

Experiencia de enseñanza de resolución de problemas de producto cartesiano con un estudiante con autismo

A teaching experience on Cartesian product problem solving with a student with autism

Irene Polo-Blanco 

Universidad de Cantabria
España
irene.polo@unican.es

Alicia Bruno 

Universidad de La Laguna
España
abruno@ull.edu.es

Steven Van Vaerenbergh 

Universidad de Cantabria
España
steven.vanvaerenbergh@unican.es

Resumo. Este trabajo estudia la eficacia de la metodología de instrucción *Conceptual Model-Based Problem Solving* (COMPS) para la enseñanza de la resolución de problemas de producto cartesiano de multiplicación y división en un estudiante con TEA. Se lleva a cabo un estudio de caso en el que se detallan las estrategias y representaciones que utiliza el estudiante durante cinco sesiones de instrucción al resolver problemas de producto cartesiano. El estudiante mejoró en su desempeño, combinando estrategias de operaciones y modelización con dibujos, y generalizó los efectos de la instrucción a problemas verbales de dos operaciones (una aditiva y otra multiplicativa), resolviéndolos mediante dibujos, aunque no identificó las operaciones. Además, los resultados se mantuvieron cinco semanas después de la instrucción. Se discuten las implicaciones de estos hallazgos para la enseñanza de problemas de estructura multiplicativa a estudiantes diagnosticados con TEA.

Palabras clave: modelo conceptual de resolución de problemas; problemas de multiplicación y división; producto cartesiano; Trastorno del Espectro Autista.

Abstract. This paper studies the effectiveness of the Conceptual Model-Based Problem Solving (COMPS) instructional methodology for teaching Cartesian product problem solving to a student with ASD. A case study is conducted detailing the strategies and representations used by the student

during five instructional sessions when solving Cartesian product problems. The student improved his performance by combining operations and modeling with drawings strategies, and generalized the effects of the instruction to verbal problems of two operations (one additive and one multiplicative), solving them by drawing pictures although he did not identify the operations. Furthermore, the results were maintained five weeks after instruction. Implications of these findings for teaching multiplicative structure problems to students diagnosed with ASD are discussed.

Keywords: conceptual model-based problem solving; multiplication and division problems; Cartesian product; Autism Spectrum Disorder.

Introducción

Este trabajo describe una experiencia de instrucción basada en la metodología denominada *Conceptual Model-Based Problem Solving* (COMPS) seguida por un estudiante con Trastorno del Espectro Autista (TEA) para la enseñanza de problemas de producto cartesiano. La resolución de problemas es una actividad esencial en matemáticas. Algunas de las habilidades cognitivas que se ponen en juego durante el proceso de resolución de problemas están relacionadas con la memoria de trabajo y las funciones ejecutivas (Lee et al., 2009). Cuando hay déficits en estas funciones ejecutivas, los estudiantes pueden mostrar escasas habilidades organizativas y tener dificultades para seguir una estrategia hasta el final, además de presentar baja concentración y/o motivación (Swanson & Sachse-Lee, 2001). Algunos de los déficits mencionados son característicos de las personas diagnosticadas con TEA (Happe et al., 2006) e interfieren, por tanto, en el desarrollo de sus habilidades para la resolución de problemas de matemáticas. Sus limitaciones en la comprensión de vocabulario específico o de las situaciones a las que aluden los problemas también se relaciona con las dificultades que presentan para identificar las operaciones que los resuelven (Bae et al., 2015; Hart-Barnett & Cleary, 2015; Ozonoff & Schetter, 2007).

Con el fin de mejorar el aprendizaje de la resolución de problemas, distintas investigaciones han evaluado la eficacia de metodologías de enseñanza en alumnado con TEA (Gevarter et al., 2016). La mayoría de estos trabajos se han centrado en problemas aritméticos verbales de estructura aditiva (suma y resta) (Desmarais et al., 2019; Kasap & Ergenekon, 2017; Polo-Blanco et al., 2019; 2021; Rockwell et al., 2011; Root et al., 2016; Xin, 2019), y, en menor medida, se han estudiado estrategias de enseñanza efectivas para los problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división), con algunas excepciones como Delisio et al. (2018), Levingston et al. (2009) y Whitby (2012). Entre las metodologías evaluadas para la enseñanza de los problemas aditivos y multiplicativos se encuentra COMPS, adaptada de estudios realizados con alumnos con dificultades de aprendizaje (Xin 2012, 2019; Xin et al., 2008; Zhang et al., 2014). En general, la investigación no ha incluido problemas de estructura multiplicativa de producto cartesiano que son aquellos que

combinan uno a uno los elementos de los dos factores. Además, no hemos encontrado apenas estudios que hayan empleado la metodología COMPS para enseñar problemas a estudiantes con TEA. Excepción es el estudio del que forma parte el presente trabajo (Polo-Blanco et al., 2022) que ha evaluado el efecto positivo de un enfoque COMPS en el aprendizaje de problemas de multiplicativos de razón, comparación y producto cartesiano, con un estudiante con TEA y discapacidad intelectual. De dicho estudio, se detalla en el presente trabajo el proceso seguido para los problemas de producto cartesiano.

Objetivos

En este trabajo nos planteamos estudiar cómo una experiencia de instrucción basada en el método COMPS ayuda a un estudiante con TEA en el aprendizaje de la resolución de problemas de producto cartesiano. En concreto, definimos los siguientes objetivos.

- (1) Evaluar la eficacia del enfoque COMPS para la enseñanza de problemas de producto cartesiano a un estudiante con TEA.
- (2) Describir las estrategias y representaciones que muestra el estudiante en el aprendizaje de los problemas de producto cartesiano según la operación implicada.
- (3) Evaluar la generalización a problemas de dos operaciones y el mantenimiento en el tiempo de las habilidades adquiridas.

Resolución de problemas de estructura multiplicativa

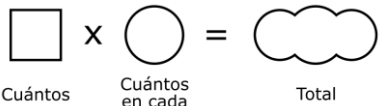
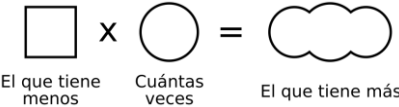

Los problemas de multiplicación y división de una operación presentan diferentes tipologías: *razón*, *comparación* y *producto cartesiano* (Greer, 1992). En la Tabla 1 se muestran ejemplos de “historias” que dan lugar a estos tipos de problemas. Las historias son enunciados sin preguntas, en los que se da la información relativa a los tres datos numéricos implicados. Cualquiera de esos datos puede convertirse en incógnita, lo que determinará que el problema resultante se resuelva con una multiplicación o una división.

La investigación desarrollada sobre la resolución de problemas de multiplicación en alumnado TEA busca ofrecerles apoyos que favorezca el proceso de comprensión de los enunciados o refuercen los pasos a seguir. Así, Whitby (2012) aplica la metodología *Solve It!*, desarrollada en Montague (2003), para mejorar las habilidades de resolución de problemas de estructura aditiva y multiplicativa con estudiantes de secundaria diagnosticados con TEA. Levingston et al. (2009) evaluaron un método de enseñanza de problemas de multiplicación y división en dos sujetos, uno de ellos con TEA, basado en ayudarles a seguir los distintos pasos de la resolución del problema, con preguntas adecuadas: *¿qué quieres encontrar?*, *¿qué operación es la adecuada?*, *¿cuál es el número mayor?*, *¿cuál es el número menor?*. Delisio et al. (2018) también obtienen buenos resultados al enseñar problemas de multiplicar y dividir de razón y comparación a

estudiantes diagnosticados con TEA, siguiendo una intervención basada en el uso de organizadores gráficos.

En el caso de estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas, ha habido un interés reciente por analizar su comprensión de problemas de estructura multiplicativa. Por ejemplo, Alghamdi et al. (2020) emplearon con éxito la metodología *Schematic-Based Instruction* (Instrucción Basada en Esquemas) para enseñar problemas multiplicativos a tres estudiantes de quinto grado con dificultades de aprendizaje en matemáticas. Es muy relevante, y será central en nuestro estudio, el trabajo desarrollado por Xin y colaboradores (Xin 2012, 2019; Xin et al., 2008; Zhang et al., 2014), quienes proponen seguir instrucciones utilizando el denominado *Conceptual Model-Based Problem Solving model* (COMPS), para enseñar a estudiantes con dificultades de aprendizaje a resolver problemas aritméticos verbales. Entre otros elementos, el énfasis de la metodología COMPS es emplear *diagramas esquemáticos* con formato de igualdad, como apoyo para mejorar el desempeño de los estudiantes al resolver problemas (Xin, 2012). En el caso de los problemas de multiplicación, estos diagramas ayudan a los estudiantes a reconocer la relación multiplicativa a través de una “igualdad” en la que deben escribir los datos del problema: factor x factor = producto (Tabla 1).

Tabla 1. Tipología de historias sin incógnita y diagramas esquemáticos

Tipología	Ejemplos de historias	Diagramas esquemáticos
Razón	Hay 5 estantes de libros en la estantería de Juan. Juan puso 2 libros en cada estante. Juan tiene 10 libros en su estantería.	 Cuántos Cuántos en cada Total
Comparación	Ana tiene 5 caramelos. Juan tiene el doble de Caramelos que Ana. Juan tiene 10 caramelos.	 El que tiene menos Cuántas veces El que tiene más
Producto cartesiano	Silvia tiene 5 pantalones y 2 camisetas. Silvia se puede vestir de 10 formas distintas combinando los pantalones y las camisetas, si se pone una camiseta y un pantalón cada vez.	 Cuántos de Cuántos de Total de combinaciones

El proceso general de enseñanza de la metodología COMPS aplicada a problemas aritméticos tiene dos fases (Xin, 2012). En la primera fase, de carácter introductorio, se emplean historias. Con ellas, el estudiante aprende a identificar el tipo de problema y a representar las cantidades y relaciones que se dan en cada tipo de problema, utilizando los diagramas. En la segunda fase, se introducen los problemas (con incógnita uno de los datos de la historia). En este proceso, el profesor interactúa con el estudiante haciendo preguntas encadenadas sobre la situación que se describe en el problema, con el propósito de ayudarlo a centrarse en las características clave. Por ejemplo, en un problema de multiplicación de producto cartesiano se pregunta: “¿qué parte del problema habla de cuántos objetos hay de

$x?$, ¿cuántos objetos hay de $y?$, o ¿qué parte se refiere al total de combinaciones que puedo realizar entre ellos?”. En función de la incógnita, el estudiante coloca los datos numéricos en el diagrama esquemático, lo que le ayuda a elegir la operación que resuelve el problema (multiplicar o dividir). Además, en este momento pueden usarse representaciones – como un diagrama de árbol – que permitan facilitar la transición de la situación real a la escritura simbólica de la operación. Se propone también el uso de una lista de tipo heurístico que enumera los pasos a seguir en el proceso de resolución, la cual se denominada DOTS, acrónimo de *Detect, Organize, Transform, Solve* (Xin, 2012).

La metodología COMPS ha producido resultados satisfactorios en la enseñanza de problemas de estructura multiplicativa con estudiantes que presentan dificultades de aprendizaje. Es el caso de Xin et al. (2008) quienes examinaron los efectos de su uso con cinco alumnos de 4.º y 5.º grado. Los resultados indicaron que el modelo no solo ayudó a mejorar la resolución de los problemas, sino que también promovió el aprendizaje de conceptos pre-algebraicos. Xin et al. (2011) compararon una instrucción basada en COMPS frente a una instrucción heurística general, para enseñar la resolución de problemas de estructura multiplicativa de razón y comparación a estudiantes de primaria con dificultades de aprendizaje. Concluyeron que solo el grupo COMPS mejoró significativamente desde las pruebas iniciales a las finales en la resolución de los problemas, así como en una prueba de preálgebra que se basaba en el uso del modelo. Recientemente, Xin et al. (2020) han complementado la metodología COMPS con un sistema de tutoría por ordenador, logrando mejorar significativamente el desempeño de tres estudiantes con dificultades de aprendizaje, en problemas multiplicativos de razón y comparación.

Estrategias y representaciones en la resolución de problemas

Para el caso de los problemas de enunciado verbal, investigaciones con alumnado de desarrollo típico han distinguido tres estrategias básicas de resolución: (1) *modelado directo*, cuando utilizan objetos concretos o dibujos sobre los que realizan un conteo; (2) *conteo* cuando utilizan un conteo apoyándose en la serie numérica (no hay modelado directo); y (3) *hechos conocidos o derivados*, cuando se reconoce el resultado de la operación de forma mental (e.g. Ivars & Fernández, 2016; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Dichos estudios muestran una evolución de las estrategias, desde las más informales (modelización y conteo) hacia la más formal de recordar un hecho numérico (Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Por su parte, Bae et al. (2015) observaron que los estudiantes con TEA presentan estrategias más rudimentarias, centradas en el conteo y en el detalle de los dibujos que persisten durante más tiempo. Por ejemplo, distintos trabajos con estudiantes con TEA (e.g. Polo-Blanco et al., 2019, 2021) muestran cómo estos muestran una predilección por dibujos

detallados cuando resuelven problemas. Algunos trabajos han vinculado el estilo de dibujo centrado en el detalle observado en estudiantes con TEA con el procesamiento local (coherencia central débil) característico de personas con el trastorno (Booth et al., 2003).

En el caso de la resolución de problemas de producto cartesiano, estudios previos con estudiantes de desarrollo típico muestran cómo trabajar estrategias de resolución de este tipo de problemas ayuda a desarrollar el pensamiento combinatorio (Pinto et al., 2018). Por ejemplo, el trabajo de English (1991) pone el foco en este tipo de problemas y muestra que los niños con una edad temprana son capaces de realizar combinaciones cuando se les da materiales manipulativos y un contexto familiar. Por otro lado, el trabajo de Tillema (2013) muestra cómo durante una experiencia de instrucción en resolución de problemas de producto cartesiano tres estudiantes entre 10 y 14 años emplearon estrategias variadas como la de emparejamiento, y representaciones de matrices y diagramas de árbol con dibujos detallados.

Centrándonos en estudiantes con TEA, el estudio exploratorio de Van Vaerenbergh et al. (en prensa) analiza las estrategias de resolución en problemas de producto cartesiano por 26 estudiantes con TEA observando, en general, un desempeño bajo en este tipo de problemas, mediante el uso de estrategias incorrectas aditivas basadas en dibujos. Entre las estrategias correctas, predominan las basadas en operaciones, con alguna evidencia de estrategias de modelización, mediante emparejamiento con dibujos detallados (Van Vaerenbergh et al., en prensa).

Metodología

Se implementó un estudio de caso con diseño de línea de base múltiple a través de conductas (Gast et al., 2014) para evaluar la eficacia de una instrucción COMPS en el rendimiento de la resolución de problemas de multiplicación de un estudiante diagnosticado con TEA. Se consideró el rendimiento del alumno al resolver los tres tipos de problemas multiplicativos, del que detallamos el desempeño al resolver los problemas de producto cartesiano.

Participante

En el estudio participó un varón de 14 años, al que nos referiremos con el pseudónimo de Pedro. Fue diagnosticado con TEA a la edad de 6 años a partir de evaluaciones clínicas y según los criterios de diagnóstico del DSM-IV. En la evaluación clínica no se objetivó ninguna otra comorbilidad. Pedro se sitúa en el rango severo de autismo según la Escala de Autismo Infantil (CARS) (Schopler et al., 1988) y muestra un repertorio amplio de conductas estereotipadas, muestra tendencia a conductas repetitivas y tiene interés especial por ciertas áreas. Estuvo escolarizado en un colegio general (ordinario) hasta la edad de 10 años, con una adaptación curricular individual significativa en las áreas de lengua y matemáticas. Desde entonces, está escolarizado en un centro de educación especial. Según

el último informe del equipo de orientación del centro, dentro de la sociabilidad y los aspectos emocionales se muestra cercano con sus iguales, aunque con escasa integración en el juego o en la relación. Tiene buena reacción ante las rutinas establecidas y le tranquiliza prever con antelación lo que va a ocurrir. En la estructuración de su personalidad hay un estancamiento en el desarrollo emocional y cognitivo, con afectación del proceso simbólico. Presenta discapacidad intelectual, con CI de 54 según la Escala de Inteligencia de Wechsler para Niños (WISC-V) (Wechsler, 2015).

En Matemáticas sigue un currículo adaptado al que dedica cuatro horas semanales. Tiene buena comprensión lectora, lo que le permite leer y entender los problemas, aunque presenta dificultades de comprensión de determinadas palabras. Previo al estudio, Pedro había trabajado los problemas de estructura aditiva, mostrándose capaz identificar la operación (suma o resta), resolviéndola mediante hechos numéricos memorizados. En relación con la multiplicación, había comenzado su instrucción desarrollando su significado como suma reiterada. También era capaz de resolver algunas multiplicaciones mediante dibujos y conteo. No tenía memorizadas las tablas de multiplicar ni había recibido instrucción formal sobre los algoritmos de multiplicar y dividir. En relación con los problemas de estructura multiplicativa, solo mostraba comprensión en algunos problemas de razón de multiplicar, que en ocasiones resolvía de manera exitosa haciendo uso de estrategias informales. Se consideró, por tanto, que era un momento adecuado para que Pedro aprendiera a resolver otros tipos de problemas de multiplicar y dividir, en particular los de producto cartesiano.

Diseño de la experimentación y recogida de datos

El estudio tuvo lugar durante la primera mitad del curso escolar y el instructor que llevó a cabo la práctica tenía experiencia de enseñar matemáticas a Pedro. Se llevó a cabo una sesión semanal en horario extraescolar de unos 30 minutos de duración. En total se realizaron 16 sesiones de instrucción, las cuales fueron videograbadas con el objetivo de seguir todos los pasos y razonamientos del estudiante. Durante dichas sesiones, se introdujeron secuencialmente los problemas de razón (cinco sesiones), comparación multiplicativa (seis sesiones) y, en tercer lugar, de producto cartesiano (cinco sesiones). En este trabajo se analizan las cinco sesiones de estos últimos problemas S0, S1, S2, S3 y S4. Además, se recogieron todas las respuestas escritas. En ocasiones, cuando Pedro se mostraba cansado o desconcentrado, se impartía la sesión en dos partes, en días consecutivos. Las fases del experimento incluían: 1) pruebas de línea de base; 2) instrucción en problemas y pruebas de evaluación de la instrucción; 3) pruebas de seguimiento; 4) pruebas de mantenimiento (cinco semanas después de la instrucción); y 5) pruebas de generalización (a problemas de dos operaciones: suma y multiplicación).

Las pruebas de evaluación fueron escritas y se distinguió la eficacia en la identificación

de las operaciones que resuelven el problema y la resolución de las operaciones (ejecución del cálculo).

Desarrollo de la experimentación

En lo que sigue, se desarrolla la experimentación, observando el proceso seguido para los problemas de producto cartesiano, cuya fase de instrucción con COMPS (fase 2) constó de cinco sesiones.

Línea de base

En la fase de línea de base se evaluó el desempeño del estudiante en cuatro problemas de una operación de multiplicación o división, así como dos problemas de generalización a dos operaciones. Por ejemplo, "Ana tiene 4 camisetas, 3 pantalones cortos y 2 pantalones largos. Si se pone una camiseta y un pantalón cada vez, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir?".

Se indicó al estudiante que debía resolver los problemas solo, animándole a realizarlo lo mejor posible. No se le proporcionó ayuda, excepto si mostraba no comprender alguna de las palabras del problema. En ese caso, se le explicó verbalmente el significado de la palabra desconocida.

Instrucción bajo un enfoque COMPS

Una vez finalizada la fase de línea base se comenzó con la instrucción. Se llevaron a cabo cinco sesiones de instrucción (S0, S1, S2, S3 y S4) en problemas de producto cartesiano. primero se trabajó con las historias sin incógnita (S0), a continuación, con problemas de multiplicación (S1 y S2), luego de división (S3) y finalmente, se intercalaron problemas de una u otra operación (S4).

El enfoque COMPS se implementó a través de instrucción directa (Engelmann, 1980), consistente en: modelado (el profesor resuelve y explica paso a paso el problema y a continuación, el estudiante resuelve otro problema similar), práctica guiada (el profesor utiliza preguntas-guía que ayudan al estudiante) y retroalimentación continua del profesor.

En la primera sesión de historias sin incógnita, el objetivo fue familiarizar al estudiante con el esquema asociado al problema de producto cartesiano: "En McDonald's hay 3 comidas: hamburguesa, sándwich o perrito. Y se pueden combinar con 2 bebidas: Coca-Cola o zumo. ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer en total de comida y bebida?" (Tabla 2). Si el estudiante mostraba dificultades de comprensión, se utilizaban además representaciones concretas mediante diagramas de árbol con el fin de ayudarle a relacionar la situación del problema con el diagrama esquemático.

A continuación, se comenzó con las sesiones de instrucción en problemas. Siguiendo a (Xin, 2012), se entregó al estudiante la hoja de trabajo de cada problema, y se procedió

utilizando las componentes del enfoque COMPS que se ejemplifican en la Tabla 2. La hoja de trabajo estaba estructurada en diferentes secciones (Figura 1):

1. *Enunciado del problema y diagrama esquemático.* El estudiante leía solo el problema y se le guiaba a través de preguntas guía, mientras iba colocando las cantidades en el diagrama esquemático. Por ejemplo, para el problema de enunciado “Tengo 4 camisetas y 2 pantalones. Si me pongo una camiseta y un pantalón cada vez, ¿de cuántas maneras distintas puedo vestirme?”, el profesor utilizaba las cuestiones: “¿Cuántas camisetas hay? Coloca la cantidad en el cuadrado; ¿Cuántos pantalones hay? Coloca la cantidad en el círculo; ¿De cuántas maneras distintas puedo vestirme? Coloca la cantidad en la nube”.
- Si el estudiante mostraba dificultades de comprensión, se realizaba también una representación concreta o un dibujo mediante diagramas de árbol, semejantes a los tratados en las sesiones de historias, para facilitar la comprensión del problema y la transición hacia el uso del diagrama esquemático.
2. *Operación.* Se pedía al estudiante que, a partir de los datos del diagrama esquemático, escribiera la operación que resolvía el problema.
 3. *Resolución.* El estudiante escribía explícitamente la expresión de la operación a realizar y la resolvía.

El proceso se acompañaba con una hoja de pautas visual para orientar al estudiante de los pasos que debía seguir en cada momento.



Figura 1. El estudiante responde a un problema con el uso de diagramas esquemáticos

Tabla 2. Componentes del enfoque COMPS para el problema “En McDonald’s...”

Hoja de pautas visual	Representación concreta	Diagrama esquemático
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: flex; align-items: center;"> 1 <div style="flex-grow: 1;"> <p style="text-align: center; margin: 0;">LEE EL PROBLEMA</p> </div> </div>		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: flex; align-items: center;"> 2 <div style="flex-grow: 1;"> <p style="text-align: center; margin: 0;">RELLENA EL ESQUEMA</p> </div> </div>		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: flex; align-items: center;"> 3 <div style="flex-grow: 1;"> <p style="text-align: center; margin: 0;">OPERACIÓN</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> × ÷ </div> </div> </div>		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: flex; align-items: center;"> 4 <div style="flex-grow: 1;"> <p style="text-align: center; margin: 0;">SOLUCIÓN</p> </div> </div>		

En las sesiones de instrucción, excepto en la de historia (S0), se dedicó la parte final a evaluar el desempeño del estudiante.

Seguimiento

En esta fase se llevaron a cabo dos sesiones de seguimiento en las que el estudiante resolvió dos problemas de producto cartesiano (uno de multiplicación y otro de división), sin los apoyos proporcionados en la fase de instrucción, es decir, la hoja de trabajo el estudiante solo contenía el enunciado del problema. Las instrucciones y la interacción con el instructor fueron las mismas que en la línea de base.

Mantenimiento

Para evaluar si el conocimiento adquirido se mantenía en el tiempo, el estudiante resolvió, sin ayuda, dos problemas de producto cartesiano (uno de multiplicación y otro de división) cinco semanas después de finalizada la instrucción.

Generalización a problemas de dos operaciones

Tras finalizar la sesión de mantenimiento, se llevó a cabo una sesión en la que el estudiante resolvió, sin ayuda, dos problemas de producto cartesiano de dos operaciones, similares a los realizados en la de línea de base.

Resultados

La Tabla 3 presenta los resultados de la evaluación de los problemas durante las cinco fases: línea de base, instrucción, seguimiento, mantenimiento y generalización. Se muestran los porcentajes de éxito en la identificación de la operación y de la respuesta final proporcionada.

Tabla 3. Resultados en los problemas de producto cartesiano según operación

	PT	PTG	S1	S2	S3	S4	SE	PM	PG
Problemas multiplicación									
Número de problemas	4	2	4	4	4	4	4	2	2
Identificación operación	0%	0%	100%	75%	-	100%	100%	100%	0%
Respuesta correcta	0%	0%	100%	100%	-	100%	100%	100%	100%
Problemas división									
Identificación operación	0%	0%	-	-	100%	100%	100%	50%	0%
Respuesta correcta	0%	0%	-	-	100%	100%	100%	100%	100%

PT: Pretest una operación; PTG: Pretest dos operaciones; S Sesión de Instrucción; SE; Seguimiento; PM: Postest Mantenimiento; PG: Postest dos operaciones (generalización)

Como se aprecia en la Tabla 3, en las sesiones de línea de base, Pedro no logró resolver ninguno de los problemas de producto cartesiano correctamente, tanto los de una como los de dos operaciones. En sus respuestas reflejaba no comprender la situación planteada. Por ejemplo, al problema: “En mi armario tengo 8 camisetitas de distintos colores y 3 pantalones diferentes. ¿De cuántas maneras me puedo vestir?”, contestó escribiendo: “Con pantalón, camiseta y calcetines”.

En la sesión de historias, el instructor hizo hincapié en mostrarle cómo realizar un dibujo mediante diagrama de árbol para ayudarlo a comprender el enunciado y cómo rellenar el esquema, a partir de las preguntas guiadas (ver Tabla 1). En la Figura 2, se muestra la respuesta del estudiante en la sesión de historias al problema: “Quiero hacer bocadillos de pan y de embutidos. Tengo 3 tipos de pan: maíz, integral y trigo y 2 tipos de embutidos: jamón y salchichón. Se pueden hacer 6 combinaciones distintas de bocadillos en total”.

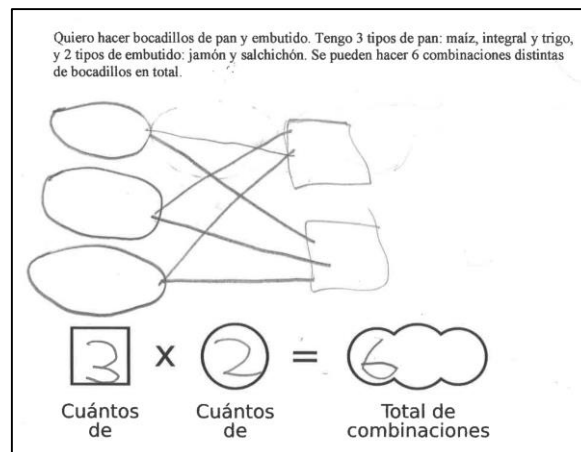


Figura 2. Respuesta del estudiante en una historia de problemas de producto cartesiano

- Instructor (I): Tienes que hacer tú el dibujo, ¿vale?
 Pedro (P): [Lee el enunciado].
 I: Vale, muy bien. Entonces, dibuja los tres panecitos.
 P: [Dibuja].
 I: Dibuja uno debajo de otro.
 P: [Borra el dibujo y lo vuelve a hacer colocando los panes en vertical].
 I: Y ahora dibuja los dos embutidos [Pedro los dibuja]. Y ahora las flechas, todas las flechas [Pedro las dibuja]. Puedes ir de aquí a aquí también [señalando]. No hay que borrar... Y de aquí a aquí [señalando].
 P: [Termina de dibujar todas las líneas].
 I: Entonces, ¿cuántos panes hay?
 P: [...]
 I: Hay tres panes, venga. ¿Cuántos embutidos hay? Son dos cuadraditos.
 P: Dos.
 I: Dos. ¿Y cuántas combinaciones? Son todas las flechas que hay.
 P: Seis.
 I: Muy bien.

Cuando comenzaron las sesiones de instrucción en problemas, el instructor siguió un procedimiento similar, añadiendo el paso de identificación de la operación y de resolución. Acompañó la hoja de trabajo con la lista de pautas visual para guiarle en los distintos pasos de la resolución (Tabla 1).

Un ejemplo de problema en esta fase fue: “Tenemos 2 consonantes, p, s, y 3 vocales a, e, i. ¿Cuántas sílabas distintas se pueden hacer en total, combinando una consonante y una vocal?”. En esta ocasión, Pedro tras leer el enunciado realizó la representación de las letras y las líneas (Figura 3, izquierda). Rellenó los números 2 y 3 en el esquema. Se quedó pensando unos segundos, y puso la mano izquierda en la mesa. A continuación, marcó con el lápiz un punto en el dedo meñique, un punto en el dedo anular, una “línea” en el meñique, una “línea” en el anular (Figura 3, derecha), y escribió el número 6 en la casilla de total de combinaciones. Rellenó la operación (multiplicación) y la resolución. En la resolución escribió primero 2×6 , pero al momento lo corrigió y escribió $2 \times 3 = 6$. Este es un ejemplo interesante en el que Pedro sigue todos los pasos de la instrucción, pero con flexibilidad: realiza el dibujo de las dos consonantes, rellena el esquema parcialmente, se apoya en los dedos para realizar el cálculo, vuelve a completar el esquema y a partir de ahí, decide la operación, se equivoca, pero la certeza del resultado obtenido previamente le hace cambiar la operación.

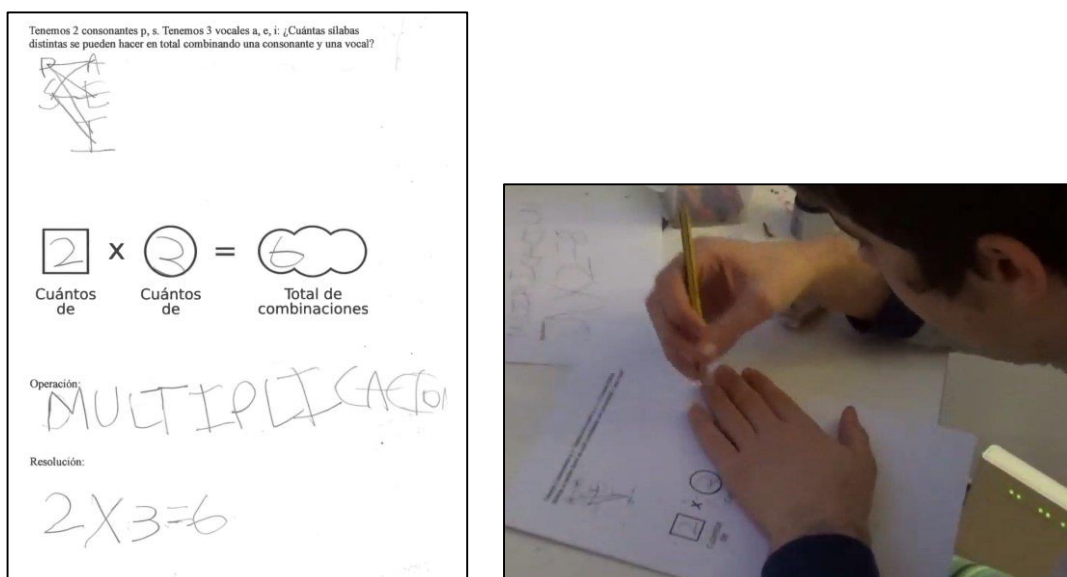


Figura 3. Proceso de resolución de un problema de multiplicación

Pedro obtuvo el 100% en todos los problemas de evaluación de producto cartesiano durante la fase de instrucción, excepto en la sesión 2, en la que calculó correctamente el resultado, pero escribió la operación contraria (Figura 4, izquierda).

Seguimiento

Pedro completó correctamente los problemas de producto cartesiano de la fase de seguimiento. En esta fase no se le proporcionaban los diagramas esquemáticos, sin embargo, los dibujó en casi todas las ocasiones, como se aprecia en la Figura 4 (derecha), para el problema “En la heladería hay varios sabores y 2 tipos de helado: cono y en galleta. Si se pueden hacer 6 combinaciones de helado diferente en total, ¿cuántos sabores hay?”. Nótese que además realizó el dibujo mediante un diagrama de árbol de manera simultánea al esquema utilizando dibujos detallados (representando los sabores mediante círculos, y dibujando un cono y una galleta). Además, cometió un error de notación de la división, a pesar de que su respuesta fue correcta. Este error de notación se había manifestado en sesiones previas cuando se le indicó la escritura correcta, si bien el tiempo de desarrollo de la instrucción no fue suficiente para que la integrara.

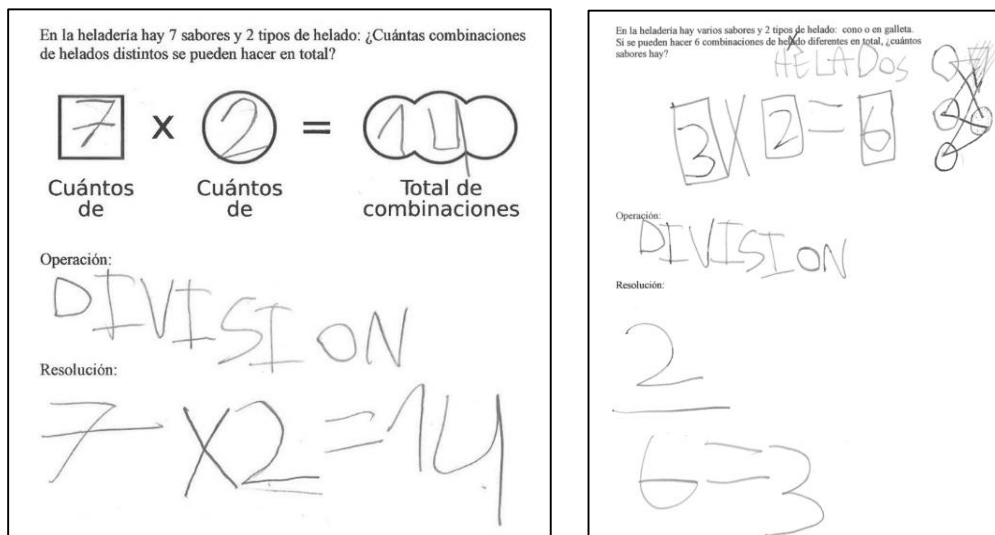


Figura 4. Respuestas de Pedro a dos problemas: de multiplicación (izquierda) y de división (derecha)

Mantenimiento

Los resultados de los problemas de producto cartesiano en la fase de mantenimiento fueron altos, con un 100% en la obtención de la respuesta correcta, y un 75% de aciertos en la identificación de la operación, debido a un error al identificar como multiplicación la operación en un problema de división. Esto implicó que entendió y resolvió el problema correctamente, pero escribió la operación inversa, pues ya tenía el resultado obtenido mentalmente.

Generalización a problemas de dos operaciones

Los resultados de la prueba de generalización mejoraron respecto de los obtenidos en la línea de base, logrando un 100% de respuestas correctas con métodos de resolución

informales, pues Pedro recurrió a diagramas de árbol con dibujos detallados y no explicitó ninguna de las operaciones. Por ejemplo, para el problema “Pedro tiene 1 pantalón corto y 5 pantalones largos. Si Pedro tiene 2 camisetas, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir?”, dibujó los pantalones y las camisetas, representó con líneas todas las combinaciones. A continuación, realizó unos círculos dentro de cada pantalón (apenas apreciables en la Figura 5, izquierda) y fue contando las líneas hasta obtener la respuesta. En el problema “Andrés tiene 4 pantalones cortos y 3 largos. Si puede hacer 14 combinaciones de pantalón y camiseta, ¿cuántas camisetas tiene?” dibujó 7 pantalones y desde cada uno trazó unas líneas hacia un punto fijo. En ese punto dibujó una camiseta. Repitió el proceso desde cada pantalón hacia otro punto, donde dibujó otra camiseta. Así agotó el recuento de las 14 combinaciones y escribió la respuesta “2 camisetas” (Figura 5, derecha).

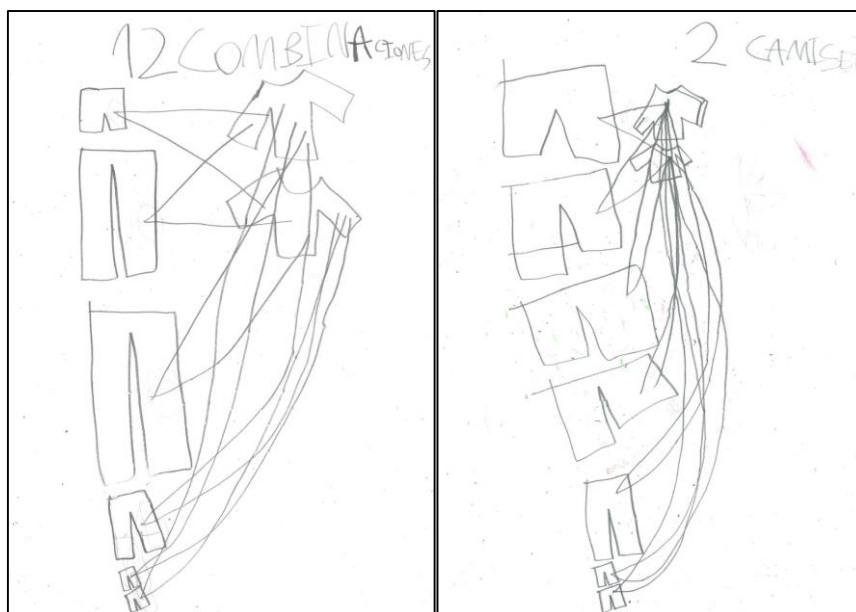


Figura 5. Resolución de dos problemas de la fase de generalización

En resumen, no logró escribir la operación, sino que recurrió a estrategia de modelización mediante diagramas de árbol y dibujos detallados. Se aprecia por tanto cómo la instrucción le llevó a una comprensión de la situación y al desarrollo de una estrategia de resolución que no había sido explicitada para los problemas de dos operaciones.

Discusión y conclusiones

Diferentes estudios han mostrado la necesidad de conocer prácticas efectivas de enseñanza de las matemáticas del alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA) (Gevarter et al., 2016). Esta necesidad no solo abarca las matemáticas iniciales, asociadas a la adquisición del concepto de número y la estructura aditiva, sino también a matemáticas más complejas, como el caso de la estructura multiplicativa. Este trabajo supone un avance en cuanto al

aprendizaje de la estructura multiplicativa, pues la mayoría de las investigaciones con estudiantes con TEA y discapacidad se venían centrando en la estructura aditiva (Kasap & Ergenekon, 2017; Rockwell et al., 2011). Se ha mostrado cómo una intervención adecuada, como la llevada a cabo bajo el enfoque COMPS, ha ayudado a un estudiante TEA con discapacidad intelectual a progresar en problemas multiplicativos, incluso algunos complejos, como los evaluados en la generalización con dos operaciones. Los resultados de este trabajo son, por tanto, prometedores en cuanto al alcance de las trayectorias de aprendizaje de estudiantes con limitaciones de aprendizaje importantes.

El estudiante comenzó con un desempeño bajo en las sesiones de línea de base de todos los problemas, pero desde el momento que se introdujo la instrucción COMPS, su porcentaje de éxito se incrementó rápidamente. Los escasos errores que el estudiante cometió durante estas sesiones se debieron a fallos en el cálculo de las operaciones y no tanto en la elección de las mismas. Este indica la necesidad de apoyarlo en la mejora de aspectos procedimentales.

El estudiante incorporó la metodología COMPS con normalidad, mostrando más concentración e interés desde el comienzo de la intervención en la resolución de los problemas que durante las sesiones de línea de base. Desde el comienzo de la instrucción en los problemas de producto cartesiano, fue importante para el estudiante el apoyo en los dibujos para comprender la situación y el uso de los diagramas esquemáticos para determinar la operación de multiplicación o división. Aunque distintos estudios con estudiantes de desarrollo típico han concluido que los problemas de producto cartesiano son los más difíciles (Mulligan & Mitchelmore, 1997; Nesher, 1992), en el caso del estudiante de este estudio, logró resultados exitosos una vez comenzada la instrucción que generalizó a problemas de dos operaciones. Por lo tanto, los resultados del estudio se alinean con los trabajos sobre la evaluación de eficacia del enfoque COMPS en alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas (Xin 2012; Xin et al., 2011; Xin et al., 2020).

El enfoque COMPS de instrucción directa (modelado, práctica guiada y retroalimentación continua del profesor), unido al uso de diagramas esquemáticos y de una hoja de pautas, se ha mostrado efectivo. Además, se han incorporado apoyos visuales a la hoja de pautas (Wong et al., 2015) para favorecer la comprensión verbal. Estos aspectos han podido mostrarse especialmente útiles dadas ciertas de las características del TEA, como pueden ser las habilidades de procesamiento visual y las dificultades de lenguaje o déficits en funciones ejecutivas. Además, ha sido posible concretar el método a las características particulares de Pedro, por ejemplo, explicándole algún término desconocido para él o sugiriéndole que utilizase representaciones visuales.

El estudiante adquirió estrategias de operaciones durante la instrucción, que combinó con el uso de estrategias de modelado con dibujo. Además, en los problemas de dos operaciones en los que no logró explicitar las operaciones, sí pudo resolverlos mediante

estrategias de modelización con diagramas de árbol y dibujos detallados. Esto está en línea con estudios previos de instrucción en resolución de problemas con estudiantes de desarrollo típico (Tillema, 2013) y con estudiantes con TEA (Bruno et al., 2021; Polo-Blanco et al., 2019). En estos últimos, se observa una evolución a estrategias de operaciones, aunque persisten estrategias de modelización basadas en dibujos detallados (Polo-Blanco et al., 2019).

La investigación se ha llevado a cabo mediante un diseño de caso único, lo que no permite la generalización de los resultados obtenidos a otros sujetos con TEA y discapacidad intelectual. Se necesitan, por tanto, futuras investigaciones que repliquen y valoren la eficacia de la metodología COMPS para el aprendizaje de la resolución de problemas multiplicativos con otros estudiantes con características similares. Es necesario avanzar en el conocimiento de las adaptaciones metodológicas que pueden realizarse para potenciar las fortalezas de los estudiantes diagnosticados con TEA – por ejemplo, sus habilidades de razonamiento visual – y saber cómo ayudarles a superar dificultades relacionadas con la comprensión de palabras o los déficits en la función ejecutiva ante la resolución de problemas multiplicativos.

Es importante seguir estudiando la eficacia de esta y otras metodologías didácticas específicas que contribuyan a mejorar las habilidades matemáticas de estudiantes con TEA para que puedan beneficiarse del acceso a una cualificación académica que podría ser determinante en el futuro. Por otra parte, los efectos de una intervención educativa adecuada pueden traducirse en un aumento de los niveles de autoestima, autonomía y desarrollo de las personas con TEA que entran en la edad adulta (Fourqurean et al., 1991).

Agradecimientos

Trabajo financiado por proyecto PID2019-105677RB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

- Alghamdi, A., Jitendra, A., & Lein, A. E. (2020). Teaching students with mathematics disabilities to solve multiplication and division word problems: the role of schema-based instruction. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 125–137. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01078-0>
- Bae, Y. S., Chiang, H. M., & Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45(7), 2200–2208. <https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8>
- Booth, R., Charlton, R., Hughes, C., & Happé, F. (2003). Disentangling weak coherence and executive dysfunction: Planning drawing in Autism and ADHD. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 358, 387–392.
- Bruno, A., Polo-Blanco, I., González M.J., & González-Sánchez, J. (2021) Strategies for solving addition problems using modified schema-based instruction in students with intellectual disabilities. *Mathematics* [Special Issue: Research on powerful ideas for enriching school mathematical learning], 9(1814), 1-17.

- Delisio, L., Bukaty, C., & Taylor, M. (2018). Effects of a graphic organizer intervention package on the mathematics word problem solving abilities of students with autism spectrum disorders. *The Journal of Special Education Apprenticeship*, 7(2), 1-22.
- Desmarais, K., Osana, H. P., & Lafay, A. (2019). Schema-Based Instruction: Supporting children with learning difficulties and intellectual disabilities. In K. M. Robinson, H. P. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 203-221). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1>
- Engelmann, S. (1980). *Direct instruction*. Prentice Hall.
- English, L. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451-475.
- Fourqorean, J. M., Meisgeier, C., Swank, P. R., & Williams, R. E. (1991). Correlates of postsecondary employment outcomes for young adults with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 24(7), 400-405. <https://doi.org/10.1177/002221949102400704>
- Gast, D. L., Lloyd, B. P., & Ledford, J. R. (2014). Multiple baseline and multiple probe designs. *Single case research methodology: Applications in special education and behavioral sciences*, 3, 276-328.
- Gevarter, C., Bryant, D. P., Bryant, B., Watkins, L., Zamora, C., & Sammarco, N. (2016). Mathematics interventions for individuals with autism spectrum disorder: A systematic review. *Review Journal of Autism and Developmental Disorders*, 3(3), 224-238. <https://doi.org/10.1007/s40489-016-0078-9>
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276-295). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Happe, F., Booth, R., Charlton, R., & Hughes, C. (2006). Executive functioning deficits in autism spectrum disorders and attention-deficit/hyperactivity disorder: examining profiles across domains and ages. *Brain and Cognition*, 61(1), 25-39.
- Hart-Barnett, J. E., & Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and training in autism and developmental disabilities*, 50(2), 172-185.
- Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, 28(1), 9-38.
- Kasap, C., & Ergenekon, Y. (2017). Effects of a schema approach for the achievement of the verbal mathematics problem-solving skills in individuals with autism spectrum disorders. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17(6), 1787-1809.
- Lee, K., Ng, E. L., & Ng, S.F. (2009). The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 273-287.
- Levingston, H. B., Neef, N. A., & Cihon, T. M. (2009). The effects of teaching precurent behaviors on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 42(2), 361-367.
- Montague, M. (2003). *Solve it! A practical approach to teaching mathematical problem-solving skills*. Exceptional Innovations.
- Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997) Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330.
- Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 189-219). Lawrence Erlbaum Associates.
- Ozonoff, S., & Schetter, P. L. (2007). Executive dysfunction in autism spectrum disorders. In L. Meltzer (Ed.), *Executive function in education. From theory to practice* (pp. 133-160). Guilford.
- Pinto, S. M., Spinillo, A. G., & Melo, L. M. D. S. (2018). Problems of cartesian product solved by elementary school students. *Educação & Realidade*, 43(1), 293-311
- Polo-Blanco, I., González, M.J., & Bruno, A. (2019). An exploratory study on strategies and errors of a student with autism spectrum disorder when solving partitive division problems. *Revista Brasileira de Educação Especial*, 25(2), 247-264.

- Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A., & González-Sánchez, J., (2021) Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*, 1-14. <https://doi.org/10.1177/07319487211061421>
- Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A., & González, M. J. (2022). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with autism spectrum disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 57(1), 31-43.
- Rockwell, S. B., Griffin, C. C., & Jones, H. A. (2011). Schema-Based Strategy Instruction in Mathematics and the Word Problem-Solving Performance of a Student with Autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 26(2), 87-95.
- Root, J. R., Browder, D. M., Saunders, A. F., & Lo, Y. (2016). Schema-Based Instruction with concrete and virtual manipulatives to teach problem solving to students with autism. *Remedial and Special Education*, 38(1), 42-52.
- Schopler, E., Reichler, R. J., & Renner, B. R. (1988). *Childhood Autism Rating Scale*. Western Psychological Services.
- Swanson, H. L., & Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, 79(3), 294-321.
- Tillema, E. S. (2013). A power meaning of multiplication: Three eighth graders' solutions of Cartesian product problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 331-352.
- Van Vaerenbergh, S., Polo-Blanco, I., González-de Cos, L., & Goñi-Cervera, J. (en prensa) Informal strategies of students with autism spectrum disorder in solving Cartesian product problems. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*.
- Wechsler, D. (2015). *WISC-V. Escala de inteligencia de Wechsler para niños-V*. Madrid: Pearson (Edición original, 2014).
- Whitby, P. J. S. (2012). The effects of Solve It! on the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 28(2), 78-88.
- Wong, C., Odom, S. L., Hume, K. A., Cox, A. W., Fettig, A., Kucharczyk, S., ... & Schultz, T. R. (2015). Evidence-based practices for children, youth, and young adults with autism spectrum disorder: A comprehensive review. *Journal of autism and developmental disorders*, 45(7), 1951-1966. <https://doi.org/10.1007/s10803-014-2351-z>
- Xin, Y. P. (2012). *Conceptual model-based problem solving: Teach students with learning difficulties to solve math problems*. Sense Publishers.
- Xin, Y. P. (2019). The effect of a conceptual model-based approach on 'additive' word problem solving of elementary students struggling in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 51(1), 139-150. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1002-9>
- Xin, Y. P., Park, J. Y., Tzur, R., & Si, L. (2020). The impact of a conceptual model-based mathematics computer tutor on multiplicative reasoning and problem-solving of students with learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100762.
- Xin, Y. P., Wiles, B., & Lin, Y. (2008). Teaching conceptual model-based word-problem story grammar to enhance mathematics problem solving. *The Journal of Special Education*, 42(3), 163-178.
- Xin, Y. P., Zhang, D., Park, J. Y., Tom, K., Whipple, A., & Si, L. (2011). A comparison of two mathematics problem-solving strategies: facilitate algebra-readiness. *Journal of Educational Research*, 104(6), 381-395. <https://doi.org/10.1080/00220671.2010.487080>
- Zhang, D., Xin, Y. P., Harris, K., & Ding, Y. (2014). Improving multiplication strategic development in children with math difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 37(1), 15-30.