando mostrar o que os participantes descreveram em seus planejamentos de aulas como forma de condução de ensino. Destacamos que não mostramos dados sobre a segunda ação, a de *introdução do problema*, porque foi nas outras ações que ocorreu a abordagem clara e precisa da generalização de padrões algébricos. Assim, os dados foram organizados da seguinte forma:

- Para evidenciar o que os participantes planejaram para a ação de *escolha do problema*, apresentamos, incialmente, os conteúdos escolhidos. Em seguida, a Tabela 1 mostra três elementos que são referentes ao direcionamento dado para envolver os alunos na generalização do padrão algébrico. Ilustramos com as Figuras 1 e 2 o que os participantes revelaram dos elementos contemplados em seus planejamentos, nessa primeira ação de Proença (2018).
- Para evidenciar como planejaram a condução do processo de generalização dos padrões algébricos, tomamos como referência mostrar os casos particulares utilizados, as regularidades a serem salientadas e o padrão algébrico obtido, os quais constam das Tabelas 2, 3 e 4. Nestas, distribuímos os participantes, conforme a ação de ensino que iniciaram a discussão sobre esse processo, sendo, respectivamente, nas ações de *auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos* e *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*.

Resultados

Os 18 participantes (P1 a P18) do nosso estudo fizeram escolhas de situações de Matemática, cujos respectivos conteúdos matemáticos foram: funções lineares (P1, P3, P5, P6, P8, P9, P11, P12, P16 e P18), termo geral de progressão aritmética (P2 e P4), equação de circunferência (P7), função exponencial (P10), função quadrática (P13), Relações de Girard (soma e produto) (P14), permutação simples (P15) e volume de prisma (P17).

A Tabela 1 mostra a caracterização que envolveu as situações de Matemática em termos dos elementos que evidenciaram se a abordagem da generalização do padrão algébrico estava a ser contemplada, conforme necessário à primeira ação de ensino, a de *escolha do problema*.

Tabela 1: Caracterização dos elementos envolvidos nas situações de matemática

Elementos que direcionam à abordagem da generalização do padrão algébrico (ação de Escolha do problema)	**Quantidade de participantes (frequência relativa)**
Contemplou no enunciado da situação de Matemática alguns casos particulares	4
Contemplou na pergunta da situação de Matemática o direcionamento à busca de um padrão algébrico	3
Contemplou a previsão da estratégia de montar uma tabela com casos particulares	9

De acordo com a Tabela 1, é possível verificar que quatro participantes (P2, P8, P10 e P11) contemplaram alguns casos particulares nos enunciados das situações de Matemática. Os que contemplaram na pergunta (ou no solicitado) da situação o direcionamento à busca de um padrão foram três participantes, a saber: "Descreva uma equação que descreve esse movimento (balanço)" (P7); "Observando esse comportamento de divisão celular, é possível escrever uma expressão, relacionando a quantidade de células com a geração que indique esse comportamento?" (P10); "Encontre uma expressão matemática que relacione o número de palitos e o número de triângulos formados." (P11). A Figura 1 exemplifica esses dois elementos contemplados por esses estudantes.

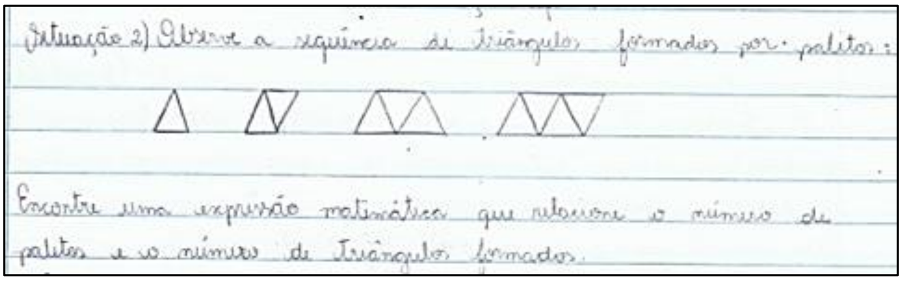
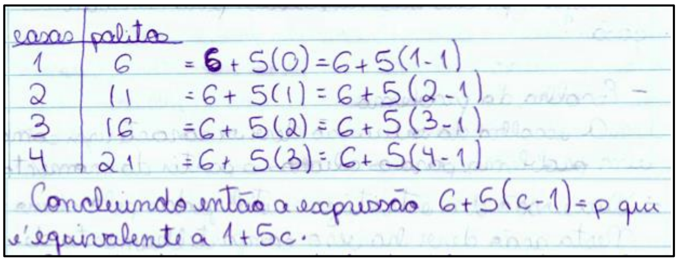


Figura 1. Casos particulares indicados e solicitação direta de busca de expressão por P11

Indicar essa sequência crescente de triângulos no enunciado da situação de Matemática que foi proposta (Figura 1) é o que Radford (2006) considera como propor alguns elementos de uma sequência. Dessa forma, os alunos de ensino médio terão a possibilidade de focar na identificação de regularidades para poderem apontar um padrão algébrico pela generalização. Na visão de Rivera (2010), esses alunos poderão ter a oportunidade de construir e justificar a estrutura algébrica presente.

A Tabela 1 mostra, por fim, que nove participantes, sendo os quatro anteriormente mencionados no primeiro elemento contemplado e mais cinco participantes (P3, P9, P13, P15 e P16) contemplaram, dentre as estratégias de resolução que elencaram na ação de *escolha do problema*, a estratégia de montar uma tabela com casos particulares. Prever essa estratégia, sobretudo, é uma postura importante que esteve de acordo com Proença (2018), pois é preciso que o futuro professor a conheça para poder direcionar os alunos no processo de generalização algébrica, justamente porque esse é o foco das aulas. A Figura 2 exemplifica essa estratégia.



casos	palitos
1	6 = 6 + 5(0) = 6 + 5(1-1)
2	11 = 6 + 5(1) = 6 + 5(2-1)
3	16 = 6 + 5(2) = 6 + 5(3-1)
4	21 = 6 + 5(3) = 6 + 5(4-1)

Concluindo então a expressão 6+5(c-1)=p que é equivalente a 1+5c.

Figura 2. Estratégia de montar uma tabela com casos particulares de P8

Ao contrário desses resultados da Tabela 1, os demais participantes (P1, P4, P5, P6, P12, P14, P17 e P18) não contemplaram nenhum dos três elementos para suas situações de Matemática que propuseram. No caso de elencar possíveis estratégias de resolução, a ausência desse elemento não foi condizente ao que deveria ser feito na ação de *escolha do problema*, segundo sugerido por Proença (2018).

Realizado o planejamento da ação de *escolha do problema*, a condução do ensino deveria ser em termos de como abordar a busca de um padrão algébrico pelo processo de generalização. Desse modo, as Tabela 2, 3 e 4 que seguem mostram a condução proposta pelos participantes que discutiram o processo de generalização do padrão algébrico. A Tabela 2 mostra que a referida discussão, promovida pelos respectivos participantes, ocorreu na ação de *auxílio aos alunos durante a resolução*.

Tabela 2. Ação de ensino em que se discutiu a generalização do padrão algébrico

Part.	**Ação de auxílio aos alunos durante a resolução**		
	Casos particulares	**Regularidade**	**Padrão algébrico**
P2	A generalização pode ser realizada analisando os seguintes pontos: a primeira etapa de nossa figura é constituída por um quadrado; nas etapas seguintes, são acrescentados 3 quadrados aos quadrados já existentes na etapa anterior.	Logo, o número de quadrados aumenta em uma razão 3 a cada etapa.	Colocando isso em termos gerais de uma progressão aritmética, temos: $a_n = a_1 + (n - 1).r$, onde a_n é o termo final, a_1 é o termo inicial e r é a razão da Progressão Aritmética.
P3	Completar a tabela com os valores de vendas (V(R$)) 500, 1.000 e 20.000, para obterem os respectivos salários (S(R$)).	À medida que os alunos realizam a primeira operação para conseguir o primeiro salário pedido e partem para o segundo salário, é possível que eles percebam que existe uma relação. Percebam que em todas as operações haverá um valor fixo e o outro se	O que possibilita a eles a chegar em: S = 0,02V + 400.

		altera de acordo com as vendas.	
P7	O professor pode inicialmente orientar os alunos a fazer representações de balanços, notando sua amplitude, seus limites; em seguida é possível relacionar com curvas já vistas anteriormente, como parábolas.	A partir disso, tratar da noção de que todos os pontos da circunferência estão equidistantes do centro. Essa distância é designada de raio. Se queremos apenas uma parte (metade), podemos tirar a raiz quadrada.	Espera-se chegar a algo como a equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ ou, se fosse levado em conta apenas o movimento de balanço como meia circunferência, que chegasse em "$-\sqrt{r^2+x^2}=y$", com os eixos cartesianos convenientemente posicionados.
P9	Levaria os alunos, primeiramente, a identificar para casos particulares: desenhando as mesas e as respectivas quantidades de pessoas. Depois, pediria aos alunos para colocarem em uma tabela, sendo n o número de mesas e p o número de pessoas.	Dessa forma, podemos verificar como os alunos percebem a regularidade na operação e nos números. O professor deve organizar os dados e direcionar os alunos a observarem que a operação utilizada foi multiplicar por 2 o número de mesas e depois a adição de mais 2.	Diante disto, mostra-se o padrão algébrico encontrado: $P= 2n + 2$. Podemos explicar a função $f(x) = 2x +2$.
P10	Os alunos seriam levados a utilizar o registro tabular. Duas colunas: da quantidade de células e do número de gerações: 1 célula, então zero geração; 2 células, então 1 geração; 4 células, então 2 gerações; 8 células, então 3 gerações; 16 células, então 4 gerações.	Poderiam perceber que é uma função, visto que função é um conhecimento prévio e perceber que estamos trabalhando com potências de base 2 que também é conhecimento prévio.	Poderíamos definir $f(x) = 2^x$, onde x é a geração, em que encontraríamos a quantidade (f(x)) de células.
P18	Para resolver o problema, devemos levar os alunos a perceberem alguns casos particulares, tais como: se for uma mesa, quantas cadeiras devem ser colocadas? E se fossem 2 mesas, quantas cadeiras daria? Assim, tendo as representações das mesas e pessoas, podemos pedir aos alunos para colocar em uma tabela.	Depois, iremos sugerir que os alunos proponham algumas operações matemáticas que permitam obter um número de pessoas correspondentes às mesas. Ou seja, neste momento, queremos que os alunos vão em busca de alguma relação para encontrar o padrão para aquela estratégia.	Na quinta ação, o professor deve organizar as ideias, ou seja, perceber o que eles fizeram e assim finalizar para a generalização seguinte: $P = 2n + 2$. Assim, iremos introduzir o conteúdo função afim.

Casos particulares. Observamos que os seis participantes utilizaram, no mínimo, dois casos particulares, o que está de acordo com o explicado por Radford (2006) e Rivera (2010) para o início do processo de generalização. Destacamos que P3, P9, P10 e P18 mencionaram organizá-los em uma tabela, conforme exemplo de Proença (2018). Os participantes P2, P7, P9 e P18 destacaram o uso de figuras, representações e desenhos.

Regularidade. Dos seis participantes, P18 é o único que não evidencia qual seria a regularidade a ser abordada, ao mencionar que "queremos que os alunos vão em busca de alguma relação para encontrar o padrão". Já os participantes P2, P3, P7, P9 e P10 acabam evidenciando apreensões da regularidade que vão na direção da ideia do que varia e do que não varia (Rivera, 2013) quando apontam os seguintes aspectos: "número de quadrados aumenta em uma razão 3 a cada etapa" (P2), "Percebam que em todas as operações haverá um valor um valor fixo e o outro se altera (...)" (P3), "todos os pontos da circunferência estão equidistantes do centro" (P7), "direcionar os alunos a observarem que a operação utilizada foi multiplicar por 2 o número de mesas e depois a adição de mais 2" (P9) e "perceber que estamos trabalhando com potências de base 2" (P10).

Padrão algébrico. Os participantes P2, P7 e P10 fornecem expressões/fórmulas, cujas simbologias (Rivera, 2010) são as utilizadas aos conteúdos a serem abordados, os quais correspondem ao que se quer chegar na ação de articulação da estratégia ao conteúdo, segundo previsto por Proença (2018). Ao contrário disso, os participantes P3, P9 e P18 revelam expressões/fórmulas, cujas simbologias (Rivera, 2010) seriam adequadas aos contextos das situações de Matemática, apresentadas na ação de *escolha do problema*. Neste caso, P3 não mostra a articulação a ser feita ao conteúdo escolhido e P9 e P18 indicam essa articulação ao conteúdo função afim.

A Tabela 3 mostra que a discussão sobre o processo de generalização algébrico, promovida pelos respectivos participantes, ocorreu ao final da ação de *discussão das estratégias dos alunos*.

Casos particulares. Observamos que os cinco participantes utilizaram, no mínimo, dois casos particulares. Destacamos que P1, P8 e P15 mencionaram organizá-los em uma tabela, conforme exemplo de Proença (2018). Nenhum dos participantes destacou o uso de figuras, representações ou desenhos.

Regularidade. Os cinco participantes buscam envolver os alunos na percepção de uma regularidade (Radford, 2006) como "fazê-los observar a relação que há entre as maneiras e a quantidade de formandos" (P15). No entanto, os participantes P1, P5 e P8 estão mais atentos às apreensões da regularidade que vão na direção da ideia do que varia e do que não varia (Rivera, 2013) como, por exemplo, "O aluno verificará que o 300 não muda quando somando, e que o 0,5 também não muda quando multiplicando. O que muda é quanto de tecido vendeu, ou seja, essa é a variável" (P1).

Padrão algébrico. O participante P5 apresenta apenas a seguinte expressão/fórmula genérica: $f(x) = ax + b$. Neste caso, não foi evidenciado qual simbologia varia e qual não varia (Rivera, 2013). Ao contrário disso, os participantes P1, P8, P15 e P16 fazem uma articulação entre as expressões/fórmulas obtidas e aquelas próprias dos conteúdos. Neste caso, P1 e P16 se valem da letra *x* como simbologia para obterem os padrões algébricos, não sugerindo simbologia própria ao contexto das situações de Matemática. Já P8 e P15 se valem do uso de simbologias baseadas nos contextos de suas situações de Matemática.

Tabela 3. Ação de ensino em que se discutiu a generalização do padrão algébrico

Part.	Ao final da ação de Discussão das estratégias dos alunos		
	Casos particulares	**Regularidade**	**Padrão algébrico**
P1	Resolvendo o problema, depois o professor deveria questionar: E se aumentasse a quantidade de tecido ou diminuísse, teria uma expressão que representa o salário para qualquer quantidade de tecido vendido? Pediria para que os alunos calculassem para diferentes valores. E se no terceiro mês triplicasse a venda quanto seria o salário? E se diminuísse 1/3? E assim por diante. O aluno poderia montar uma tabela para tais valores como, por exemplo, montar 300 + 700.0,50 e 300 + 1400.0,50.	O aluno verificará que o 300 não muda quando somando, e que o 0,5 também não muda quando multiplicando. O que muda é quanto de tecido vendeu, ou seja, essa é a variável.	E podemos chamá-la de x ou de qualquer letra, obtendo a expressão: 300 + x.0,50 = salário. Assim, o aluno encontraria o padrão por meio da variação de valores da quantidade de tecidos, de modo que o professor pode articular/formalizar como sendo f(x) = 300 + x.0,50.
P5	Os alunos poderiam chegar com certa facilidade ao resultado: 0,7.18 + 3,5 = 16,10. Perguntas podem ser feitas como, por exemplo: se for da cidade de Jandaia do Sul até Maringá, quanto ele gastaria de táxi, sendo que essa distância é de 43 km? Verificar para alguns casos.	O aluno poderá verificar algumas características que se repetem como, por exemplo, o R$3,50 que sempre está sendo somado, que é independente da corrida sempre estará ali. E os R$0,70 centavos que está sempre multiplicando a distância percorrida.	Em seguida, o professor pode discutir com os grupos para juntos formalizarem o conteúdo: f(x) = ax + b.
P8	Nesta ação, o professor deve dar ênfase aos aspectos encontrados na tabela, a qual apresenta: 1 casa para 6 palitos; 2 casas para 11 palitos; 3 casas para 16 palitos; 4 casas para 21 palitos.	Observar que a quantidade de casas depende da quantidade de palitos, que a cada casa são somados 5 palitos.	No caso desse problema, é necessário observar o padrão e deduzir a expressão que o representa (1 – 5c, que pode ser escrito como f(x) = 5x +1).
P15	Faria perguntas para pensarem em uma generalização. Por exemplo: vocês chegaram em 120 maneiras, mas e se fossem 10 formandos a mais? E 100? Sugeriria construirmos uma tabela relacionando o número dos possíveis formandos (até 6) com a quantidade de maneiras distintas que podem se organizar (720).	Buscando fazê-los observar a relação que há entre as maneiras e a quantidade de formandos.	Sempre orientando-os até chegar em: M_f = f.(f – 1).(f – 2).(f – 3)..., sendo M_f a quantidade de maneiras e f o número de formandos, com f≥1. Dessa maneira, construímos a generalização: M_f = f!
P16	Quando tenho 1 mesa, sentam 4 pessoas. Quando tenho 2 mesas, sentam 6 pessoas. Quando tenho 3 mesas, sentam 8 pessoas.	Com base nisso, levaria os alunos a perceber a relação do padrão entre os valores obtidos.	Chegando, assim, na fórmula 2x + 2 e dizendo aos alunos que podemos chamar cada resultado de f(x), sendo que então teremos: f(x) = 2x +2.

A Tabela 4 mostra que a discussão sobre o processo de generalização algébrico, ocorreu na ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*.

Tabela 4. Ação de ensino em que se discutiu a generalização do padrão algébrico

Part.	Ação de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo		
	Casos particulares	**Regularidade**	**Padrão algébrico**
P4	Nesta ação, o meu papel seria articular a estratégia que envolve a relação entre uma semana (2, 3, 4 etc.) e o quanto nadou (1100, 1500, 1900 etc.), considerando nadar 400m a mais que a semana anterior, com a generalização do padrão algébrico.	Discutiria com os alunos para tentar fazer com que percebam algumas regularidades na estratégia como, por exemplo, o fato de estar somando uma determinada constante várias vezes, durante a resolução. Após isso, faria uma ênfase à percepção de como o resultado de uma determinada semana está relacionado ao resultado da semana anterior.	Articularia a generalização feita pelos alunos com o conteúdo matemático, onde a partir de um determinado valor inicial e uma constante, seríamos capazes de me conhecer qualquer valor. Desta forma, espera-se que os alunos consigam chegar ao tipo de representação $S_{10} = S_2 + (10 - 2).400$, ou seja: $S_n = S_i + (n - i).c$.

Casos particulares. Observamos que o único participante utilizou, no mínimo, três casos particulares, o que está de acordo com o explicado por Radford (2006) e Rivera (2010) para o início do processo de generalização. O participante P4 não mencionou organizá-los em uma tabela, conforme exemplo de Proença (2018), e também não mencionou o uso de figuras, representações ou desenhos.

Regularidade. Verificamos que o participante P4 busca envolver os alunos na percepção da regularidade (Radford, 2006) quando aponta que "o fato de estar somando uma determinada constante várias vezes, durante a resolução". Essa condução revela sua atitude para dar condições aos alunos de apreenderem a regularidade no sentido do que varia e do que não varia (Rivera, 2013).

Padrão algébrico. O participante P4 evidencia, a partir de seu caso particular, a obtenção da expressão/fórmula genérica, a qual apresenta uma simbologia que faz parte do contexto da situação de Matemática: $S_n = S_i + (n - i).c$. Neste caso, para ficar claro qual simbologia varia e qual não varia (Rivera, 2013), P4 poderia ter utilizado o valor 400 no lugar da letra c, obtendo: $S_n = S_i + (n - i).400$. Além disso, faltou apontar o conteúdo para revelar a articulação (Proença, 2018).

Ao contrário do que mostram as Tabelas 2, 3 e 4, acima, os participantes P6, P11, P12, P13, P14 e P17 não descreveram sobre como discutiriam o processo de generalização do padrão algébrico. Esses seis participantes apenas fizeram uma descrição geral, mais teórica, da condução das aulas, de modo que ao final se concluía chegar ao padrão algébrico, conforme ilustramos na fala seguinte:

P12: Durante a resolução, ficaria passando nos grupos, tirando possíveis dúvidas e orientando sem dar uma reposta. Após este momento, solicitaria que os grupos fossem ao quadro expor suas ideias e a forma como resolveram. Assim, faria possíveis correções. Quando os grupos terminassem, daria um fechamento, introduzindo o conteúdo com base nas resoluções dos alunos, ressaltando os padrões encontrados por eles.

A condução de P12 não revela de forma explícita os casos particulares que utilizaria e, assim, como discutiria o aspecto da *regularidade* nesses casos particulares que os alunos poderiam perceber. Consequentemente, indicou, sem base, que "daria um fechamento, introduzindo o conteúdo com base nas resoluções dos alunos, ressaltando os padrões encontrados por eles" (P12). Assim como nas propostas ensino dos outros participantes, a de condução à uma discussão esteve longe do que propuseram Radford (2006) e Rivera (2010, 2013) para abordar a generalização algébrica, bem como não envolveu atitudes para favorecer uma *generalização reconstrutiva* (Harel & Tall, 1991).

Discussão dos resultados

Para o planejamento das propostas de ensino, os participantes tiveram que escolher conteúdos matemáticos, o que os envolvia no uso de conhecimento de conteúdo matemático para fins pedagógicos (Shulman, 1986). A maioria aborda funções lineares (10), o que pode ser devido a uma facilidade de serem conduzidas em termos do processo de generalização de padrões algébricos em relação à outras funções escolhidas como a quadrática e a exponencial. Em alguns estudos, obter padrões de funções quadrática e exponencial foram mais difíceis a futuros professores, devido à dificuldade em tratar do uso do expoente, confundindo-o, por exemplo, como um produto do tipo '2 x n' (Alajmi, 2016; Hallagan et al., 2009).

Neste sentido, esse resultado do nosso estudo pode ter revelado um limite em relação ao que foi solicitado na atividade. Assim, o que poderia ser feito na formação inicial é que o professor formador indicasse conteúdos variados e de forma a distribui-los uniformemente entre os futuros professores. Com isso, ao se fazer uma discussão coletiva das resoluções, seria possível favorecer-lhes uma visão ampla sobre as possíveis dificuldades ao realizarem a generalização para a busca de padrões algébricos em relação aos variados conteúdos, contribuindo, assim, para ampliarem seus conhecimentos matemáticos de forma uniforme e para a melhoria de suas práticas nos diversos conteúdos (Marcelo, 2009; Mizukami, 2006).

Em decorrência dos conteúdos, os participantes apresentaram situações de Matemática (possíveis problemas), de modo que pudemos apontar três elementos que transpareceram em seus enunciados, conforme mostramos na Tabela 1. O primeiro elemento, referente à apresentação de casos particulares (desenhos/figuras) nos enunciados das situações, foi proposto por quatro participantes, o que direciona diretamente os alunos a se envolverem na percepção de regularidades e nos aspectos que variam e que não variam (Radford, 2006; Rivera, 2010, 2013). Segundo Pimentel e Vale (2012), o uso de representações pictóricas favorece o envolvimento dos alunos na generalização que constitui os casos particulares, uma vez que o padrão obtido é derivado das percepções intuitivas, o que, a nosso ver, ajuda a, seguidamente, abordar o padrão em sua forma algébrica. O segundo elemento, referente a pergunta da situação de Matemática solicitar encontrar uma expressão, foi utilizado por três participantes. Isso contribui para que os alunos foquem, primeiro, na obtenção de algum ou alguns casos particulares, o que exigiria, primeiro, a construção desses casos particulares para depois se envolverem na percepção de regularidades e no que varia e no que não varia (Radford, 2006; Rivera, 2010, 2013). Esses elementos um e dois são pontos cruciais para envolver os alunos nesse processo, envolvimento esse que seria possibilitado na ação de *discussão das estratégias dos alunos*. Por fim, o terceiro elemento é referente a prever a estratégia que visa a montar uma tabela com uso de casos particulares (Proença, 2018). Isso foi feito por nove participantes, sendo um aspecto importante, pois revela como organizam essa estratégia para poderem envolver os alunos no processo de generalização algébrica do padrão pretendido.

Diferentemente desses resultados acima, oito participantes não contemplaram nenhum desses três elementos. De um lado, podemos apontar que isso pode comprometer o favorecimento aos alunos do processo de generalização de um padrão algébrico e, segundo Harel e Tall (1991), pode comprometer o ensino para envolvê-los na *generalização expansiva* e/ou na *generalização reconstrutiva*. De outro lado, a falta dos dois elementos iniciais no planejamento referente à ação de *escolha do problema* pode não interferir na busca de um padrão algébrico durante a condução das aulas, alicerçadas nas ações seguintes (Proença, 2018). O professor deve auxiliar os alunos e discutir suas resoluções (terceira e quarta ações) para, assim, propor a estratégia que visa ao processo de generalização algébrica como sugerir casos particulares ou fazer perguntas que indiquem a necessidade de obter uma expressão matemática. Essa segunda possibilidade foi a que identificamos nos resultados que seguem posteriormente sobre a condução de ensino de quatro desses oito participantes (Tabelas 2 e 3).

Referente aos resultados sobre a condução de ensino para envolver os alunos do ensino médio no processo de generalização, constatamos que 12 participantes promoveram uma discussão para tal e que os outros seis apenas fizeram uma descrição de uma condução geral, voltada a explicações sem especificar os aspectos referentes ao uso de casos particulares, de incentivo e discussão de regularidades e à obtenção do padrão algébrico. As Tabelas 2, 3 e 4 mostram que entre esses 12 participantes se manifestam ações de *articulação da estratégia dos alunos ao conteúdo*, de *discussão das estratégias dos alunos* e *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*.

Conforme indicado para o EAMvRP, Proença (2018) sugeriu que as terceira e quinta ações (discussão e articulação) seriam os momentos propícios para abordar o processo de generalização de padrões algébricos. Porém, os resultados da Tabela 3 mostram que os respectivos cinco participantes decidiram, no planejamento de suas propostas de ensino, tratar desse processo ao final da ação de *discussão das estratégias dos alunos*, logo após terem discutido as estratégias dos alunos. Esse resultado parece indicar que para tratar do processo de generalização de padrões algébricos nas ações do EAMvRP (Proença, 2018) essas escolhas não o inviabilizam. Basta fazer o planejamento para tal. Neste planejamento, gostaríamos de destacar que envolver os alunos de ensino médio (ou de outros níveis de ensino) no processo de generalização do padrão algébrico já na ação de *introdução do problema* e, assim, na ação de discussão das estratégias, tem forte ligação quando, na ação de *escolha do problema* (primeira ação), se apresente na situação de Matemática uma pergunta ou uma solicitação voltada diretamente a encontrar uma expressão matemática. Neste caso, foi o que planejaram três participantes (Tabela 1), porém apenas dois apresentaram uma condução de ensino adequada ao processo de generalização do padrão algébrico (Tabela 2).

Especificamente sobre a condução envolvendo o processo de generalização do padrão algébrico, foi possível verificar como 12 participantes abordaram o uso de casos particulares, como proporcionaram a discussão de percepção de regularidades e como indicaram o alcance aos padrões algébricos.

Casos particulares. Doze participantes propuseram o uso de casos particulares para envolver os alunos na generalização, o que está condizente sobre esse processo na visão de Dreyfus (1991), Harel e Tall (1991), Radford (2006) e Rivera (2010). Contudo, somente quatro participantes deixaram claro que figuras, representações ou desenhos seriam considerados nesse processo. O uso de representações pictóricas pode auxiliar os alunos a perceberem regularidades (Pimentel & Vale, 2012), porém pode-se encontrar futuros professores com dificuldades em propor representações pictóricas e até mesmo para propor o uso de tabela para organizar os casos particulares (İmre & Akkoç, 2012; Soon & Lee, 2021).

Regularidade. Identificamos que nove participantes evidenciaram tratar e envolver os alunos de ensino médio na percepção de regularidades (Radford, 2006; Rivera, 2010) e justamente levá-los a identificar o que varia e o que não varia nos casos particulares (Rivera, 2013). Podemos apontar que essa condução ajuda a verificar o comportamento dos alunos quando não conseguissem construir, por exemplo, o padrão de um problema de progressão aritmética (Callejo & Zapatera, 2014) ou mesmo quando não conseguissem justificar padrões (Lannin, 2005). Ao contrário disso, três participantes apresentaram ideias gerais no sentido de apenas mencionar que os alunos deveriam perceber relações entre os casos particulares, o que se distancia da abordagem de aspectos que variam e que não variam para dar condições na obtenção do padrão algébrico. É possível que esses participantes ainda apresentem dificuldades em perceber regularidades, de modo que possam planejar um ensino para tal, dificuldade essa que também foi revelada em outros estudos (İmre & Akkoç, 2012; Proença, 2019; Soon & Lee, 2021).

Padrão algébrico. Identificamos que 12 participantes apresentaram suas respectivas expressões/fórmulas, cujas simbologias foram, por exemplo, a letra x ou baseadas nos contextos das situações de Matemática. Podemos apontar os seguintes aspectos dos padrões algébricos obtidos em meio à ação de articulação aos conteúdos: a) três participantes apresentaram expressões com simbologias próprias dos conteúdos, sendo essas expressões matemáticas a articulação; b) dois apresentaram expressões com simbologias próprias dos conteúdos, sendo feita a articulação à expressão matemática do conteúdo; c) um apresentou a expressão genérica (f(x) = ax + b); d) quatro apresentaram expressões com simbologias baseadas nos contextos das situações de Matemática e, em seguida, apresentaram ou mencionaram a expressão matemática do conteúdo; e e) dois apresentaram expressões com simbologias baseadas nos contextos das situações de Matemática e não apresentaram ou mencionaram a expressão matemática do conteúdo. No nosso entendimento, se todos os participantes utilizassem em suas conduções de ensino as simbologias advindas dos contextos das situações de Matemática, isso poderia ajudar na abstração, uma vez que valorizaria as iniciativas representacionais escolhidas pelos alunos, o que é pretendido na ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* (Proença, 2018). É o caso de P9 que leva a obter a expressão ‘P = 2n + 2’ e depois aponta que explicaria a função ‘f(x) = 2x + 2’, o que, a nosso ver, deve ocorrer pela abordagem da relação funcional de dependência de f(x) em relação à x.

Conclusão

O nosso objetivo neste artigo visou compreender o planejamento de propostas de ensino de futuros professores de matemática para abordar a generalização de padrões algébricos no EAMvRP, direcionadas a alunos do ensino médio. Para tal, os 18 futuros professores de Matemática vivenciaram aulas em uma disciplina sobre o EAMvRP em interação ao processo de generalização de padrões algébricos.

O uso das cinco ações do EAMvRP nas propostas de ensino acabou por revelar aspectos importantes que se referem à organização de aulas que se direcionem a levar os alunos de ensino médio a vivenciarem e a compreenderem o processo de generalização de padrões algébricos. Realizar as escolhas de situações de Matemática teria relação com elementos que devem (deveriam) ser considerados para ajudar a delimitá-las. Abordar situações com enunciados que trazem casos particulares já inclusos ou que exigem como solução a obtenção de uma expressão ou fórmula matemáticas são um campo fértil para provocar desde o início os alunos a se envolverem no processo de generalização de padrões algébricos. Se esses dois elementos não forem considerados, pode ser que o objetivo do professor seja, primeiro, explorar as estratégias dos alunos, o que está condizente ao EAMvRP (Proença, 2018), de modo que esse processo pode ser abordado em seguida.

Outro aspecto que merece atenção no EAMvRP é a primeira ação, a de *escolha do problema*, sobre a previsão de estratégias de resolução. Apesar de vários participantes não terem apresentado a estratégia sobre uso de tabela e casos particulares, evidenciando a busca de padrões algébricos, alguns deles fizeram uso dessa estratégia em suas conduções. Entendemos que seria importante fazer essa previsão, porque ajuda o professor a se organizar quando for atuar em sala de aula, o que também evidencia seus conhecimentos matemáticos e pedagógicos e como os mobiliza.

Sobre as conduções, o aspecto que surgiu foi a abordagem do processo de generalização de padrões algébricos na ação de discussão das estratégias, o que não havia sido previsto por Proença (2018). Porém, mostra que se o ensino buscar tratar desse processo, o seu planejamento pode também envolver-se nessa quarta ação de ensino. Isso é uma situação importante que evidencia a iniciativa pela construção e reflexão de suas práticas futuras, favorecendo o aprender a ser professor.

Referente ao uso de casos particulares, notamos que isso ocorreu pela maioria dos participantes, porém, ainda se coloca como importante fazer uso de desenhos e figuras para conduzir os alunos no processo de generalização, o que deve ser incorporado na formação inicial. Sobre abordar as regularidades a serem percebidas nos casos particulares, isso foi contemplado por metade dos futuros professores. No entanto, os demais participantes precisam rever seus conhecimentos sobre esse aspecto e buscar incorporá-los em suas propostas de ensino, uma vez que é necessário despertar nos alunos suas habilidades perceptíveis e simbólicas. Assim, na obtenção dos padrões algébricos, verificamos que parte dos participantes deixou de recorrer às simbologias próprias dos contextos das situações de Matemática, perdendo a oportunidade de ajudar a potencializar a compreensão dos alunos quando da articulação ao conteúdo.

Enfim, o planejamento das propostas de ensino com base nas cinco ações do EAMvRP, oportunizado pela formação que oferecemos, vem a contribuir à aprendizagem profissional de futuros professores para tratar do processo de generalização de padrões algébricos, tendo em vista revelar alguns aspectos como os mencionados acima que outros estudos ainda não consideraram. Portanto, estudos devem ser feitos de modo a não apenas analisar propostas de ensino como as deste estudo, mas ainda analisar as suas implementações em sala de aula, o que ajudará a ampliar os conhecimentos de aprender a ensinar dos futuros professores de Matemática.

Referências

Alajmi, A. H. (2016). Algebraic generalization strategies used by Kuwaiti pre-service teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(8), 1517–1534. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9657-y

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? *Boletim GEPEM*, *60*, 147-162. http://doi.org/10.4322/gepem.2014.008

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema*, *28*(48), 64-88. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Echeverría, M. D. P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In J. I. Pozo (Org.), *A solução de problemas:* aprender a resolver, resolver para aprender (pp. 13-42). ArtMed.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, *4*(1), 78–91. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384

Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Cerda, G., & Saadati, F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: diseño y validación de un cuestionario. *Enseñanza de Las Ciencias*, *36*(3), 99-120. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2351

Hallagan, J. E., Rule, A. C., & Carlson, L. F. (2009). Elementary school pre-service teachers' understandings of algebraic generalizations. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(1), 201-206. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol6/iss1/16

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42. www.jstor.org/stable/40248005

Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza* (9.ª ed.). Cortez.

İmre, S. Y., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(3), 207–226. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9203-6

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, Y., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2018). Mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge in problem posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13*(2), 75-90. https://doi.org/10.12973/iejme/2698

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Ed.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação*, 8, 7-22. http://sisifo.ie.ulisboa.pt/index.php/sisifo/article/view/130

Mizukami, M. G. N. (2006). Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas. In A. M. Nacarato, & M. A. V. Paiva (Ed.), *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas* (pp. 213-231). Autêntica.

Moguel, L. E. S., Landa, E. A., & Cabañas-Sánchez, G. (2019). Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 563-581. https://doi.org/10.29333/iejme/5769

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.

Pacheco, J. A. & Flores, M. A. (1999). *Formação e avaliação de professores.* Porto Editora.
Peruzzo, C. M. K. (2003). Da Observação participante à pesquisa-ação em comunicação: pressupostos epistemológicos e metodológicos. *Anais do 26.º Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação*. INTERCOM. http://www.intercom.org.br/papers/nacionais/2003/www/pdf/2003_coloquio _peruzzo.pdf
Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, *21*(2), 29–50. https://doi.org/10.48489/quadrante.22881
Ponte, J. P., & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, *50*, 135-155. http://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400010
Proença, M. C. (2018). *Resolução de Problemas*: *encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula*. EdUEM.
Proença, M. C. (2019). Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(3), 419-437. http://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p419-437
Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 2-21). PME-NA.
Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0
Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: psychological and pedagogical considerations.* Springer.
Rodrigues, R. V., Cyrino, M. C., & Oliveira, H. (2019). Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. *Quadrante*, *28*(1), 100–123. https://doi.org/10.48489/quadrante.22975
Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 1163-1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
Shroeder, T., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Traffon, & A. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 Yearbook* (pp. 31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860
Son, J., & Lee, M. Y. (2021). Exploring the relationship between preservice teachers' conceptions of problem solving and their problem-solving performances. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(1), 129-150. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10045-w
Tambunan, H. (2019). The effectiveness of the problem solving strategy and the scientific approach to students' mathematical capabilities in high order thinking skills. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(2), 293-302. https://doi.org/10.29333/iejme/5715
Tardif, M. (2012). *Saberes docentes e formação profissional* (14.ª Ed.). Vozes.
Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(2), 64-81. http://doi.org/10.5007/1981-1322. 2013v8n2p64
Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics 49*(3), 379-402. https://doi.org/ 10.1023/A:1020291317178