A capacidade de *noticing* do pensamento algébrico dos alunos: um estudo na formação inicial

The noticing skill of children's algebraic thinking: a study in initial teacher education

Joana Cabral
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Portugal
joana.cabral@ese.ips.pt

Fátima Mendes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Portugal
fatima.mendes@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Portugal
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo. A capacidade de *noticing* é fundamental para as práticas do professor, pelo que é importante que a formação (inicial e contínua) promova oportunidades para que os formandos a desenvolvam. Em particular, é essencial que os (futuros) professores desenvolvam a capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos, em domínios matemáticos específicos, como o pensamento algébrico. O presente artigo tem como objetivo compreender o desenvolvimento da capacidade de *noticing* (descrever e interpretar) do pensamento algébrico dos alunos de duas futuras educadoras e professoras dos anos iniciais ao longo de uma experiência de formação. O estudo adota uma metodologia qualitativa e os métodos de recolha de dados foram a observação participante, complementada com gravações áudio e vídeo, e a recolha documental. Os resultados evidenciam que em diversos momentos as formandas atendem a aspetos importantes que lhes permitem *descrever* e *interpretar* o pensamento algébrico dos alunos. Ainda que, de um modo geral, a capacidade de *noticing* das formandas tenha evoluído positivamente ao longo da formação, existem algumas dificuldades na componente *interpretativa*, particularmente, evidenciadas nas suas produções escritas. Estes resultados permitem discutir alguns elementos centrais da formação realizada.

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática
https://doi.org/10.48489/quadrante.27091
Received: April 2022 / Accepted: June 2022

Palavras-chave: noticing; pensamento algébrico; formação inicial de professores; experiência de formação.

Abstract. The noticing skill is an important aspect of the teacher's practice; thus, it is crucial that teacher education promotes opportunities for teachers and preservice teachers to develop it. In particular, it is essential that (preservice) teachers develop the ability to notice children's thinking, in specific mathematical content areas, such as algebraic thinking. The present article aims to understand the development of two preservice teachers' ability to notice (to describe and to interpret) children's algebraic thinking, through a teacher education experiment. The study follows a qualitative methodology and the methods of data collection were participant observation of the course's classes, with audio and video recordings, and the collection of the participants' written productions. The results show that at multiple times the preservice teachers attend to important aspects that allow them to describe and interpret children's algebraic thinking. Although, in general, the preservice teachers' ability of noticing has evolved positively throughout the experiment, some difficulties in the interpretative dimension remained, particularly in preservice teachers' written productions. These results allow us to discuss some central elements of the teacher education experiment.
Keywords: noticing; algebraic thinking; initial teacher education; teacher education experiment.

Introdução

Nos últimos anos, a literatura tem destacado a relevância do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos desde os anos iniciais (Blanton et al., 2011; Oliveira & Mestre, 2014). Em particular, o pensamento relacional e o pensamento funcional, a partir do contexto das sequências, são referidos por diversos autores como domínios privilegiados para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Hunter & Miller, 2022; Mestre, 2014; Pitta-Pantazi et al., 2020).

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos é essencial que estes tenham diversas oportunidades para realizar aprendizagens significativas neste âmbito, e para tal, o professor é uma peça fundamental (Carraher & Schliemann, 2019). Este deverá promover o raciocínio dos seus alunos e ajudá-los a compreender e a fazer conexões entre as várias ideias algébricas (Magiera et al., 2013). De modo a apoiar os alunos para que pensem algebricamente é necessário que os professores compreendam em profundidade o pensamento dos alunos, o que se relaciona diretamente com a capacidade de *noticing*. Esta capacidade tem diferentes caracterizações e particularizações, sendo que, neste estudo, *noticing* centra-se no pensamento dos alunos (Jacobs et al., 2010), que aqui se designa como *noticing* do pensamento dos alunos, e que se caracteriza, a partir de uma adaptação do quadro de Sherin e van Es (2009), como a capacidade de *descrever* e *interpretar* o pensamento dos alunos. A capacidade de *noticing* pode influenciar significativamente as práticas do professor e, consequentemente, ter um efeito positivo nas aprendizagens dos alunos (Ivars et al., 2020; Jacobs et al., 2010), pelo que a investigação tem vindo a destacar a importância de a formação de professores promover oportunidades para o seu desenvolvimento (El Mouhayar, 2019; Jacobs et al., 2018). Em particular, a investigação tem realçado a necessidade de estudos relativamente ao desenvolvimento da capacidade de *noticing* em domínios matemáticos específicos (Jacobs et al., 2010), nomeadamente que ajudem a compreender a forma como os (futuros) professores reconhecem[1] e interpretam o pensamento algébrico dos alunos (El Mouhayar, 2019; Llinares, 2019; Magiera et al., 2013). Apesar destas recomendações e de, internacionalmente, se verificar um grande interesse neste âmbito, a nível nacional são praticamente inexistentes estudos acerca do desenvolvimento da capacidade de *noticing* (Oliveira et al., 2016).

Este artigo enquadra-se numa investigação mais ampla, no âmbito de uma experiência de formação, conduzida pela primeira autora, realizada na formação inicial de professores dos anos iniciais (Cabral, 2021; Cabral et al., 2021). O presente estudo tem como objetivo compreender o desenvolvimento da capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos de duas formandas (futuras educadoras e professoras dos anos iniciais[2]) ao longo de uma experiência de formação. Neste sentido, procuramos responder à seguinte questão de investigação: Como se caracteriza, no decurso da experiência de formação, a capacidade das formandas de *descrever* e *interpretar* o pensamento algébrico dos alunos?

O pensamento algébrico

A investigação tem procurado caracterizar o pensamento algébrico e, em particular, Blanton e Kaput (2004) definem-no como um hábito mental que envolve a "capacidade de construir, justificar e expressar conjeturas sobre estruturas matemáticas e relações" (p. 142). Já para Kieran (2011), o pensamento algébrico é uma capacidade que se centra em: pensar sobre o geral no particular; pensar sobre regras em padrões; pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações numéricas; pensar representacionalmente sobre relações em situações de resolução de problemas; pensar conceptualmente sobre procedimentos; antecipar, conjeturar e justificar; visualizar e exprimir a generalização numa linguagem ou através de gestos. Ainda que muitos outros autores tenham caracterizado o pensamento algébrico, de um modo geral, pode afirmar-se que pensar algebricamente significa generalizar, expressar e justificar relações entre quantidades (Blanton et al., 2011).

Neste sentido, e sendo fundamental que os alunos pensem algebricamente em oposição a centrarem-se apenas em procedimentos (Kaput, 1999), diversos autores têm procurado identificar as áreas fundamentais da álgebra nos anos iniciais que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Blanton et al. (2018) consideram três áreas "(1) aritmética generalizada, (2) equivalência, expressões, equações e inequações e (3) pensamento funcional" (p. 32). A partir destas, e considerando a caracterização de Carpenter et al. (2003), bem como as opções de Mestre (2014), neste estudo são consideradas duas dimensões fundamentais do pensamento algébrico: o pensamento relacional (englobando os pontos 1 e 2 acima mencionados) e o pensamento funcional.

A importância da promoção do pensamento relacional dos alunos decorre da necessidade de repensar a forma como a aritmética é ensinada e aprendida, uma vez que a separação artificial entre este domínio e a álgebra constitui um impedimento para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Carpenter et al., 2003). Deste modo, o pensamento relacional centra-se fortemente numa visão de aritmética generalizada, com foco na generalização das operações aritméticas e das suas propriedades e num olhar sobre a estrutura das relações ariméticas (Pitta-Pantazi et al., 2020). Para o desenvolvimento do pensamento relacional, é essencial que as igualdades sejam percecionadas como uma equivalência entre expressões numéricas e que o sinal de igual assuma um significado relacional (Blanton et al., 2018; Mestre, 2014; Pitta-Pantazi et al., 2020). Deste modo, torna-se essencial que os alunos percecionem o equilíbrio numérico das igualdades (Kieran, 2007), nomeadamente através de uma compreensão profunda das propriedades fundamentais das operações (Mestre, 2014).

O pensamento funcional, que deve ser promovido desde os anos iniciais (Blanton et al., 2018; Oliveira & Mestre, 2014), incide sobre aspetos chave como a generalização e o recurso a diferentes representações, sendo que Blanton et al. (2018) consideram que pensar funcionalmente "inclui generalizar relações entre quantidades covariantes e representar, justificar e raciocinar sobre estas generalizações em linguagem natural, símbolos, desenhos, tabelas ou gráficos" (p. 33). Como contexto para o desenvolvimento do pensamento funcional, em particular nos anos iniciais, a investigação tem destacado a importância da exploração de sequências (Hunter & Miller, 2022; Oliveira & Mestre, 2014; Radford, 2014). De um modo geral, as sequências habitualmente exploradas desde o ensino pré-escolar até ao 2.º Ciclo de Ensino Básico (CEB) são de dois tipos: de repetição ou de crescimento de primeiro grau. As sequências de repetição são constituídas por um conjunto de termos que se repete ciclicamente, sendo esse conjunto designado por unidade de repetição. Este tipo de sequência, muito comum no âmbito da educação de infância e nos primeiros anos do ensino básico (Clements & Sarama, 2009) e com particular destaque nas novas Aprendizagens Essenciais de Matemática do 1.º CEB (Canavarro et al., 2021) pode ter um papel fulcral como veículo para a descoberta de regularidades e desenvolvimento da capacidade de generalização (Clements & Sarama, 2009; Hunter & Miller, 2022). As sequências de crescimento podem ser representadas pictórica ou numericamente (Ponte et al., 2009) e são caracterizadas pela relação entre os seus termos que, no caso das sequências de primeiro grau, aumentam ou diminuem com uma diferença constante (Hunter & Miller, 2022). Estas sequências, no âmbito do ensino básico, são particularmente importantes para a aprendizagem da linguagem alfanumérica e a compreensão da linguagem simbólica, como representação de diferentes variáveis numa relação funcional (Hunter & Miller, 2022; Mestre, 2014; Radford, 2014).

A capacidade de *noticing* do professor

A investigação tem procurado compreender como é que os professores atendem a diversas situações envolvendo o processo de ensino e aprendizagem e tomam decisões no contexto da sua prática letiva, tendo, nos últimos anos, surgido um grande fluxo de estudos centrados na capacidade de *noticing* do professor (Callejo & Zapatera, 2017; Jacobs et al., 2010; Melhuish et al., 2020). Ainda que a caracterização desta capacidade possa variar de estudo para estudo, parece existir um entendimento geral que esta envolve duas componentes essenciais: i) atender a eventos particulares de sala de aula, isto é, para que o professor seja eficiente a gerir a complexidade da sala de aula, é necessário que preste atenção a algumas situações excluindo outras; e ii) dar sentido a estes eventos interpretando os episódios e caracterizando-os em termos do processo de ensino-aprendizagem (Sherin et al., 2011). Embora esta capacidade seja relevante em diversos aspetos do processo de ensino-aprendizagem, vários autores (Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019) focaram a sua atenção num aspeto particular da capacidade de *noticing* do professor que diz respeito ao pensamento das crianças, aqui designada como *noticing* do pensamento dos alunos. De acordo com Jacobs et al. (2010), o *noticing* do pensamento dos alunos caracteriza-se como a capacidade cognitiva de identificar e interpretar os aspetos salientes da atividade dos alunos para que desta forma possa tomar decisões conscientes. Mais recentemente, e partindo do quadro teórico de Jacobs et al. (2010), Melhuish et al. (2020), dando particular importância à interpretação, consideram que a capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos remete para três componentes: *descrever*, em que o professor refere o discurso ou alguma observação feita pelos alunos sem explicar ou fazer inferências; *interpretar* que se refere a fazer inferências acerca da forma ou do conteúdo (ou ambos) presentes no discurso do aluno; e *responder*, em que o professor sugere alterações baseando-se naquilo que descreveu e interpretou. Deste modo, a capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos implica que o professor determine de que forma as respostas dos alunos são, ou não, significativas no contexto matemático e como podem influenciar a compreensão destes acerca dos conceitos (El Mouhayar, 2019).

A capacidade de *noticing* é bastante importante para as práticas do professor, mas não lhe é inata (Jacobs et al., 2018) e, muitas vezes, tanto futuros professores como professores em serviço têm dificuldades neste âmbito (El Mouhayar, 2019; Jacobs et al., 2010; Melhuish, 2020). Ainda que esta capacidade possa demorar muito tempo a ser plenamente atingida, a investigação tem vindo a defender a ideia de que, envolvendo os (futuros) professores em experiências com esse objetivo e com o suporte adequado, é possível desenvolvê-la (Jacobs et al., 2018), inclusive na formação inicial (Ivars et al., 2020; Jacobs et al., 2010). Para que os (futuros) professores possam desenvolver esta capacidade, é necessário o contacto, direto ou indireto, com o contexto educacional e, em particular, para o desenvolvimento da capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos, é essencial que contactem com exemplos do trabalho dos alunos, através de resoluções escritas e de vídeos de sala de aula (Callejo & Zapatera, 2017; Rodrigues et al., 2019).

Ainda que diversos estudos apresentem resultados positivos no que se refere à evolução da capacidade de *noticing* de (futuros) professores, são apontadas diversas dificuldades, em especial no que se refere à componente interpretativa, evidenciando a complexidade do seu desenvolvimento. Warshauer et al. (2021) destacam os contributos da análise de vídeos, para o desenvolvimento desta capacidade, em particular para que os formandos se tornem mais conscientes das dificuldades dos alunos sem, no entanto, existirem evidências de melhoria na interpretação das dificuldades dos alunos. O estudo de Ivars et al. (2020) mostra que alguns dos futuros professores participantes tiveram dificuldades em evidenciar aspetos das resoluções dos alunos que suportassem as suas interpretações. Os autores consideram, no entanto, que o facto de os formandos não referirem determinados aspetos não pode ser visto como evidência de que não atenderam aos mesmos. Melhuish et al. (2020), num estudo com professores em serviço, destacam também a complexidade da análise do pensamento dos alunos, referindo dificuldades na interpretação, nomeadamente o facto de aqueles focarem a sua atenção em aspetos superficiais e genéricos, não atendendo a elementos específicos que permitiriam interpretar o pensamento dos alunos de um modo mais eficaz.

Diversos autores têm focado a sua atenção no desenvolvimento da capacidade de *noticing* em domínios matemáticos específicos, como a álgebra e o pensamento algébrico, em particular (Llinares, 2019; Magiera et al., 2013; Rodrigues et al., 2019). O estudo de Magiera et al. (2013) evidencia que os participantes revelaram bastantes limitações em reconhecer e interpretar o pensamento algébrico dos alunos em situações de entrevista. Os estudos de Callejo e Zapatera (2017), Llinares (2019) e Rodrigues et al., (2019) focaram-se, no que se refere ao objeto matemático, nas sequências de crescimento e, em particular, na sua generalização. De um modo geral, os resultados destes estudos indicam uma maior facilidade na identificação de aspetos associados ao pensamento dos alunos no que na sua interpretação. Callejo e Zapatera (2017) explicam esta diferença pelo facto de que caracterizar a compreensão dos alunos é um processo mais exigente do ponto de vista cognitivo comparativamente ao processo de descrever as respostas dos mesmos. Estes autores destacam ainda a existência de uma forte relação entre a identificação e a interpretação dado que os futuros professores participantes que identificaram mais elementos nas respostas dos alunos analisadas, realizaram também interpretações mais profundas do seu conhecimento e compreensão. Também Llinares (2019) conclui que identificar os aspetos matemáticos significativos no âmbito da generalização de sequências é menos complexo do que interpretar o pensamento dos alunos, destacando que a interpretação depende da identificação. No estudo realizado por Rodrigues et al. (2019) são identificadas dificuldades na interpretação do pensamento algébrico dos alunos a partir de um caso multimédia, realçando, no entanto, que ainda que numa fase inicial da intervenção os comentários dos formandos fossem bastante genéricos, progressivamente, estes foram realizando análises mais profundas do pensamento algébrico dos alunos.

Contexto e metodologia do estudo

O presente estudo foi desenvolvido no âmbito de uma experiência de formação, numa unidade curricular (UC) de formação na área de docência – Padrões e Álgebra – do 3.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica. A experiência de formação, em que a primeira autora assumiu o papel de investigadora e formadora, teve como principal objetivo a promoção simultânea do pensamento algébrico das formandas e da sua capacidade de *noticing*, tendo a duração de 11 aulas. De um modo geral, cada tarefa de formação relativa à capacidade de *noticing* foi antecedida por uma tarefa focada no conhecimento matemático, designada de tarefa de conhecimento matemático, com um contexto e conteúdo semelhante ao que os alunos dos primeiros anos realizaram e que foi alvo de análise por parte das formandas. As tarefas de conhecimento matemático incidiram sobre os domínios de pensamento relacional e pensamento funcional, no âmbito das sequências de repetição e de crescimento. As tarefas de formação de *noticing* fomentam a análise de resoluções escritas de crianças, por vezes acompanhadas de transcrições de excertos de episódios de sala de aula e de vídeos de momentos de trabalho autónomo e de discussões coletivas, sendo estes recursos construídos ou adaptados especificamente para este estudo. As aulas da experiência de formação seguiram uma prática de ensino exploratório (Rodrigues et al., 2018), tendo sido grande parte das tarefas realizadas a pares.

Este estudo assume uma metodologia qualitativa (Creswell, 2012) e tem como participantes um par de formandas: Anabela e Bianca. No momento da experiência de formação, as formandas tinham cerca de 20 anos de idade e, previamente à Licenciatura, tinham frequentado, com sucesso, a disciplina de Matemática A, no Ensino Secundário. Este par foi selecionado a partir de uma turma de 20 formandas, do género feminino, tendo em conta a sua experiência matemática prévia à Licenciatura, o desempenho numa tarefa de diagnóstico, a disponibilidade em participar no estudo e a assiduidade às aulas da experiência de formação. Os métodos de recolha de dados foram a observação participante das aulas da UC, complementada com registo áudio e vídeo, e a recolha documental das produções das formandas.

No âmbito deste artigo selecionámos para análise as produções do par relativas a três tarefas, tarefa de formação 1 – "Ramos de flores" (TF1), tarefa de formação 2 – "Sequências com figuras infantis – Parte 2" (TF2) e tarefa de formação 3 – "Os colares II – Parte 2" (TF3), realizadas em diferentes momentos da experiência de formação e com diferentes focos no que respeita ao pensamento algébrico. A TF1 (Anexo 1), relativa ao domínio do pensamento relacional, foi a primeira tarefa de formação de *noticing* do pensamento dos alunos realizada pelas formandas. A TF2 (Anexo 1) tem como foco matemático o pensamento funcional no contexto das sequências de repetição. Esta tarefa, realizada numa fase intermédia da experiência de formação, foi a primeira de análise do pensamento funcional dos alunos, tendo sido precedida por outras tarefas de *noticing* do pensamento relacional dos alunos e de discussões coletivas com foco no desenvolvimento desta capacidade. A TF3 (Anexo 1) apresenta como contexto para o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos uma sequência de crescimento, tendo sido realizada na fase final da experiência de formação.

O quadro de análise do presente artigo foca-se nas dimensões de *descrever* e *interpretar* o pensamento dos alunos. *Descrever* remete para a identificação dos aspetos matemáticos relevantes presentes nas resoluções e ou intervenções dos alunos e nas suas estratégias (Jacobs et al., 2010). Esta dimensão está associada ao reconhecimento dos elementos matemáticos nas produções e ou intervenções dos alunos, ao recontar e à explicação dos aspetos que despertam a atenção às formandas (Estapa et al., 2018). No que respeita à análise desta dimensão incluem-se também os comentários das formandas sobre a correção ou incorreção das respostas dos alunos (van Es et al., 2017). *Interpretar* corresponde ao modo como as formandas raciocinam acerca dos elementos que descreveram (Sherin & van Es, 2009), esperando-se que olhem para além do que foi escrito ou dito pelos alunos (Jacobs et al., 2010). A explicação dos procedimentos usados, os motivos pelos quais uma resposta está correta ou incorreta e inferências relacionadas com a origem dos erros ou dificuldades (Ivars et al., 2020) são aspetos relevantes desta dimensão. Em particular, no caso deste estudo, *interpretar* implica também relacionar estes aspetos com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Alguns autores consideram uma terceira dimensão relacionada com as decisões e ou resposta dos (futuros) professores a partir do que percecionam; contudo, neste estudo, dado que a experiência de formação decorreu numa UC de conteúdo matemático e não de didática, assumem-se apenas estas duas dimensões da capacidade de *noticing.*

Resultados

Pensamento relacional

A TF1 foi a primeira dedicada à capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos realizada pelas formandas e com o foco específico na análise do pensamento relacional de alunos do

1.º ano do 1.º CEB. Nesta tarefa de formação, Anabela e Bianca analisam as resoluções e intervenções em vídeo de quatro alunos, Guilherme, Matilde, Rafael e Sara, em que estes avaliam o valor lógico da igualdade "8+5+9=5+8+9".

O par de formandas não indica explicitamente a correção ou incorreção das respostas dos alunos, possivelmente por considerarem que todas as resoluções estão corretas. As formandas começam a sua análise, na produção escrita (PE), indicando de que modo julgam que cada aluno terá procedido na resolução (dimensão descritiva), referindo que "Rafael realizou as adições . . . Matilde descreveu a quantidade de flores . . . Guilherme recorreu a um esquema para resolver o problema" (PE).

Em seguida, as formandas verbalizam as suas opiniões relativamente ao desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos (dimensão interpretativa). O par compara as resoluções com foco no modo como os alunos se expressam e parece assumir que, em todas as resoluções, os alunos dão evidência de pensamento relacional, uma vez que o sinal de igual é sempre por estes interpretado numa perspetiva de que ambos os membros separados por este símbolo representam o mesmo número. Consideram que Guilherme "possui um pensamento relacional menos desenvolvido uma vez que ainda recorre a desenhos para esquematizar o seu pensamento para chegar ao resultado" (PE). Em contrapartida Rafael é, na opinião das formandas, o aluno com um nível de pensamento relacional mais avançado pois "apesar de realizar as operações, apercebe-se que se trata de uma igualdade dado os valores obtidos serem iguais" (PE). Relativamente a Matilde consideram que esta possui um nível de pensamento relacional intermédio, em relação aos colegas, já que, como referem na sua produção escrita, esta "tem que fazer a descrição do problema para chegar à resolução" (PE). Embora não o explicitem, nos casos das resoluções de Guilherme e Matilde, as formandas parecem considerar que estes dois alunos têm mais dificuldade em identificar o valor lógico da igualdade do que Rafael, uma vez que estão mais focados no contexto, referindo as cores das flores e não considerando o valor total. As formandas aparentam assim atender essencialmente às representações utilizadas pelos alunos, valorizando o recurso a representações formais, e usar essa informação para comparar o nível de pensamento relacional dos alunos.

As formandas analisam também um vídeo da discussão coletiva (Anexo 2) relativa a esta tarefa em que Rafael e Sara apresentam as suas resoluções à turma. Anabela e Bianca categorizam as intervenções dos alunos tendo em conta o facto de estes evidenciarem, ou não, a necessidade de realizar o cálculo do valor de cada um dos membros da igualdade para apurar se esta se verifica. O par reconhece que, ao contrário de Sara, inicialmente, Rafael assume a necessidade da realização dos cálculos. Atendem ainda ao facto de Rafael alterar a sua opinião quando tem oportunidade de expressar o seu raciocínio, acabando por identificar a existência de um número que mantém a posição nos dois membros, enquanto os outros dois "trocam de lugar". As formandas assumem que o aluno "reconhece a propriedade comutativa através da troca de parcelas" (PE) registando-o. Deste modo, Anabela e Bianca concluem que ambos os alunos identificam a validade da igualdade sem necessitar de realizar cálculos, mas que Rafael possui um pensamento relacional mais desenvolvido que Sara pois, como referem, na discussão entre o par (DP), enquanto a aluna:

> só identifica que estão lá os mesmos números, . . . ele já está a falar em parcelas . . . diz que podia não ser (uma igualdade) pode estar a pensar na subtração. Se calhar associou que com outro sinal podia não funcionar" (DP – Bianca).

Sendo esta a primeira tarefa de formação de *noticing* do pensamento dos alunos, o par evidencia algumas dificuldades em compreender a que aspetos devem atender em cada uma das questões que lhes é colocada, como referido por Bianca: "acho que na 1.1. estamos a fazer o 1.2" (DP – Bianca), acabando por unir as duas questões numa única resposta. Quando confrontadas com o discurso dos alunos no vídeo, o par aprofunda a sua análise, deixando de atender apenas a elementos mais gerais, o que parece ser uma evidência de que contactar diretamente com o que os alunos dizem pode apoiar o desenvolvimento da capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos das futuras educadoras e professoras.

Pensamento funcional: sequências de repetição

A TF2, realizada numa fase intermédia da experiência de formação, apresenta um conjunto de vídeos de crianças em contexto de educação de infância em que as mesmas exploram sequências de repetição. As questões colocadas às crianças incidem sobre a identificação da unidade de repetição das várias sequências apresentadas e a determinação de alguns termos.

As formandas analisam as intervenções das crianças no vídeo "Descobre a unidade" (Anexo 2), reconhecendo que o sucesso na identificação da unidade de repetição está fortemente relacionado com as características da mesma. Anabela e Bianca compreendem que as crianças identificam facilmente unidades de repetição de tipo AB e ABC (Figura 1).

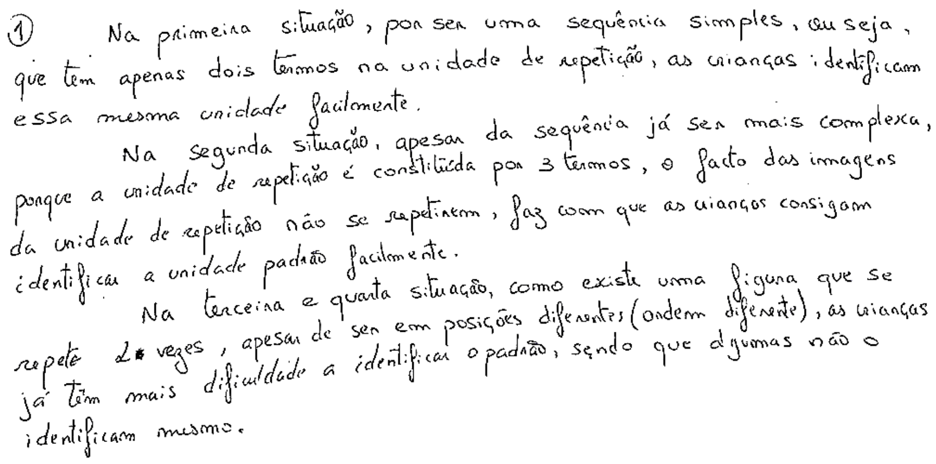

① Na primeira situação, por ser uma sequência simples, ou seja, que tem apenas dois termos na unidade de repetição, as crianças identificam essa mesma unidade facilmente.
Na segunda situação, apesar da sequência já ser mais complexa, porque a unidade de repetição é constituída por 3 termos, o facto das imagens da unidade de repetição não se repetirem, faz com que as crianças consigam identificar a unidade padrão facilmente.
Na terceira e quarta situação, como existe uma figura que se repete 2 vezes, apesar de ser em posições diferentes (ordem diferente), as crianças já têm mais dificuldade a identificar o padrão, sendo que algumas não o identificam mesmo.

Figura 1. Resolução de Anabela e Bianca da TF2 – Q1

O par reconhece também que as crianças têm dificuldades em identificar unidades de repetição de tipo ABA, não pelo seu comprimento, mas pela sua posição, como é referido por Bianca na discussão entre o par: "as dificuldades não é só pelo tamanho e não é por as figuras serem as mesmas, é por não estarem seguidas" (DP – Bianca). A produção escrita das formandas e o diálogo entre o par permitem concluir que estas atendem a elementos essenciais da intervenção das crianças e que procuram identificar as dificuldades das mesmas. No entanto, a análise realizada pelo par tem algumas limitações, nomeadamente, a não identificação como possível dificuldade das crianças o facto de o último termo de uma unidade de repetição ser igual ao primeiro da unidade de repetição seguinte. Além disso, não fazem inferências acerca do discurso das crianças quando estas procuram identificar a unidade de repetição nem atendem a aspetos não verbais, por exemplo, quando uma das crianças "separa" corretamente as duas unidades de repetição, embora não o verbalize.

As formandas recorrem também à identificação da unidade de repetição por parte das crianças para justificar de que modo estas determinam termos de algumas sequências de repetição (no vídeo "O que vem a seguir" – Anexo 2). Relativamente à primeira e terceira situações apresentadas, as formandas, na sua produção escrita, referem-se essencialmente ao conhecimento das crianças da unidade de repetição: "na situação 1 chegaram ao resultado através da repetição da unidade de repetição . . . na situação 3 . . . chegam ao resultado através da unidade de repetição" (PE).

Quando lhes é solicitada uma análise sobre as aprendizagens das crianças no âmbito das sequências de repetição, Anabela e Bianca acabam por recontar o que o grupo faz como evidencia a sua produção escrita acerca das situações 1 e 3 (Figura 2):

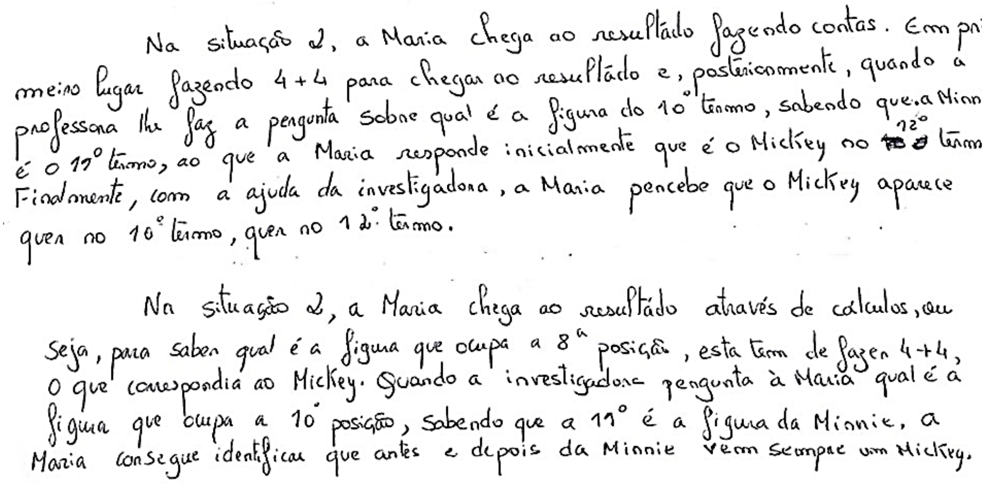
Na situação 1, as crianças revelam que conhecem e sabem o que
é uma unidade de repetição, uma vez que para chegarem ao resultado repetem
sempre a unidade de repetição (Minnie; Mickey).

Na situação 3, o grupo de crianças trabalha as questões propostas pela
educadora / investigadora através da unidade de repetição, ou seja, quando a profess
pergunta qual é a figura que ocupa a 8ª posição, a Isabel e a Inês dizem que
é o pluto, sendo que quando lhes é pedido para justificar o porquê, a Isabel justif
dizendo que a 8ª posição ia ser o pluto porque a 7ª era um Mickey.
(A unidade de repetição é Mickey; Pluto, Minnie).

Figura 2. Resolução de Anabela e Bianca da TF2 – Q2

A análise escrita das formandas acaba por centrar-se essencialmente em elementos descritivos, não evidenciando o estabelecimento de relações entre a intervenção das crianças e o seu conhecimento neste âmbito. Já o diálogo entre o par apresenta elementos que remetem para a interpretação do pensamento dos alunos, como as afirmações: "[na situação 1] eu acho que é pela repetição, porque eles estão sempre a dizer "Minnie, Mickey, Minnie, Mickey”” e “[na situação 3] acho que conseguem perceber que na unidade de repetição a segunda figura é sempre o Pluto” (DP – Bianca). Estes excertos evidenciam a compreensão de que o modo como as crianças determinaram os termos em cada uma das situações foi diferente: no primeiro caso, através de uma abordagem rítmica e no terceiro, através da perceção de uma relação entre os termos da sequência e, em particular, da igualdade entre um determinado termo e um dos três primeiros. Embora as formandas não façam uma comparação entre os dois casos, o seu discurso parece indiciar que reconhecem um tipo de raciocínio diferente nas crianças da terceira situação.

Também na análise da situação 2, em que consideram que Maria pensa de um modo mais abstrato do que as restantes crianças, as formandas centram a sua produção escrita (Figura 3) em aspetos descritivos, recontando a intervenção da criança.



Na situação 2, a Maria chega ao resultado fazendo contas. Em primeiro lugar fazendo 4 + 4 para chegar ao resultado e, posteriormente, quando a professora lhe faz a pergunta sobre qual é a figura do 10º termo, sabendo que a Minnie é o 11º termo, ao que a Maria responde inicialmente que é o Mickey no 12º termo. Finalmente, com a ajuda da investigadora, a Maria percebe que o Mickey aparece quer no 10º termo, quer no 12º termo.

Na situação 2, a Maria chega ao resultado através de calculos, ou seja, para saber qual é a figura que ocupa a 8ª posição, esta tem de fazer 4+4, o que correspondia ao Mickey. Quando a investigadora pergunta à Maria qual é a figura que ocupa a 10º posição, sabendo que a 11º é a figura da Minnie, a Maria consegue identificar que antes e depois da Minnie vem sempre um Mickey.

Figura 3. Resolução de Anabela e Bianca da TF2 – Q2

No entanto, à semelhança da análise das situações anteriores, o diálogo entre as formandas mostra que estas atendem a elementos importantes da intervenção da Maria e procuram interpretar o seu pensamento, como evidenciado no excerto seguinte:

Bianca:	Parece que ela percebe o padrão em si.
Anabela:	Ela percebe que é Minnie, Mickey, Minnie, Mickey . . .
Bianca:	Que a seguir à Minnie vem o Mickey e que a seguir ao Mickey vem a Minnie, ou seja, podemos dizer que ela conhece o padrão.

Juntamente com o que o par escreveu “Maria consegue identificar que antes e depois da Minnie vem sempre um Mickey” (PE), este diálogo permite inferir que assumem que a criança identifica a estrutura da sequência, reconhece regularidades gerais e a comunalidade entre casos e generaliza para qualquer termo.

No vídeo “Qual o padrão?” (Anexo 2), as formandas inferem que a sequência apresentada tem comprimento 6, e a partir desta inferência assumem que as ações das crianças são consequência da sua dificuldade em identificar o comprimento da unidade de repetição (Figura 4).

4

O grupo de crianças refere que não se trata de um padrão porque, quando fazem a sequência sonora percebem que uma das figuras não se ~~está~~ encontra na posição correta, porque não são capazes de reconhecer a unidade de repetição com 6 termos, mas apenas com 3 termos.

Figura 4. Resolução de Anabela e Bianca da TF2 – Q4

O par identifica a estratégia utilizada pelas crianças, abordagem rítmica, mas consideram que as mesmas assumem que o padrão está errado uma vez que não conseguem identificar uma unidade de repetição com seis termos. Possivelmente por estarem condicionadas pela própria perceção da sequência, centram a sua análise nas aparentes dificuldades das crianças em identificar unidades de repetição com comprimento maior do que três, acabando por não atender a aspetos fundamentais deste episódio, como o facto de as crianças verbalizarem o reconhecimento de regularidades relativamente à posição das figuras na unidade de repetição.

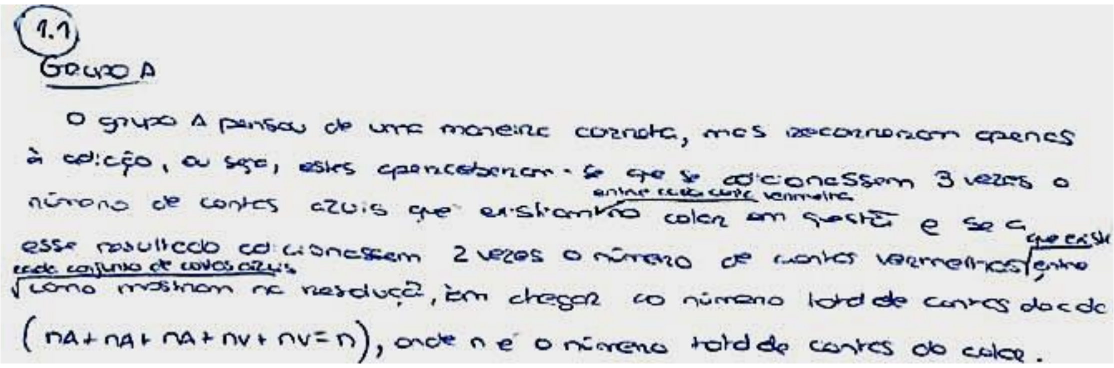
Na análise do pensamento algébrico das crianças no âmbito das sequências de repetição, o par faz referências concretas ao modo como as crianças identificam a estrutura das sequências apresentadas e determinam os termos solicitados (dimensão descritiva) e procura explicar como as crianças terão pensado (dimensão interpretativa). No entanto, em diversos momentos, a dimensão interpretativa na sua produção escrita é pouco aprofundada, o que pode evidenciar alguma falta de compreensão dos aspetos essenciais a referir quando se analisa o pensamento dos alunos.

Pensamento funcional: sequências de crescimento

A TF3 apresenta as resoluções de alunos do 4.º ano do 1.º CEB, organizados em grupo, relativamente à determinação do termo geral de uma sequência e um vídeo de sala de aula em que um aluno apresenta a regra que permite calcular o número do colar a partir do número total de contas.

As formandas começam por analisar as produções escritas e explicações de cada grupo, referindo a sua correção ou incorreção: "O grupo A pensou de maneira correta", "O grupo B pensou de maneira correta", "Consideramos que o grupo C não respondeu corretamente à questão" (PE).

No caso do grupo A, a produção escrita das formandas permite inferir que associam a correção da resposta dos alunos ao modo como eles reconhecem a estrutura da sequência. Ainda que por escrito não façam referência ao estabelecimento da relação entre as variáveis por parte dos alunos deste grupo, na discussão entre o par, Anabela refere: "isso está mal, o número de azuis total não vais multiplicar, vais multiplicar é cada parte de azuis por três" (DP – Anabela). Assim, reconhece, implicitamente, que a regra escrita dos alunos não é adequada para expressar uma relação entre o número do colar e o número de contas azuis. A análise escrita acerca da resolução deste grupo acaba por se centrar em aspetos descritivos, recontando o modo como os alunos determinaram a regra, que inclusivamente replicam na sua produção escrita (Figura 5).


1.1
Grupo A

O grupo A pensou de uma maneira correta, mas recorreram apenas à adição, ou seja, estes aperceberam-se que se adicionassem 3 vezes o número de contas azuis que existem entre cada conta vermelha no colar em questão e se a esse resultado adicionassem 2 vezes o número de contas vermelhas que existe entre cada conjunto de contas azuis como mostram na resolução, iam chegar ao número total de contas do colar ($nA+nA+nA+nV+nV=n$), onde n é o número total de contas do colar.

Figura 5. Resolução de Anabela e Bianca da TF3 – P2A: Q1.1

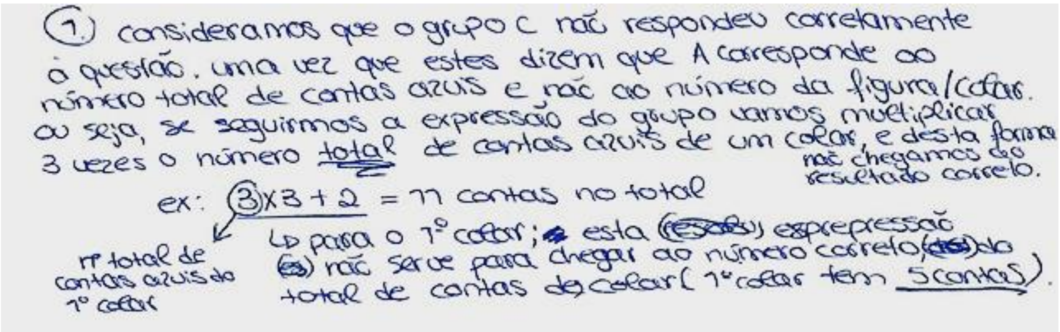
As formandas focam-se na operação usada para obter o número total de contas do colar, afirmando: "[os alunos] recorrem apenas à adição . . . iam chegar ao número total de contas do colar" (PE). Ainda que a análise escrita não evidencie elementos relativamente à incongruência entre a regra escrita e aquilo que o grupo explica oralmente, a discussão entre Anabela e Bianca permite afirmar que reconhecem que algo não está totalmente correto na regra apresentada:

> Depois quando eles falam da regra estão a explicar para os outros [colegas] . . . podemos dizer que eles pensaram bem, mas que quando foi a parte de passar para a escrita . . . pronto puseram completamente o pé na poça" (DP – Bianca).

Apesar de não fazerem afirmações concretas, parecem reconhecer que os alunos têm dificuldades em transpor para linguagem simbólica o que referiram em linguagem natural, ou seja, as formandas atendem a aspetos relevantes para a interpretação do pensamento dos alunos.

No que respeita ao grupo B, a produção escrita das formandas incluiu elementos relativos à relação estabelecida entre o número do colar e o número de contas azuis: "perceberam que se multiplicassem o número do colar por 3 . . . e a este adicionassem duas contas vermelhas, chegavam ao número de contas total do colar em questão" (PE), evidenciando que atendem ao facto de os alunos reconhecerem, como uma correspondência, a relação entre as variáveis.

Relativamente ao grupo C, as formandas começam por indicar que a resolução está incorreta, atribuindo a incorreção ao facto de os alunos não explicitarem de forma rigorosa a relação entre o número do colar e o número de contas azuis. As formandas acabam por não fazer ilações sobre o modo como os alunos poderão ter pensado, mas procuram justificar o facto de considerarem a resposta destes incorreta, determinando o primeiro termo da sequência a partir da regra apresentada pelo grupo, ou seja, recorrendo a um contraexemplo para comprovar as suas inferências (Figura 6).


1) consideramos que o grupo C não respondeu corretamente à questão. uma vez que estes dizem que A corresponde ao número total de contas azuis e não ao número da figura/colar. ou seja, se seguirmos a expressão do grupo vamos multiplicar 3 vezes o número total de contas azuis de um colar, e desta forma não chegamos ao resultado correto.

ex: 3 x 3 + 2 = 11 contas no total

nº total de contas azuis do 1º colar

para o 1º colar; esta expressão não serve para chegar ao número correto do total de contas do colar (1º colar tem 5 contas).

Figura 6. Resolução de Anabela e Bianca da TF3 – P2B: Q1

As formandas assumem que a incorreção na nomeação da variável A se pode dever a um engano, como expresso no diálogo seguinte:

Bianca:	Eles têm o pensamento algébrico desenvolvido simplesmente; se enganaram a dizer o que era o *A*, não?
Anabela:	Eles chegam à regra certa, eu acho que eles só se enganaram a escrever esta coisa [nomear *A*], eu acho que eles têm o pensamento desenvolvido.
Bianca:	É isso, eles pensaram bem, não souberam identificar o *A*.

Deste modo, consideram que os alunos "pensaram bem" (DP-Bianca) e que "têm o pensamento desenvolvido" (DP – Anabela). Esta consideração acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos parece remeter para o uso de linguagem simbólica, sendo que na sua produção escrita referem: "achamos que o grupo tem um pensamento algébrico desenvolvido pois já consegue utilizar uma linguagem simbólica e consegue generalizar" (PE). Na discussão entre o par, as formandas fazem ainda referência ao facto de os alunos não usarem n como variável independente: "Eles já usam uma linguagem simbólica, eles usam outras letras, mas isso não faz mal porque o n não é obrigatório usar. Eles usam simbólica que é mais desenvolvida que a sincopada" (DP – Bianca). As formandas evidenciam, deste modo, associar as representações utilizadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico e entender que os alunos recorrem a letras que se relacionam com o contexto, mas que isso nada interfere no tipo de linguagem utilizada na generalização. Também no caso dos grupos A e B, o foco das formandas para a comparação do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos é essencialmente a linguagem em que apresentam o termo geral, bem como as operações utilizadas para determinar o número total de contas. As formandas referem que "o grupo B apresenta um maior desenvolvimento do pensamento algébrico uma vez que ao contrário do grupo A que só recorre à adição para chegar ao resultado, estes conseguiram generalizar usando linguagem simbólica" (PE). O par mostra associar o facto de o termo geral do grupo B estar mais simplificado (e mais próximo da forma canónica) a um pensamento algébrico mais desenvolvido e parece valorizar o recurso a representações que considera mais sofisticadas.

Na análise do vídeo relativo à intervenção de um aluno na discussão coletiva (Anexo 2), Anabela e Bianca procuram fazer inferências a partir do que este diz e escreve. O par parece surpreso com as capacidades evidenciadas pelo aluno, como refere Bianca: "Bem, no quarto ano, ele é *super* inteligente" (DP – Bianca). O diálogo entre as formandas permite inferir que estas reconhecem que João pensou inversamente a relação estabelecida entre o número do colar e o número total de contas:

> Bianca: Ele conseguiu, a partir das bolas azuis chegar ao número da figura, ele conseguiu inverter o pensamento . . . a expressão inversa. Ele consegue chegar ao número do colar, era para chegar ao número do colar, sabendo apenas o número total de contas, a partir da expressão.

A discussão entre o par revela que as formandas estão convictas de que o aluno determina o número da figura a partir do número total de contas, ainda que este não faça qualquer referência à variável independente, mas sim ao número de contas azuis em cada grupo. O par assume também que o aluno inverteu a expressão que utilizou para determinar o número total de contas, apesar deste nunca fazer referência a essa expressão. A partir desta inferência, as formandas apresentam, na sua produção escrita (Figura 7), uma regra, em linguagem sincopada, que representa a relação que o aluno terá pensado.

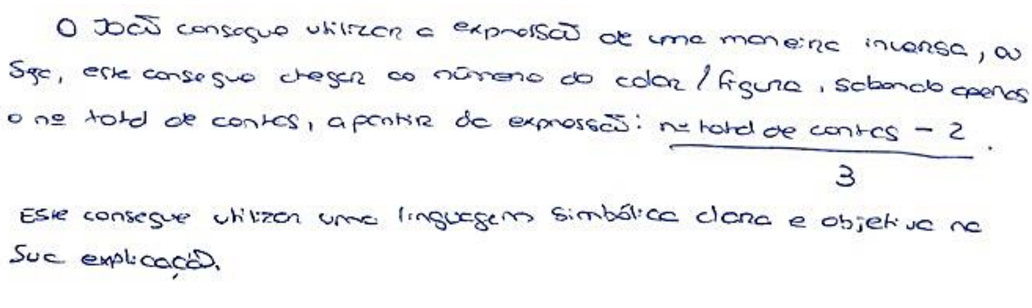

O João consegue utilizar a expressão de uma maneira inversa, ou seja, este consegue chegar ao número do colar / figura, sabendo apenas o nº total de contas, a partir da expressão: $\frac{\text{nº total de contas} - 2}{3}$.
Este consegue utilizar uma linguagem simbólica clara e objetiva na sua explicação.

Figura 7. Resolução de Anabela e Bianca da TF3 – P2C

As formandas centram a sua análise na linguagem utilizada pelo aluno, com dois focos: o modo como este se exprime oralmente quando fala com os colegas ("clara e objetiva") e a linguagem, como forma de representação matemática (linguagem simbólica). O comentário relativo à linguagem "clara e objetiva" evidencia atenção ao vídeo e à intervenção do aluno, mas também remete para uma análise focada em aspetos genéricos. Ainda que o par reconheça que João se expressou adequadamente, a sua análise não contempla afirmações sobre aspetos matemáticos relevantes desta intervenção, como as letras utilizadas pelo aluno e o modo como este separa, em duas igualdades, a relação percecionada.

Na análise realizada no âmbito desta tarefa de formação, o par refere a correção ou incorreção das resoluções escritas (dimensão descritiva), tendo em conta os aspetos que consideram mais relevantes para tal. Anabela e Bianca referem elementos importantes relativos à abordagem dos alunos acerca da estrutura da sequência e da identificação das variáveis e que procuram explicar (dimensão interpretativa). As formandas percecionam relações estabelecidas pelos alunos, por vezes de forma implícita, como no caso do vídeo, o que evidencia que procuram estender a sua análise para lá do que os alunos dizem ou escrevem. O par foca-se bastante no uso de diferentes representações por parte dos alunos, associando o recurso à linguagem alfanumérica a um nível de pensamento mais desenvolvido. Apesar de ser notório, especialmente a partir do diálogo entre o par, que reconhecem elementos importantes das resoluções e ou intervenções, procurando justificar os motivos que estão na base de certas incongruências e inferir o modo como os alunos terão pensado, a sua produção escrita apresenta algumas limitações na dimensão interpretativa.

Conclusões

No presente artigo procuramos compreender o desenvolvimento da capacidade de *noticing (descrever* e *interpretar)* do pensamento algébrico dos alunos de um par de futuras educadoras e professoras dos anos iniciais. Quando comparando as análises realizadas pelas formandas relativamente ao pensamento algébrico dos alunos nas várias fases da experiência de formação são notórias diferenças que apontam para alguma evolução da sua capacidade de *noticing*. Este facto corrobora os resultados de diversos estudos (Ivars et al., 2020; Jacobs et al., 2010; Rodrigues et al., 2019) que referem a possibilidade de desenvolvimento da capacidade de *noticing*, em certa medida, em experiências de formação, inclusive de curta duração. No entanto, apesar de as análises das formandas apresentarem elementos *descritivos* e *interpretativos* do pensamento algébrico dos alunos com maior ou menor profundidade, não parece haver uma evolução linear. Deste modo, no que respeita a *descrever*, as formandas, por vezes, não atendem a aspetos importantes das resoluções, essencialmente relacionadas com o modo como os alunos percecionam relações. Em diversos momentos, em especial nos elementos que referem nas produções escritas, Anabela e Bianca centram-se em aspetos formais como as representações ou operações aritméticas utilizadas, recontando o que os alunos fizeram. Ainda que estes sejam aspetos importantes das resoluções dos alunos, possivelmente por estarem focadas no formalismo, as formandas acabam por descurar a atenção a outros aspetos essenciais, muitas vezes associados à compreensão dos próprios objetos matemáticos por parte dos alunos. Em particular, o facto de estarem primeiramente alerta para os aspetos formais das resoluções e ou intervenções pode ter contribuído para não reconhecerem elementos importantes dos episódios relativos à educação de infância em que o pensamento funcional é explorado informalmente, nomeadamente a partir de sequências de repetição. Apesar de não existirem dados concretos que permitam afirmar o porquê deste foco das formandas, o facto de terem frequentado a disciplina de Matemática A, tradicionalmente centrada numa matemática mais formal, pode ter condicionado a visão deste par.

Tendo em conta os elementos que identificam como relevantes, as formandas acabam por *interpretar* o pensamento algébrico dos alunos essencialmente com base nas representações utilizadas ou no facto de as resoluções e ou intervenções destes serem mais ou menos sintéticas. A *interpretação* do pensamento algébrico dos alunos acaba por ser, em alguns momentos, pouco rica, em especial nas produções escritas das formandas, possivelmente por ter como base os elementos a que atenderam na *descrição* das situações. Estes resultados evidenciam a forte relação entre as dimensões *descritiva* e *interpretativa*, à semelhança de que é referido em outros estudos (Callejo & Zapatera, 2017; Llinares, 2019).

Ainda que se registem diversas dificuldades relativas à capacidade de *noticing* do pensamento dos alunos, tal como constatado também noutros estudos (Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019; Warshauer et al., 2021), em especial no que se refere à *interpretação*, as formandas foram além de comentários avaliativos ou gerais, o que nem sempre ocorre, mesmo com professores em serviço (Melhuish et al., 2020). Particularmente, é possível constatar que procuram, no caso da última tarefa, perceber e explicar os motivos de algumas incongruências nas resoluções dos alunos e fazer inferências relativamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico destes. Assim, podemos constatar, em especial se nos centrarmos nas discussões ocorridas entre o par, que a dimensão *interpretativa* evoluiu ao longo da experiência de formação, o que nem sempre se verifica (Warshauer et al., 2021). o

A diferença entre o nível de profundidade quando comparadas as produções escritas das formandas com os diálogos entre o par é também um importante aspeto deste estudo. É notório que a análise realizada oralmente pelas formandas é mais completa do que a escrita, mas o facto de não incluírem alguns elementos significativos nas produções escritas não implica que não os tenham notado. Conclusões semelhantes são referidas no estudo de Ivars et al. (2020), o que reforça a importância de, por um lado, na formação de professores serem criados diversos contextos de trabalho que possam promover a capacidade de *noticing* dos formandos e, por outro, que a análise desta capacidade não se centre apenas na componente da escrita. Destaca-se também a importância da utilização de vídeos de sala de aula, considerando o modo como, em particular na resolução da primeira tarefa, as formandas aprofundam a sua análise através do contacto com um vídeo da discussão coletiva o que reforça, à semelhança de outros estudos (Rodrigues et al., 2018; 2019; Sherin & van Es, 2009), a importância deste recurso na formação (inicial) de professores.

Consideramos, ainda, importante realçar que as formandas nunca tinham contactado com a análise do pensamento dos alunos, pelo que a complexidade envolvida na compreensão do pensamento algébrico poderá ter contribuído para um menor sucesso em alguns momentos, dado que a análise de aspetos associados aos processos de raciocínio dos alunos é desafiante até para professores em serviço (El Mouhayar, 2019; Melhuish et al., 2020). Destacamos ainda como limitação deste estudo o facto de a análise resultar das resoluções das formandas com respeito a três tarefas com focos matemáticos distintos, o que pode ter contribuído para alguma flutuação dos resultados relativamente ao desenvolvimento da capacidade de *noticing*, dado que os aspetos a notar eram distintos em cada uma das tarefas. Adicionalmente, uma vez que a análise do presente artigo se foca apenas num par de formandas, consideramos que uma análise mais alargada e com mais participantes poderá trazer outros resultados que permitam aprofundar o conhecimento sobre esta área.

Agradecimentos

A pesquisa teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017)

Notas

[1] Neste texto, quando são feitas referências aos quadros teóricos de diversos autores, utilizam-se, por vezes, termos como *identificar* ou *reconhecer* como sinónimos de *descrever,* dado que foram estas as designações usadas por esses autores.
[2] Estudantes da Licenciatura em Educação Básica que poderão vir a ser educadoras de infância ou professoras do 1.º ou 2.º ciclos, de acordo com as opções que venham a fazer ao nível do mestrado em ensino.

Referências

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-50). Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. W., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. NCTM.

Cabral, J. (2021). O *conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras e a sua capacidade de perceber o pensamento algébrico das crianças* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2021). Preservice teachers' mathematical knowledge about repeating patterns and their ability to notice preschoolers algebraic thinking. *Acta Scientiae*, *23*(6), 30-59. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6302

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics, 20*(4), 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5/ El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos*. Infancia y Aprendizage: Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Clements D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Creswell, J. W. (2012). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage.

El Mouhayar, R. (2019). Exploring teachers' attention to students' responses in pattern generalization tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22,* 575-605. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9406-6

Estapa, A. T., Amador, J., Kosko, K. W., Weston, T., Araujo, Z., & Aming-Attai, R. (2018). Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(4), 387-415. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9367-1

Hunter, J., & Miller, M. (2022). Using a culturally responsive approach to develop early algebraic reasoning with young diverse learners. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*, 111-131. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10135-0

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. A. (2020). Learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 529-548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Jacobs V. R., Philipp R. A., Sherin, M. G. (2018). Noticing of mathematics teachers. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_120-4

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26. https://doi.org/10.48489/quadrante.22814

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-593). Springer.

Llinares, D. (2019). Descriptores del desarrollo de la mirada profesional en el contexto de la generalización de patrones. *Bolema, 33*(65), 1464-1486. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1)*,* 93–113*.* https://doi.org/10.1007/s10649-013-9472-8

Melhuish, K., Thanheiser, E. & Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: Justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 35-67. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9408-4

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2016). Práticas de ensino para tornar visível o pensamento do aluno: Um estudo com futuros professores de Matemática. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp. 327-340). SPIEM.

Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver & S. Li (Eds). *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 173-197). Springer.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M., & Christou, C. (2020). Different types of algebraic thinking: An empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 965-984. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10003-6

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. ME - DGIDC.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rodrigues, R., Cyrino, M., & Oliveira, H. (2018). Comunicação no ensino exploratório: Visão profissional de futuros professores de Matemática. *Bolema*, *32*(62), 967-989. http://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a11

Rodrigues, R. V. R., Cyrino M. C. C. T., & Oliveira, H. (2019). Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. *Quadrante*, *28*(1), 100-123. https://doi.org/10.48489/quadrante.22975

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60,* 20-37. https://doi.org/10.1177/0022487108328155

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-13). Routledge.

Warshauer, H. K., Starkey, C., Herrera, C. A., & Smith, S. (2021). Developing prospective teachers' noticing and notions of productive struggle with video analysis in a mathematics content course. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 89-121. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09451-2

Anexos

Anexo 1 – Tarefas de formação

TF1 – Ramos de flores: Considere a tarefa abaixo que foi apresentada a uma turma do 1.º ano do 1.º Ciclo. Após uma leitura conjunta os alunos responderam individualmente à questão colocada e, em seguida, alguns apresentaram a sua resolução à turma.

Ramos de flores

Agora que está a terminar o ano letivo, a Beatriz quer fazer uma surpresa à professora e, por isso, decidiu apanhar flores no seu jardim para fazer um ramo.

Apanhou 8 flores amarelas, 5 flores laranja e 9 flores vermelhas.

O Henrique, irmão da Beatriz, gostou da ideia e também quis fazer um ramo para a sua professora, com o mesmo número total de flores e com as mesmas cores.

O ramo do Henrique pode ter 5 flores amarelas, 8 flores laranja e 9 flores vermelhas?

Completa o espaço abaixo com V (verdadeiro) ou F (falso) e explica a tua ideia.

$8+5+9=5+8+9$ ☐

Ao serem confrontados com a situação apresentada, todos os alunos reconheceram que a afirmação em causa é verdadeira. Em seguida são-lhe apresentados algumas das explicações dos alunos.

1. Considere as resoluções apresentadas abaixo.

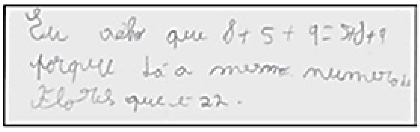


Figura 1- Resolução do Rafael

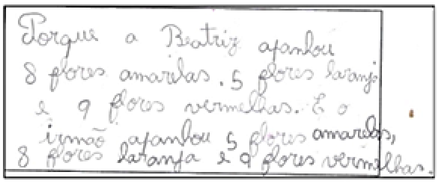


Figura 2 - Resolução da Matilde

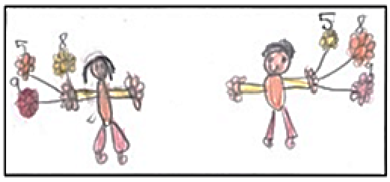


Figura 3 - Resolução do Guilherme

1.1. Descreva e compare as resoluções de cada um dos alunos.

1.2. Explique como lhe parece que cada um dos alunos terá pensado, fazendo conjeturas acerca do pensamento relacional dos mesmos.

2. Analise agora o vídeo Ramos de Flores 1. Compare as duas explicações dadas pelos alunos, Sara e Rafael, indicando, na sua opinião, qual dos alunos evidencia o pensamento relacional mais desenvolvido, justificando a sua resposta.

TF2 – Sequências com figuras infantis – Parte 2: Um grupo de crianças do jardim de infância, com idades compreendidas entre os 4 e os 6 anos, realizou algumas tarefas de sequências de repetição, tendo por base as mesmas figuras que lhe foram apresentadas na parte 1.

1. O vídeo ***Descobre a unidade*** mostra algumas situações em que as crianças tiveram de identificar a unidade de repetição das sequências que lhes foram apresentadas. Compare as quatro situações, indicando de que forma pensa que as características particulares das sequências construídas influenciaram a resposta das várias crianças.

2. No vídeo ***O que vem a seguir*** as crianças tentam identificar qual a figura que se encontra numa determinada posição, para algumas das sequências apresentadas.

2.1. Explique como lhe parece que as crianças terão pensando em cada uma das situações.

2.2. Compare os raciocínios evidenciados pelas crianças, em cada situação, procurando explicar que aprendizagens estas revelam no que se refere a sequências de repetição.

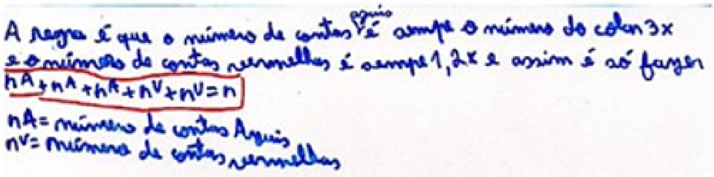
3. O vídeo ***Descobre o que falta*** mostra como as crianças identificaram as figuras em falta quando a educadora construía uma sequência e virava algumas das cartas para baixo. Compare as duas situações apresentadas, neste vídeo, referindo diferenças entre os conhecimentos que as crianças têm de mobilizar em cada uma delas.

4. Analise o vídeo ***Qual o padrão***. Comente os aspetos que considera mais significativos no episódio que visionou.

TF3 - Os colares II - Parte 2: Uma turma do 4.º ano de escolaridade realizou, em pequenos grupos, uma tarefa semelhante à apresentada na parte 1.

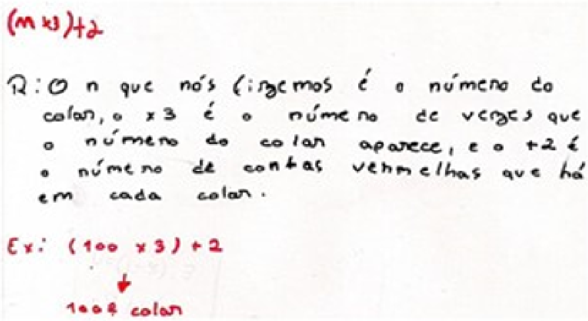
Parte 2A

1. Em resposta à questão 3 da parte 1, considere a resolução escrita e a explicação oral apresentadas pelo grupo A e a resolução escrita apresentada pelo grupo B.



A regra é que o número de contas azuis é sempre o número do colar 3x e o número de contas vermelhas é sempre 1,2x e assim é só fazer nA+nA+nA+nV+nV=n
nA= número de contas Azuis
nV= número de contas vermelhas

Resolução do grupo A



(n x3)+2
R: O n que nós fizemos é o número do colar, o x3 é o número de vezes que o número do colar aparece, e o +2 é o número de contas vermelhas que há em cada colar.
Ex: (100 x3)+2
100º colar

Resolução do grupo B

João P. – Então, aqui (apontando para o primeiro colar) tem um azul em cada, só que estão separados. Por isso nós pusemos um vezes três, que ao todo são três azuis. E depois o vermelho, pusemos um vezes dois. São duas contas vermelhas. (…). A regra é que o número de contas é sempre o número do colar três vezes e o número de contas vermelhas é sempre um duas vezes (…) Então, como nós dizemos três vezes, fizemos *na* mais *na* mais *na*, três vezes e depois como é sempre dois vermelhos, fizemos *nv* mais *nv* é igual a *n* que é o número total de contas.

Explicação do grupo A

1.1. Indique de que forma lhe parece que terão pensado os alunos de cada grupo.
1.2. Compare as duas resoluções apresentadas fazendo conjeturas acerca do desenvolvimento de pensamento algébrico dos alunos de cada grupo.

Parte 2B - Considere agora a regra apresentada pelo grupo C.

A = nº total de contas azuis
T=nº total de contas
2 = nº total de contas vermelhas
3 x A
2
(3x A)+2=T

1. Analise a resolução dos alunos e indique, justificando, se considera que estes responderam corretamente.
2. A partir da resolução deste grupo que inferências pode fazer acerca do desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Parte 2C – Analise o vídeo "Colares". Comente os aspetos que considera mais significativos neste vídeo, no que diz respeito à intervenção do aluno João.

Anexo 2 – Descrição dos vídeos

Ramos de flores: Este vídeo apresenta as intervenções de dois alunos, Sara e Rafael, na discussão coletiva acerca da resolução da questão da tarefa "Ramos de flores".
A professora lê a resposta de Sara: " oito mais cinco mais nove é igual a cinco mais oito mais nove, é igual, os números são iguais". Sara vai ao quadro explicar a sua resolução e aponta, em cada membro, para os números iguais entre si "aqui está o oito, e aqui está o oito, aqui está o cinco e aqui o cinco, aqui está o nove e aqui está o nove". A aluna começa por fazer referência ao cálculo, mas acaba por perceber que não seria necessário, após a professora perguntar: "Tu disseste que os números são iguais, preciso de saber quanto é que dá para saber se isso é verdade?" Outros colegas procuram dar a sua resposta, sendo que um dos colegas, Rafael, diz que sim e Sara afirma que não. Rafael vai ao quadro explicar-se e refere que "isto aqui (referindo-se à igualdade) também pode ser falso", mas que sabe que é verdadeira porque "tem oito mais cinco mais nove e aqui estão os mesmos números". Rafael, começa então a apontar para os números que se encontram na mesma posição, fazendo gestos de troca "aqui está o oito e aqui está o cinco e aqui está o cinco e aqui está o oito, estes dois só trocam e o nove está no lugar certo. A professora pergunta a Rafael se trocaram duas parcelas e o aluno acena com a cabeça afirmativamente. Seguidamente a professora questiona-o se sabendo que as parcelas trocam já sabe se a igualdade é verdadeira ou não ao que a criança responde que sim, voltando a apontar para os números iguais que surgem agora em posições diferentes.

Vídeo "Descobre a unidade": Este vídeo apresenta quatro situações em que alguns grupos exploram sequências de repetição, com foco na identificação da unidade de repetição. Na situação 1 é apresentada uma sequência de repetição do tipo AB (Minnie, Mickey, Minnie, Mickey, Minnie, Mickey). Ao verem esta sequência as crianças afirmam, espontaneamente, que se trata de um "padrão" e, quando a educadora os questiona acerca do motivo pelo qual fazem essa afirmação dizem de imediato: "porque se repete". Em seguida, a educadora questiona as crianças sobre "o que se repete?" ao que respondem sem hesitações: "Minnie, Mickey". Na situação 2 é apresentada às crianças a sequência: Minnie, Mickey, Pluto, Minnie, Mickey, Pluto (unidade de repetição de tipo ABC). A educadora pede às crianças para "lerem" o padrão e uma delas faz essa leitura oralmente, pausando justamente entre as duas unidades de repetição apresentadas, o que aparenta uma abordagem rítmica: "Minnie, Mickey, Pluto (pausa) Minnie, Mickey, Pluto". Quando a educadora pede às crianças para identificarem a "base do padrão", a mesma criança responde "É Minnie, Mickey e Pluto". Na terceira situação é apresentada a sequência Minnie, Pluto, Minnie, Minnie, Pluto, Minnie (unidade de repetição de tipo ABA). A educadora pergunta às crianças "qual é o padrão?" (no sentido de unidade de repetição) e na abordagem inicial as crianças "leem" as figuras que aparecem nas cartas "Minnie, Pluto, Minnie, Minnie, Pluto, Minnie". A educadora procura que elas identifiquem a unidade de repetição, mas as crianças não são bem-sucedidas. Uma das crianças tenta responder dizendo que "É Minnie, Pluto, Minnie, Minnie". Na situação 4 é apresentada a mesma sequência a um outro grupo e a educadora questiona as crianças sobre a unidade de repetição. Uma das crianças responde "Minnie, Pluto, Minnie, Pluto, Minnie, Pluto, Minnie, Pluto" e quando a educadora lhe pede para explicar, a criança aponta para o espaço entre as segunda e terceira cartas e diz "Minnie, Pluto" assumindo os dois termos como unidade de repetição. A educadora pergunta a outra das crianças se concorda, ao que esta responde "Não, porque acaba na Minnie e a seguir é o Pluto outra vez". Quando a educadora volta a explicar que a unidade de repetição "é aquelas cartinhas que escolhemos e depois repetimos", uma outra criança refere que "é a Minnie e Pluto". A educadora pede à criança para exemplificar com a mão e esta aponta para a separação entre o terceiro e o quarto termo (entre as duas Minnies) e diz "ah, repete a Minnie". Em seguida a educadora pede à criança para "ler" novamente todo o padrão desde início e indicar onde é que "para" e a criança aponta para o espaço entre os quarto e quinto termos, ou seja, considera a unidade como "Minnie, Pluto, Minnie, Minnie".

Vídeo "O que vem a seguir?" Este vídeo apresenta três situações, com foco na determinação de termos. Na situação 1 é apresentada às crianças a sequência: Minnie, Mickey, Minnie, Mickey, Minnie, Mickey, Minnie. As crianças "leem" o padrão e a educadora pergunta o que virá a seguir à Minnie ao que de imediato respondem, em conjunto, "Mickey". As crianças fazem também, a pedido da educadora, a associação entre as figuras e a sequência dos números naturais referindo que a figura nove seria a Minnie. A situação 2 ocorre num outro momento em que, a pedido da educadora, Maria, uma das crianças de um outro grupo, constrói uma sequência repetitiva à sua escolha. Maria opta por uma sequência de tipo AB: Minnie, Mickey, Minnie, Mickey, Minnie, Mickey. A educadora pergunta a Maria qual a base do padrão que escolheu e a criança responde "Minnie, Mickey (pausa), Minnie, Mickey, (pausa), Minnie, Mickey". Em seguida a educadora questiona a criança sobre a oitava posição: "qual será o oito?". A criança aponta para cada uma das figuras, associando um número a cada carta e aponta para a parte da mesa vazia, com gestos que indiciam que está a contar as posições que faltam para oito. A criança identifica que a carta seria o Mickey pois: "Quatro mais quatro é oito . . . tínhamos de pôr mais dois". Em seguida a investigadora questiona Maria dizendo: "Se eu te disser que a figura onze é a Minnie, a figura que vem antes qual é?". Maria responde que será o Mickey e com o apoio da investigadora refere que entre duas Minnies está sempre um Mickey. Na terceira situação é apresentada a seguinte sequência repetitiva às crianças: Mickey, Pluto, Minnie, Mickey, Pluto, Minnie. A educadora pergunta qual seria a "carta oito" e as crianças apontam para o Pluto que se encontra na quinta posição, dizendo que na posição oito se encontra o Pluto. A investigadora pede que as crianças apresentem uma justificação e uma delas aponta para o Mickey que se encontra na quarta posição referindo "Porque a sete era o Mickey".

Vídeo "Qual o padrão?". Este vídeo apresenta uma situação em que um grupo de três crianças é confrontado com a seguinte sequência de repetição: Pluto, Minnie, Mickey, Pluto, Mickey, Minnie, Pluto, Minnie, Mickey. A educadora pede às crianças para olharem para as cartas e dizer "qual é o padrão". As crianças começam a "ler": "Pluto, Minnie, Mickey, Pluto, Mickey…". De imediato olham umas para as outras, "desconfiando" da sequência que lhes foi apresentada e uma das crianças refere que há uma troca: " porque a Minnie é o segundo e agora é que é o Mickey . . . para ser um padrão aqui (aponta para a quinta posição) tinha de ser a Minnie"

Vídeo "Colares" – Este vídeo apresenta a intervenção de João, um aluno do 4.º ano de escolaridade, durante a discussão coletiva da tarefa "Os colares II". A partir da discussão que se encontra a decorrer, um aluno afirma: "se soubermos o número do colar também já sabemos as contas azuis de cada grupo". Um dos colegas, João, parece não ter ouvido a afirmação deste aluno, pelo que a professora lhe pede para repetir. Quando o aluno repete, João concorda e continua dizendo "basta tirar dois ao número total de bolas e dividir esse resultado por três. A professora pergunta então: "para saber o quê?" ao que o aluno responde: "o número de azuis em cada conjunto". João pede para ir ao quadro explicar e escrever "$nt - 2 = nta$", explicando, juntamente com a professora que a expressão representa o número total de contas menos dois que corresponde ao número total de contas azuis. Em seguida escreve "$nta \div 3 = gba$", sendo que gba representa "um grupo de bolas azuis".