

Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática

Semantic congruence: a semiotic and cognitive phenomenon to be considered in mathematical learning

Méricles Thadeu Moretti 

Universidade Federal de Santa Catarina
Brasil
mthmoretti@gmail.com

Celia Finck Brandt 

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Brasil
brandt@bighost.com.br

Saddo Ag Almouloud 

Universidade Federal da Bahia
Brasil
saddoag@gmail.com

Resumo. A congruência semântica na aprendizagem matemática, desenvolvida por Duval como uma noção que promove as operações semióticas e cognitivas de tratamento e conversão, mostra-se de extrema importância na compreensão dos acertos e erros da produção discente. Mostra-se, também, não menos importante na preparação de atividades didáticas que objetivam a aprendizagem de alguma noção matemática. O presente estudo trabalha com essas duas ideias: compreender o que se passa com a produção dos alunos e contribuir para a preparação de atividades de ensino.

Palavras-chave: congruência semântica; tratamento; conversão.

Abstract. The semantic congruence in mathematics learning, developed by Duval as a notion that promotes the semiotic and cognitive operations of processing and conversion, has proven to be extremely important in understanding the successes and errors in students' productions. The topic has also been proven to be equally important in the preparation of didactic activities that aim at teaching any mathematical notions. The present study works with these two ideas: to understand what happens with students' productions; and to contribute to the preparation of teaching activities.

Keywords: semantic congruence; treatment; conversion.

Introdução

Neste artigo, tecemos reflexões sobre a congruência semântica na aprendizagem matemática. Apoiamo-nos nas pesquisas de Duval (1995, 2004, 2013) desenvolvidas sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (ou Teoria Semiótica e Cognitiva ou, simplesmente, Teoria Semiocognitiva). A noção de congruência semântica, fenômeno estudado por Duval, promove as operações semiocognitivas de tratamento e conversão e tem um papel fundamental na compreensão dos acertos e erros da produção discente. Ela mostra-se importante na preparação de atividades didáticas que têm potencial para promover a aprendizagem de noções matemáticas. Focaremos, portanto esses dois aspectos para tentar compreender o que se passa com a produção dos alunos e contribuir para a preparação de atividades de ensino.

Um mesmo objeto matemático precisa ser representado por meio de representações pertencentes a sistemas semióticos diferentes para que ocorra a conceitualização, visto que esse objeto não possui existência real e só pode ser acessado por meio de representações. Essa exigência coloca em cena o fenômeno da congruência semântica que pode ser responsável pelo maior ou menor grau de sucesso na resolução de problemas geométricos, algébricos, aritméticos entre outros e, também, pelo não reconhecimento do mesmo objeto matemático representado por representações pertencentes em sistemas semióticos diferentes (por exemplo, uma função representada algebricamente e graficamente). Uma operação cognitiva é denominada de tratamento quando operada em um mesmo sistema de representação ou registro, ou seja, é uma operação intrarregistro. Já a operação cognitiva de conversão se dá por meio de representações pertencentes a sistemas semióticos diferentes ou pertencentes a registros diferentes (por exemplo, língua natural e linguagem algébrica, linguagem algébrica e representação gráfica, entre outros); é uma operação interregistro que coloca em cena outras exigências cognitivas. A operação cognitiva de conversão exige a identificação das unidades significantes em cada registro (por exemplo, na linguagem algébrica, “ $y = ax + b$ ” tem como unidades significantes os coeficientes “a” e “b”, e no registro gráfico associado, as unidades significantes são a intersecção no eixo das ordenadas e a tangente do ângulo formado pela reta com o sentido positivo do eixo das abscissas). Essas unidades devem sofrer variação em um registro que deve ser associada à variação no registro associado pertencente ao outro sistema semiótico. Na realização dessa operação cognitiva, o fenômeno da congruência semântica pode se manifestar e pode ser responsável pelo maior ou menor sucesso na realização de problemas ou no reconhecimento do mesmo objeto em dois registros de representação (por exemplo, identificar o mesmo objeto matemático por meio dos registros “um número positivo” e $x > 0$) pelos alunos.

As dificuldades apresentadas por alunos na realização das operações cognitivas de tratamento e conversão são associadas, de acordo com Duval (2012b), à identificação do

mesmo objeto matemático representado por meio de representações que pertencem a sistemas semióticos distintos e serão objeto de análise no presente artigo por se revelar fundamental para a identificação da compreensão discente em atividades de resolução de problemas. O fenômeno da congruência semântica pode explicar algumas das incompreensões, as fragilidades, os erros, e levar o professor a organizar a prática educativa com foco nas rupturas que se fizerem necessárias.

Fenômeno semiocognitivo da congruência semântica e a distância cognitiva entre representações

A distância cognitiva que separa duas representações no reconhecimento de um mesmo objeto matemático é identificada por Duval (2012b) como o fenômeno da congruência semântica. Tais representações podem ou não se originar de um mesmo registro (ou de um mesmo sistema semiótico) de representação:

O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre essas duas representações sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado e não ser efetuado ou entendido (Duval, 2012b, p. 105).

Conforme podemos depreender desta citação, a ideia de congruência semântica também diz respeito às operações de tratamentos semióticos, apesar do fato de que, em seus estudos posteriores, Duval prioriza a operação semiocognitiva de conversão, por se tratar da operação principal que está na base da sua ideia de aprendizagem matemática (Figura 1).

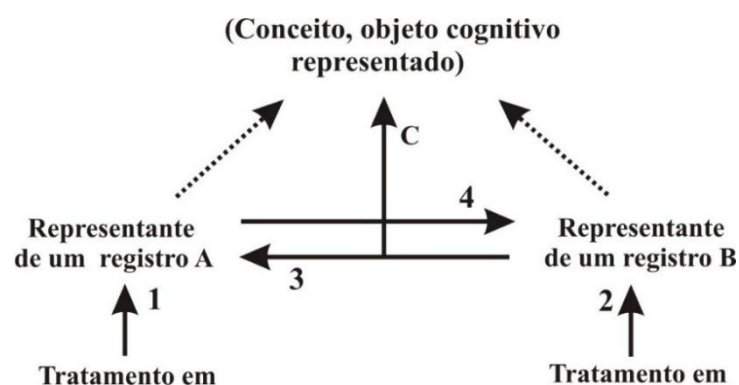


Figura 1. Modelo cognitivo de representação centrada na função de objetivação (Duval, 1995, p. 67, tradução nossa)

A seta C, que arrasta as operações de conversão em ambos os sentidos dos registros A e B, é o que Duval (1995, p. 67, tradução nossa) chama de “compreensão integrativa de uma representação”, “ela pressupõe uma coordenação dos dois registros”.

A operação semiocognitiva de conversão, por se tratar de uma operação que envolve dois registros (ou dois sistemas de representação), pode acarretar um custo cognitivo muito maior em comparação à operação de tratamento, que se dá em um único registro. Veremos, mais adiante, diversas situações ligadas à congruência semântica, que envolvem tanto a operação semiocognitiva de tratamento quanto, principalmente, a operação de conversão.

Duas representações são congruentes quando a passagem de uma para outra é feita de forma espontânea e preenchem as três condições:

Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, a mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações e para fazer a conversão de uma unidade significativa na representação de partida com uma só unidade significativa na representação de chegada. (Duval, 1995, pp. 5-6, tradução nossa)

O esquema da Tabela 1 elucida o conceito de congruência semântica nos moldes dessa definição.

Tabela 1. Esquema da noção de congruência semântica (adaptado de Duval, 1995)

Ordem de aparição dos elementos significantes em ambos os registros A e B	Ordem de apresentação dos elementos significantes do Registro A		Ordem de apresentação dos elementos significantes do Registro B
1.º	Unidade significativa A1	↔	Unidade significativa B1
2.º	Unidade significativa A2	↔	Unidade significativa B2
3.º	Unidade significativa A3	↔	Unidade significativa B3
...
Enésimo	Unidade significativa An	↔	Unidade significativa Bn

A relação entre os elementos significantes dos registros A e B é biunívoca; porém, em geral, o grau de transparência nos dois sentidos não é o mesmo. Em uma experiência referenciada por Duval (1995, p. 53), e realizada por Duval (1971), observou-se que:

- a) A conversão da passagem do registro “A soma dos produtos de um inteiro com dois outros inteiros” para “ $a.b + a.c$ ” foi realizada com uma taxa de 48% de acerto, enquanto a taxa de acerto no sentido contrário foi de 87%;
- b) As taxas de acertos nas conversões em ambos os sentidos de “A soma de dois produtos de dois inteiros, todos os inteiros sendo diferentes” e “ $a.b + c.d$ ” foram iguais a 90%.

Diferentes relações entre os elementos significantes dos registros A e B, tanto na ordem quanto na quantidade, caracterizam situações de não congruência semântica. No entanto,

em duas situações distintas em que há congruência semântica – ou seja, situações que cumprem as três condições evocadas na Tabela 1, pode ou não haver o mesmo grau de transparência. Ou seja, o grau de congruência semântica não é uma variável que toma valores de uma variável binária: ou tudo ou nada. Esse tema merece um estudo mais aprofundado, uma vez que está fortemente relacionado às taxas de sucesso na conversão de um registro a outro ou, mais geralmente, à passagem de uma representação a outra.

Para um grupo de alunos de um certo nível de escolaridade, as operações de tratamentos ou de conversões podem ser congruentes, enquanto para alunos de outro nível de escolaridade essas operações podem não ocorrer do mesmo jeito.

O grau de transparência ou opacidade na mudança entre dois registros, ou até mesmo na mudança entre duas representações quaisquer de um mesmo objeto, está relacionado a “operações” que requerem a transformação de uma na outra. Assim, por exemplo, “1” e “3 – 2” representam o mesmo objeto. A passagem de um para o outro requer a compreensão de operações que podem ou não estar acessíveis para um ou outro aluno. Pensando em um aluno que não sabe subtrair, mas sabe somar e sabe também que a diferença entre duas quantidades iguais é nula, podemos ter as seguintes passagens entre essas expressões:

$$1 = (1) + 2 - 2 = (1 + 2) - 2 = 3 - 2$$

$$3 - 2 = (3) - 2 = (1 + 2) - 2 = 1 + (2 - 2) = 1$$

A noção de congruência semântica caminha lado a lado com a ideia de referência desenvolvida por Frege (1978): para o desenvolvimento da matemática, ganha importância o fato de que a mudança de uma representação para outra deve manter uma equivalência referencial. Do ponto de vista da aprendizagem matemática, é preciso considerar a noção de congruência semântica associada à equivalência referencial em todas as situações, como aquelas apresentadas na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2. Situações possíveis entre congruência semântica e equivalência referencial (adaptado de Duval, 2004, 2012a)

		Congruência Semântica?	
		SIM	NÃO
Equivalência Referencial?	SIM	1	2
	NÃO	3	4

O que importa para o desenvolvimento da matemática são as situações “1” e “2”. Porém, do ponto de vista didático do ensino e da aprendizagem matemática, todas as quatro possibilidades entre congruência semântica e equivalência referencial são importantes.

Aprendizagem da álgebra: a questão da designação

Discutiremos, a seguir, algumas das situações da Tabela 2. Vamos considerar os três problemas a seguir.

- Problema 1: Um pai tem 30 anos a mais do que a idade do seu filho. Sabendo-se que...

O equacionamento da primeira frase desse problema leva grande parte dos alunos, de forma equivocada, à seguinte expressão:

$$P + 30 = F,$$

considerando-se P a idade do pai e F a idade do filho. A expressão algébrica encontrada é congruente com a primeira frase do enunciado do problema, mas não tem equivalência referencial. É o caso “3” da Tabela 2.

A seguinte expressão relativa a esse mesmo Problema 1:

$$P - 30 = F$$

situa-se no caso “2” da Tabela 2, em que há equivalência referencial, mas não há congruência semântica.

Consideremos uma modificação no enunciado do Problema 1, do seguinte modo:

- Problema 2: A diferença entre as idades do pai e do filho é de 30 anos. Sabendo-se que...

O equacionamento desse problema leva à seguinte expressão:

$$P - F = 30$$

Ela é congruente com o enunciado e referencialmente equivalente. É o caso “1” da Tabela 2.

Os enunciados das primeiras frases dos Problemas 1 e 2 pertencem ao mesmo registro em língua natural. No entanto, o enunciado do Problema 2 leva a uma expressão matemática que é semanticamente congruente e referencialmente equivalente, diferente do caso do enunciado do Problema 1 – apesar de que seja semanticamente congruente, não é referencialmente equivalente.

Consideremos o Problema 3 em uma linguagem bastante usual entre alunos, apenas como exemplo:

- Problema 3: A idade do pai menos a idade do filho é de 30 anos. Sabendo-se que...

O equacionamento desse problema leva à expressão:

$$P - F = 30$$

Esta expressão é ainda mais congruente do que o caso do Problema 2, por conta da ordem dos elementos significativos expressos no enunciado e na expressão algébrica. É o caso “1” da Tabela 2.

Esse último problema, colocado em sentido contrário – ou seja, dar a equação e pedir uma frase que lhe seja equivalente, é o preferido pelos alunos, uma vez que a frase contempla a ordem de aparição dos elementos significativos na expressão algébrica. É o que mostrou um estudo desenvolvido por Brandt et al. (2020), no qual os dados do problema apareciam em diferentes lugares, com o objetivo de caracterizar diferentes medidas, com relação a problemas aditivos de Vergnaud (1990). Ora os valores faltantes eram EI (Estado Inicial), ora EF (Estado Final), ora VT (Valor da Transformação) em problemas de transformação. Ou ainda esses valores eram PP – as partes do todo ou o PT – o todo e uma parte do todo em problemas do tipo parte todo. Por exemplo, os dados da Tabela 3 a seguir.

Tabela 3. Situações possíveis entre congruência semântica e equivalência referencial adaptada de Brandt et al. (2020, p. 489)

	Estado Inicial (EI)	Valor da transformação (VT)	Estado final (EF)
Problema a	...	40	90
Problema b	85	...	205

O conjunto de valores da segunda linha da Tabela 3 (problema a) pode caracterizar VT e EF de um problema aditivo. Nesse caso, o problema correspondente seria:

- Tenho alguns, ganhei (ou perdi) 40 e fiquei com 90. Quanto tinha?

A resolução desse problema exige a inversão dos valores (comutatividade) para obter a solução pelo procedimento do complemento ($40 + \text{----} = 90$), ou ainda a reversibilidade para a obtenção do EI pelo procedimento da diferença ($90 - 40 = \text{----}$). Em ambos os casos, manifesta-se o fenômeno da não congruência, tornando a resolução mais complexa. No entanto, algo aconteceu: a maioria dos alunos criou problemas congruentes, não respeitando a ordem dos valores, como o exemplo seguinte:

- Rafael tinha 90 carrinhos, ganhou mais 40. Com quantos ficou?

Esse problema é congruente com a solução ($90 + 40 = \text{----}$), além de ser um problema protótipo com alto índice de acerto, conforme apontam as pesquisas. Os alunos utilizam os dados da Tabela 3 conforme a facilidade de obtenção da solução. Esse fato aponta que o fenômeno da não congruência foi contornado pela maioria dos alunos da pesquisa (em torno de 134 alunos).

Outro exemplo ilustra esse fato para o conjunto de valores da terceira linha da Tabela 3 (problema b):

- Para comprar uma televisão, eram necessários 205 reais, mas Rô só tinha 85 para a prestação. Quanto falta?

Esse exemplo caracteriza um problema parte-todo, no qual tenho o todo e quero saber a parte, bastando subtrair a parte do todo: $(205 - 85 = \text{-----})$. Se o problema elaborado tivesse estrutura IF, sua solução enfrentaria o fenômeno da não congruência. De acordo com Brandt et al. (2020, p. 507):

A existência de diferentes problemas, com diferentes estruturas, segundo os resultados analisados, ocorrera em função do fenômeno de congruência semântica. Esse fenômeno interveio de maneira significativa na elaboração de problemas. Por essa razão, os dados do quadro para a elaboração dos problemas foram utilizados de diferentes formas, e com diferentes status: ora como medidas estáticas (em problemas de comparação ou de composição), ora como medidas dinâmicas (em problemas de transformação). Também os espaços em branco foram utilizados de diferentes maneiras, representando medidas estáticas (calcular o valor de um todo) ou dinâmicas (calcular o valor da transformação).

Voltando aos problemas das idades do pai e do filho, é possível perceber que os três problemas apresentam uma única expressão apofântica (isto é, uma expressão que permite dizer algo dos objetos designados sob a forma de uma proposição) com expressões referenciais que levam às designações diretas das idades do pai e do filho e designação funcional que relaciona as duas idades. A partir de operações de conformidade, por se tratar da língua natural, pode-se chegar à conclusão de que as duas frases contidas nos problemas 1 e 2 “querem dizer a mesma coisa”. Por exemplo, podemos ter as seguintes frases na passagem do enunciado do Problema 1 aos Problemas 2 e 3:

- um pai tem 30 anos a mais do que a idade do seu filho
- ↔ a idade do pai é maior do que a idade do filho em 30 anos
- a diferença entre as idades do pai e do filho é de 30 anos
 - a idade do pai menos a idade do filho é de 30 anos

Parece ser simples, mas a análise de atividades que exigem designações tem mostrado que certas faltas de transparência na mudança do registro da língua natural para a linguagem algébrica precisam ser compreendidas. Isso advém de condicionantes semiocognitivos para a compreensão e aquisição de conhecimento em álgebra. Segundo Duval (2020), há quatro condições:

1. A designação de objetos em linguagem natural, utilizando letras ou símbolos;
2. A visualização da estrutura matemática da formulação de um problema por meio de um texto;

3. A designação de uma quantidade desconhecida e a designação funcional de uma segunda quantidade desconhecida (Duval, 2002). Trata-se de escrever as duas expressões incompletas, a partir do enunciado do problema, formando os dois membros de uma equação;
4. A formulação de problemas para que seja possível resolvê-los (Duval, 2013).

Rauscher (2020) apresenta a Tabela 4, a seguir, que atesta toda a complexidade na designação de um pequeno problema de matemática, com as possibilidades de designação para o problema: “Uma garrafa e a sua rolha pesam juntas 110 gramas. A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha. Quanto pesa, respectivamente, a garrafa e a tampa?”

Tabela 4. Análise bidimensional semiocognitiva aplicada ao problema do peso da garrafa e da rolha (adaptado de Rauscher, 2020, p. 73)

	DESIGNAÇÃO VERBAL DOS três objetos do problema	DESIGNAÇÃO NUMÉRICA	RE-DESIGNAÇÃO LITERAL
1. Designação direta	Peso da GARRAFA	.. ?...	a
	Peso da ROLHA	... ?...	b
	Peso dos DOIS	110	(a + b)
Designação indireta	A garrafa “ <i>pesa ... a mais do que a rolha</i> ”	(... + 100)	(b + 100)
2. <i>descritiva</i> (LÍNGUA)			
3. <i>funcional</i> (LETRAS)			
4. <i>Dupla designação de um mesmo objeto</i>	<i>Peso dos dois</i>		(a + b)
	“a garrafa e a sua rolha pesam 110g”	110	<i>ou</i> (b+100) + b)
EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL			2b + 100 = 110 (EQUAÇÃO)

Em relação a esta tabela, Rauscher (2020, pp. 73-74) observa sete passos:

1. Seleção de um dos sintagmas nominais do enunciado nominal da declaração (“O peso da rolha”);
2. Escolha de uma letra para designar a primeira quantidade verbalmente designada (“Vamos designar por b o peso da rolha”);
3. Seleção de outro sintagma nominal (“Peso da garrafa”);
4. Utilização funcional da mesma letra para designar a segunda quantidade (“peso da garrafa: b+100”);
5. Seleção do terceiro sintagma nominal (“o peso da rolha e da garrafa”);

6. A utilização funcional da letra para designar a terceira quantidade (“Peso da rolha e da garrafa: $b+(b+100)$ ”);
7. Reconhecimento da dupla designação da terceira quantidade que finalmente dá a equação (“110g e $b+(b+100)$ ”)

Pode-se observar nesses passos que equacionar o enunciado de um problema não é nada simples, pois requer uma aprendizagem específica, que foge aos aspectos puramente matemáticos.

Segundo Duval (2020, p. 25), a aprendizagem de álgebra enfrenta a falta de transparência, para os alunos, em relação aos escritos simbólicos, tendo em vista que “diferentes tipos de agrupamentos de números, letras e símbolos se sobrepõem, em uma mesma sucessão, e tais agrupamentos constituem unidades de sentido em diferentes níveis, quase impossíveis de serem discriminadas e reconhecidas pela maioria dos jovens alunos”.

Há níveis de sentido dos escritos simbólicos (escritos operatórios). Segundo Duval (2020, p. 26):

- O primeiro nível de sentido é o dos elementos significantes, que dependem inteiramente do sistema semiótico utilizado, como definido por Saussure (1972): fonemas, morfemas e palavras de uma linguagem natural, dígitos que designam números em um sistema de numeração. Assim, os dígitos “0” e “1”, por exemplo, não têm o mesmo valor de escolha opositivo em relação a um sistema de escrita binária ou a um sistema de escrita decimal;
- O segundo nível de sentido é o das expressões incompletas ou completas, que podem ser produzidas usando um sistema semiótico: sintagmas nominais e verbais para frases e, o que chamaremos de sintagmas operatórios para os escritos simbólicos.

Geometria e congruência semântica

Duval (2012c) trata da noção de congruência semântica voltada para o caso da aprendizagem de geometria. Em situações que envolvem figuras, Duval afirma que:

... a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas. Entre estas interpretações distinguiremos: as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras. A apreensão sequencial é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura. (Duval, 2012c, p. 120)

Duval (2012c) destaca duas apreensões perceptivas. Uma é imediata e depende da organização dos elementos visuais da figura, enquanto outra precisa ser controlada, sendo combinada com a apreensão discursiva: “Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente” (Duval, 2012c, p. 120).

A apreensão operatória diz respeito às possíveis modificações que uma figura pode sofrer. Ela é comandada pela apreensão perceptiva, que tem a função de identificação para implementar designações ou modificações na figura.

Muito por conta dessa atitude imediata de apreensão perceptiva, manifesta-se o fenômeno da não congruência semântica. Os problemas a seguir exemplificam essa situação.

- Problema 4: O segmento AM (Figura 2) é maior, menor ou igual ao segmento MB?

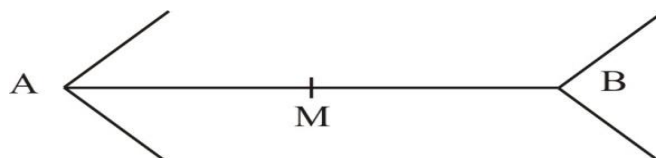
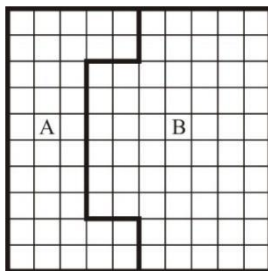


Figura 2. Problema adaptado de Guillaume (1979, p. 91)

A apreensão perceptiva possivelmente nos impediria de medir os comprimentos de AM e MB (apreensão operatória), de modo a constatar que apresentam o mesmo comprimento. A apreensão perceptiva pode comandar as demais apreensões; em geral, é na apreensão operatória que a busca da solução encontra eco. A ligação entre ambas é chamada de “visualização”: é preciso visualizar para entrar na resolução do problema. Um dos grandes entraves da visualização é a busca por elementos na figura em uma dimensão diferente daquela que é apresentada. É o caso, por exemplo, do Problema 5.

- Problema 5: Assinale a resposta correta (adaptado de Capes/Cofecub, 1996).



- a)
- O perímetro da parcela A é igual ao perímetro da parcela B
 - O perímetro da parcela A é maior do que o perímetro da parcela B
 - O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B
 - Explique a escolha.
- b)
- A área da parcela A é igual a área da parcela B
 - A área da parcela A é maior do que a área da parcela B
 - A área da parcela A é menor do que a área da parcela B
 - Explique a escolha.

Figura 3. Problema adaptado de Capes/Cofecub (1996).

Esse problema, aplicado a um grupo de 392 alunos do primeiro ano do ensino médio de um instituto federal em Santa Catarina (idade entre 15 e 16 anos), produziu os seguintes resultados: 75,7% acertaram a questão sobre a área; 30,8% acertaram a questão sobre o

perímetro; 27% acertaram ambos os itens; por fim, dos 75,7% que acertaram o item sobre área, 41% erraram sobre perímetro.

Para acertar essas questões, é preciso ver um grande retângulo de dimensão 2 (2D) repartido por um traço comum de dimensão 1 (1D), a partir dos meios de dois de seus lados opostos em duas partes diferentes, A (2D) e B (2D). É essa mudança dimensional de percepção que dificulta o exercício. Além disso, o fundo quadriculado reforça a predominância da apreensão das unidades figurais 2D sobre a apreensão das unidades 1D (Capes/Cofecub, 1996)

Em relação à resposta sobre a área, a figura fornecida no enunciado é congruente com a questão e com o procedimento de solução. Porém, no caso do perímetro, a congruência semântica ligada à apreensão perceptiva conduz ao erro.

A apreensão discursiva comanda a apreensão operatória, tratando das modificações geométricas possíveis em uma figura, que podem ser feitas de muitas maneiras, conforme mostra a Tabela 5, a seguir:

Tabela 5. Tipos de operações da apreensão operatória sobre figuras (Duval, 2012a, p. 127)

Tipo de modificação figural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA (decomposição da figura em subfiguras)	<ul style="list-style-type: none"> - Reconfiguração intermediária - Imersão 	<ul style="list-style-type: none"> - Característica convexa ou não convexa das partes elementares
MODIFICAÇÃO ÓTICA	<ul style="list-style-type: none"> - Superpossibilidade - Anamorfose 	<ul style="list-style-type: none"> - Recobrimento parcial - Orientação
MODIFICAÇÃO DE POSIÇÃO	<ul style="list-style-type: none"> - Rotação - Translação 	<ul style="list-style-type: none"> - Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

A Tabela 5 nos mostra várias possibilidades de operação sobre figuras, sendo a reconfiguração intermediária uma modificação importante. O problema seguinte (Figura 4), tratado por Balacheff (1992, citado por Duval, 1995, p. 190), ilustra bem a forte subordinação das apreensões operatória e discursiva à apreensão perceptiva:

Quantos retângulos tem esta figura?

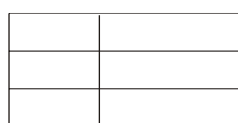


Figura 4. Problema citado por Duval (1995, p. 190)

A figura do enunciado impõe um olhar de um retângulo maior subdividido em pequenos retângulos – lei gestáltica de fechamento associada à harmonia e regularidade (Gomes Filho, 2004), o que pode impedir que os alunos incluam, por exemplo, o retângulo hachurado seguinte (Figura 5) na quantidade de retângulos solicitada.

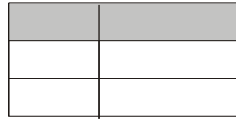


Figura 5. Uma possibilidade de resposta ao problema da Figura 4.

O fenômeno da não congruência se faz presente nessa situação. A frase “Quantos retângulos tem esta figura?”, e a imagem da figura apresentada de um retângulo maior subdividido em pequenos retângulos, se interpõe ao gesto de contagem de outros retângulos, como aquele hachurado.

A negação na congruência semântica

Além dos elementos apresentados na Tabela 1, que caracterizam duas representações semanticamente congruentes, ou não semanticamente congruentes, e as considerações sobre a equivalência referencial da Tabela 2, é necessário ainda reconhecer certas diferenças semânticas, pois elas podem interferir na transparência de duas representações e no reconhecimento da equivalência referencial. A negação de afirmações tem um papel importante no custo cognitivo do reconhecimento da congruência e da equivalência referencial de duas representações postas em operações semióticas.

Duval (2012b) menciona um estudo conduzido por Clark e Chase (1972) sobre o tempo de reação no reconhecimento de uma imagem simples e na descrição por uma frase. A imagem é composta de um retângulo em que a letra A está acima e a letra B abaixo (Figura 6).

A	A está acima de B
B	B está abaixo de A

Figura 6. Apresentação icônica e discursiva de dois objetos A e B (Duval, 2012b, p. 102)

A Tabela 6 é uma adaptação de um quadro da experiência conduzida por Clark e Chase (1972) e de um quadro de Duval (1995).

Tabela 6. Média do tempo de reação (latência), em milissegundos, na exposição da imagem e em seguida a frase para a resposta Verdade ou Falso (adaptada de Clark e Chase (1972, p. 492) e de Duval (1995, p. 48))

		Condições	Frase que descrevem a imagem	Latência no caso da imagem apresentada primeiro
POSITIVO	Verdade	acima	A está acima de B	1783
		abaixo	B está abaixo de A	2139
	Falso	acima	B está acima de A	2130
		abaixo	A está abaixo de B	2077
NEGATIVO	Verdade	acima	B não está acima de A	2614
		abaixo	A não está abaixo de B	2499
	Falso	acima	A não está acima de B	2354
		abaixo	B não está abaixo de A	2678

Podemos observar na Tabela 6 que as maiores latências aparecem nos quatro casos de condições de descrição negativa (últimas quatro linhas da tabela). Entre esses quatro casos apontados, têm maiores latências as descrições inversas, ou seja, as frases que iniciam com a letra B (B não está acima de A e B não está abaixo de A). No caso positivo, em que a imagem e a frase que descreve a imagem estão na mesma ordem de apresentação (Tabela 6) com o mesmo traço semântico da frase (A está acima de B), a latência de 1783 milissegundos é a menor; aumenta para o caso em que há a mesma ordem, mas o traço semântico é oposto (2077 ms); aumenta ainda mais para os casos em que a ordem é inversa e o traço semântico não é oposto (2139 ms) ou é oposto (2130 ms).

Em resumo, temos a seguinte situação: a maior latência ocorre com as frases negativas. No interior tanto das frases negativas quanto das positivas, as latências são maiores para os casos em que as frases são inversas, ou seja, trazem por primeiro a letra B.

Os estudos de Clark e Chase (1972) vão além do que apresentamos aqui, pois ainda apresentam dados da experiência para o caso em que a frase é apresentada antes da imagem e em que os valores colhidos são, respectivamente, menores do que os observados no quadro (no caso em que a imagem é mostrada por primeiro). No entanto, não encontramos nenhuma interpretação dessa diferença no tempo de resposta entre mostrar a imagem por primeiro ou mostrar a imagem depois em todas as 8 condições apontadas na Tabela 6.

A partir da análise dessa situação, apresentada por Clark e Chase (1972), Duval (1995) estabelece os três critérios de congruência semântica a que nos referimos anteriormente, quais sejam: (1) possibilidade de correspondência semântica entre elementos significantes;

(2) univocidade semântica terminal; e (3) ordem na organização das unidades que compõem cada uma das duas representações em jogo.

Compreensão de texto e congruência semântica

Duval (1995) afirma que a variabilidade redacional inerente à produção de um texto relaciona-se à escolha de elementos de conteúdo cognitivo que são explicitados, à ordem de apresentação, assim como à escolha de expressões linguísticas para a designação. Em virtude disso, a organização particular de um texto pode explicitar, mais ou menos, o conteúdo cognitivo: “As variações redacionais dizem respeito essencialmente a maneira como um conteúdo cognitivo é explicitado” (Duval, 1995, p. 334).

Duval (1995, p. 335) apresenta dois enunciados de um mesmo problema, com o objetivo de analisar os erros que podem ser originados dos elementos de informação que são ou não redacionalmente explicitados:

- Enunciado 1: Segunda-feira após o meio-dia Pedro recebeu R\$ 849,00 de João. Depois, ele foi a uma loja fazer compras importantes. Na segunda de tarde, ele contou seu dinheiro e tinha R\$ 475,00 a menos que de manhã. Quanto ele gastou nas suas compras?

A maioria das respostas dos alunos foi $849 - 475 = 374$, o que nos leva à conclusão que não consideraram a quantidade que Pedro tinha de manhã, uma vez que o que se demandava na questão proposta aparece explicitado; R\$ 849,00 é a quantidade de dinheiro que recebeu a mais.

- Enunciado 2: Segunda de manhã Pedro saiu com dinheiro. Após o meio-dia, Pedro recebeu R\$ 849,00 de João. Depois, ele foi a uma loja fazer compras e no final da tarde ele tinha R\$ 475,00 a menos que de manhã. Quanto ele gastou nas suas compras?

A solução desse problema seria (x é o que Pedro tinha de dinheiro na parte da manhã e y é o que gastou nas compras):

$$x + 849 - y = x - 475$$

O resultado é $y = 1324$. Assim, Pedro gastou R\$ 1324,00. Tinha de manhã R\$ 1799,00 ($1324 + 475$) e saiu para fazer compras, no período da tarde, com R\$ 2648,00 ($1799 + 849,00$). Podemos verificar esse problema substituindo os valores na expressão algébrica anterior:

$$1799 + 849 - 1324 = 1799 - 475$$

A frase acrescentada combina duas variações redacionais. Uma que explicita a informação mencionada no texto “R\$475,00 a menos...” pela unidade apofântica “Pedro saiu com dinheiro...”, e a outra que reestabelece a ordem dos marcos temporais (segunda de manhã, segunda após o meio-dia, segunda de tarde). Esse problema aponta a diferença entre o que faz o objeto de uma tematização em uma unidade apofântica (considerado redacionalmente explícito, relativamente à atividade de compreensão), e o objeto em uma menção designando um objeto de referência ou um predicado (não pode ser considerado como redacionalmente implícito e nem explícito, mas é considerado como redacionalmente mencionado).

O Enunciado 2 do problema aditivo induz a menos erros de compreensão do que o Enunciado 1, uma vez que um elemento de informação importante é redacionalmente explicitado, e não somente redacionalmente mencionado. O lugar desse elemento de informação no enunciado corresponde ao lugar desse elemento no desenvolvimento da situação descrita. No Enunciado 2 a organização redacional corresponde à organização do conteúdo cognitivo, havendo congruência entre a organização redacional e a organização própria ao conteúdo cognitivo. No Enunciado 1, não há congruência. A congruência ou não congruência entre a organização redacional e a organização própria ao conteúdo cognitivo são os valores principais do parâmetro redacional.

Outro parâmetro redacional diz respeito à relação entre a base de conhecimentos do leitor e o conteúdo cognitivo implicitamente ou explicitamente mobilizado pela redação do texto. Esses dois parâmetros são independentes um do outro. Quando combinados, podem caracterizar maior ou menor grau de congruência semântica. Duval (1995) define, assim, quatro situações possíveis, conforme a Tabela 7, a seguir.

Tabela 7. Quatro situações típicas de leitura (adaptada de Duval, 1995, p. 350)

		TEXTO (correspondência entre a organização do texto e o conteúdo cognitivo):	
		Congruente	Não congruente
LEITOR (sua base de conhecimentos lhe rende o conteúdo cognitivo do texto):	Familiar	I. Situação trivial, <i>sem</i> risco de erro.	II. Situação trivial <i>com</i> risco de erro.
	Nova	III. Situação normativa para uma aprendizagem que exige tratamentos paralelos ao texto.	IV. Situação exigindo uma pesquisa ou uma aprendizagem que independe do texto.

A análise da Tabela 7 permite identificar situações de leitura que podem mobilizar um dos processos de compreensão ou a sua interação. A situação I é a mais simples: uma leitura rápida do texto já é suficiente para a sua compreensão. Nesse tipo de percurso de leitura,

pode ocorrer a situação II, com alguma incompreensão local; porém, por ser um texto de conteúdo familiar, o leitor pode se contentar com esse tipo de leitura rápida e “cair em alguma emboscada”. A situação III exige uma leitura bem mais ativa, com retornos a algumas partes anteriores do texto e com tratamentos paralelos. Já a situação IV, por conta da não congruência entre o conteúdo cognitivo e a organização redacional, exige aprendizagem direta sobre o conteúdo cognitivo independente do texto.

Assim, Duval (1995, p. 350) nos alerta sobre a “importância da organização redacional e do conhecimento do conteúdo cognitivo envolvido na situação problema a ser resolvida”. Esses dois parâmetros são fundamentais, tanto isoladamente quanto combinados, sendo responsáveis pelo maior ou menor grau de congruência semântica – consequentemente, pelo maior ou menor sucesso dos alunos na resolução de problemas.

Conclusões

Este artigo trabalhou com o tema da distância cognitiva que pode existir entre representações pertencentes a sistemas semióticos distintos ou pertencentes ao mesmo sistema semiótico. Em se tratando de sistemas distintos, essa distância ocorre na operação cognitiva de conversão e na operação cognitiva de tratamento em cada um dos registros. Isso significa que, independentemente da transformação do registro, manifesta-se o fenômeno da congruência, caracterizado como responsável por muitas das dificuldades dos alunos em diversos momentos de aprendizagem.

O presente artigo apresentou análises de problemas apontando que a redação dos problemas pode impactar o grau de congruência de maneira significativa. Conforme a redação, existe uma distância cognitiva entre a informação transmitida pelo problema em língua natural e a sentença matemática a ser utilizada para a resolução em um registro de representação. Acontece que, em virtude dos critérios de não congruência (mesma ordem, univocidade semântica terminal e mesmo número de unidades significativas), os alunos elaboram a sentença matemática como se esses elementos não estivessem presentes. Assim, a palavra “mais” pode levar a uma adição; a ordem dos dados numéricos nos problemas segue a mesma ordem da sentença matemática; as unidades significativas no registro em um sistema semiótico precisam aparecer em outro sistema semiótico, ou ainda estarão ausentes, o que implica em sua ausência na sentença matemática (por exemplo, a palavra “positivo” não ser representada por “ > 0 ”, dentre outros fatores).

Em situações de elaboração de problema com variação de dados numéricos (em valor ou em posição), o fenômeno da não congruência semântica induz à criação de um subterfúgio em que o aluno utiliza os dados na mesma ordem da sentença em língua natural. A operação escolhida para ligar os dados é semanticamente idêntica à palavra em língua natural (por exemplo, “ganhar” e “+”) além de apresentar a mesma quantidade de unidades significantes.

Interessante observar que, em outras situações, o fenômeno da não congruência pode variar de acordo com o sentido da conversão. É o caso das sentenças abertas: em um determinado sentido (da língua natural para a sentença matemática), pode haver não congruência semântica, enquanto no sentido inverso ela não se manifesta (da sentença matemática para a língua natural). Isso ocorre porque são estabelecidas diferentes relações entre os elementos significantes entre os registros, tanto em termos de ordem quanto de quantidade, o que determina o grau de congruência.

A não congruência pode ocorrer também em transformações do registro no mesmo sistema semiótico, nas operações semiocognitivas de tratamento. Nesse caso, a mudança de forma do registro de representação, no interior do mesmo sistema semiótico, relaciona-se à compreensão das operações (adição, subtração, entre outras) ou às “operações” que levam a transformar um registro no outro. Por exemplo, um princípio aditivo ou multiplicativo que permite isolar a incógnita em um lado da sentença, definindo a equação pela passagem de um dos valores numéricos para o outro lado dessa sentença.

As expressões completas e as incompletas podem ser reduzidas por meio de substituições realizadas em cálculos (transformações no interior do mesmo sistema semiótico, passíveis de manifestar o fenômeno da não congruência). Essas substituições têm de garantir o sentido e a referência. São substituições operatórias reversíveis. O grau de congruência depende do conhecimento dos alunos das relações, propriedades e teoremas válidos para a matemática.

De acordo com Duval (2020), uma expressão incompleta “ 2×2 ” pode ser substituída por “4” (um elemento do sistema decimal) ou a expressão “ $3(4a/6 + 1/3)$ ” pode ser substituída por “ $2a + 1$ ” (um sintagma operacional menos complexo). O nível do sentido é de um lado só. Segundo o autor, as substituições das expressões completas têm outra natureza, porque os termos dos dois membros da igualdade podem mudar de lado. Além disso, as operações podem ser feitas nos dois membros da igualdade ou em apenas um deles. Por exemplo, na equação “ $x + 2 = 4$ ” ocorre mudança de lado de um dos termos de um membro da igualdade, por conta de uma substituição operatória: “ $x + 2 - 2 = 4 - 2$ ” \leftrightarrow “ $x = 2$ ”.

Duval (2020) salienta que ambos os membros da igualdade sofrem substituições operatórias (retirar 2 unidades de cada um dos membros não altera a igualdade). Ao proceder com essas substituições operatórias, as duas equações apresentam o mesmo sentido – isto é, “ $x + 2 = 4$ ” tem o mesmo sentido de “ $x = 2$ ”. O autor ressalta que as substituições realizadas nas duas expressões incompletas, que representam os dois membros da igualdade, não são as mesmas: “ $x + 2 - 2$ ” (realizada em um dos membros) é um tipo de substituição operatória diferente de “ $4 - 2$ ” (realizada no outro membro).

Foi para descrever esse mecanismo de substituição semiótica que Frege (1971/1892) introduziu a sua famosa distinção entre sentido (*Sinn*) e denotação (*Bedeutung*). A ‘denotação’ é a unidade de sentido próprio de uma expressão completa, e ‘sentido’ é a unidade de sentido de uma expressão incompleta. [...]. Em

outras palavras, com expressões incompletas, a denotação resulta de uma operação de designação. Essas são SUBSTITUIÇÕES SEMÂNTICAS). (Duval, 2020, p. 29)

Em relação às designações, também deveremos considerar o fenômeno da não congruência, pois designamos as mesmas relações por meio de registros de representação pertencentes a três sistemas semióticos diferentes (língua natural, linguagem numérica e linguagem algébrica), como no caso do problema que envolve rolhas e garrafas. As diferentes designações (verbal e numérica, redesignação literal, seguida da designação funcional e da dupla designação, até à obtenção da equação que permitirá a solução do problema) fazem com que o fenômeno da não congruência se torne mais ou menos acentuado, conforme a capacidade dos alunos de efetuar os diferentes tipos de designação. As designações dependerão da seleção dos sintagmas nominais. No problema em questão, o peso da rolha e da garrafa, a escolha das letras para designá-los, a utilização dessas letras para a designação funcional já em uma equalização, que caracterizará outro sintagma nominal, além do reconhecimento da dupla designação.

O artigo também ressaltou que pode existir congruência semântica entre o problema e a sentença matemática, inexistindo garantia da equivalência referencial e vice-versa; igualmente, pode não existir congruência semântica, com ou sem equivalência referencial. Muitos exemplos podem ser analisados para apontar os caminhos da organização da prática educativa, buscando entender os sucessos ou fracassos dos alunos na resolução desses problemas à luz do fenômeno da não congruência. As quatro possibilidades entre congruência semântica e equivalência referencial precisam ser reconhecidas nas análises das produções acadêmicas dos alunos.

Em relação à geometria, ressaltamos a existência do fenômeno da não congruência em virtude da apreensão perceptiva que se impõe, que comanda a resolução de um problema e que pode induzir ao erro. A apreensão perceptiva pode ser minimizada por meio da apreensão operatória, ao permitir modificações da figura de diferentes modos: por decomposição (modificação mereológica), por modificação ótica ou por modificação posicional. Esse procedimento não é espontâneo, devendo ser controlado, de modo a contribuir para o enfrentamento do fenômeno da não congruência.

A congruência semântica caracteriza um fenômeno que exige atenção na análise das produções acadêmicas dos alunos, em situações de resolução de problemas ou de tratamentos algébricos, geométricos ou numéricos. Defendemos que o ponto de vista cognitivo deva ser contemplado quando da definição dos objetivos para o ensino da matemática e igualmente na organização das atividades a serem propostas em sala de aula. O ponto de vista cognitivo voltar-se-á para as operações cognitivas específicas do pensamento em matemática. O fenômeno da congruência semântica tem se revelado crucial para compreender o sucesso e o insucesso dos alunos em atividades propostas, na resolução de problemas em diferentes campos do conhecimento matemático.

Notas

¹ No monitor, pode ser que os comprimentos não sejam os mesmos, por conta de distorções, mas impresso em papel pode ser construído sem dúvida alguma.

Referências

- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstrations en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 261–304.
- Brandt, C. F., Moretti, M. T., Scheifer, C., Dionizio, F. A. Q., & Guérios, E. C. (2020). O desenvolvimento do pensamento algébrico: O papel da congruência semântica na elaboração de problemas aditivos por discentes. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(2), 483–510. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p483-510>
- Brasil (2006). *Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa*. MEC/SEESP.
- Capes/Cofecub (1996). *Relatório 174/95: Relatório das atividades referentes ao período de junho de 1995 a agosto de 1996*. Brasília.
- Clark, H. H., & Chase, W. G. (1972). On the process of comparing sentences against pictures. *Cognitive Psychology*, 3, 472–517. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(72\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90019-9)
- Duval, R. (1971). La compréhension du langage mathématique par un enfant de quatrième. In *Colloque inter-IREM - Langage mathématique et formalisation*. Bordeaux, France.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. In J.-P. Drouard, & M. Maurel (Eds.), *Actes des Séminaires Franco-Italien à l'IREM de Nice* (Vol. 4, pp. 67–94). Nice, France.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. (Tradução M. V. Restrepo). Universidad del Valle, Colômbia.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10. Strasbourg : IREM.
- Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. (Tradução Méricles T. Moretti). *Revemat*, 7(1), 118–138. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>
- Duval, R. (2012b). Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. (Tradução Méricles T. Moretti). *Revemat*, 7(1), 97–117. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97>
- Duval, R. (2012c). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. (Tradução Méricles T. Moretti). *Revemat*, 7(1), 118–138.
- Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: Apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? (Tradução Méricles Thadeu Moretti). *Revemat*, 8(1), 1-45. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p1>
- Duval, R. (2020). Escritos simbólicos e operações heterogêneas de substituição de expressões: As condições de compreensão em álgebra elementar (Tradução Méricles Thadeu Moretti). In M. T. Moretti, & C. F. Brandt (Orgs.), *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval* (pp. 21–52). Revemat/Universidade Federal de Santa Catarina. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>
- Frege, G. (1971/1892). *Écrits logiques et philosophiques*. Seul.
- Frege, G. (1978). *Lógica e filosofia da linguagem* (Tradução Paulo Alcoforado). Cultrix & Ed. USP.
- Gomes Filho, J. (2004). *Gestalt do objeto: Sistema de leitura visual*. Escrituras.
- Granger, G. G. (1979). *Langages e épistémologie*. Éditions Klincksieck.
- Guillaume, P. (1979). *La Psychologie de la forme*. Flammarion.
- Rauscher, J.-C. (2020). O caso Jonathan: O complexo de álgebra. In M. T. Moretti, & C. F. Brandt (Orgs.), *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de*

Raymond Duval (pp. 53–83). Revemat/Universidade Federal de Santa Catarina.
<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133–170.