

# A aprendizagem dos números racionais através de uma abordagem integrada das suas diferentes representações

## Learning rational numbers through an integrated approach of their different representations

**Sofia Graça** 

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa  
Portugal  
soffiagraca@hotmail.com

**João Pedro da Ponte** 

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa  
Portugal  
jpponte@ie.ulisboa.pt

**António Guerreiro** 

Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve  
Portugal  
aguerrei@ualg.pt

**Resumo.** Este estudo tem como objetivo perceber que compreensão revelam os alunos do 5.º ano das diferentes representações simbólicas dos números racionais e da conversão entre elas, antes e após a realização de uma experiência de ensino que valoriza o uso de modelos geométricos. Os participantes são quatro alunos de uma turma e, para a recolha de dados, foram usados dois testes – inicial e final –, complementados com a realização de entrevistas semiestruturadas individuais. Os resultados indicam que, antes da experiência de ensino, os alunos tinham um conhecimento limitado das diferentes formas de representar simbolicamente números racionais e da conversão entre elas, que faziam procedimentalmente, ou seja, aplicando os respetivos algoritmos. Apenas mostravam mais familiaridade com a representação em fração. Após a experiência de ensino, estes alunos mostraram conhecimento das representações em fração, numeral decimal e percentagem e passaram a fazer conversões entre elas evidenciando compreensão concetual. O uso de modelos parece ter contribuído para o desenvolvimento das compreensões referidas.

*Palavras-chave:* números racionais; ensino básico, representações; conversão entre representações.

**Abstract.** This study aims to understand grade 5 students' understanding of the different rational number representations and the conversion between them, before and after a teaching experiment.

The participants are four students from a class, and, for data collection, two tests were used – pre-test and post-test –, complemented with individual semi-structured interviews. The results indicate that, before the teaching experiment, students had limited knowledge of rational number symbolic representations and the conversion between them, which they did procedurally. They just showed more familiarity with the fraction representation. After the teaching experiment, these students showed knowledge about fractions, decimals and percents and started to make conversions between them with conceptual understanding. The use of models seems to have contributed to the development of these concepts.

*Keywords:* rational numbers; basic education; representations; conversion between representations.

## **Introdução**

Os números racionais estão muito presentes no currículo do ensino básico bem como ao longo de toda a escolaridade (Lamon, 2007). A flexibilidade no uso das suas representações simbólicas e da conversão entre elas é enfatizada por Post et al. (1993), como sendo parte integrante da sua compreensão. Contudo, mesmo em anos mais avançados, muitos alunos demonstram dificuldades no tópico referido (Kara & Incikabi, 2018), o que dita a necessidade de continuar a desenvolver pesquisa sobre o tema. Segundo Siegler et al. (2013), o conhecimento dos números racionais é construído através de uma reorganização concetual progressiva dos números inteiros, porém, as diferenças entre estes conjuntos numéricos devem ser compreendidas pelos alunos, designadamente a existência ou não de densidade e as diferenças que as próprias representações simbólicas dos números racionais têm entre si. Contudo, as metodologias de ensino usadas na abordagem aos números racionais e às suas representações, muitas vezes, têm por base aspetos procedimentais que não estabelecem relações entre estas representações, sendo frequentemente, apontadas como a causa do insucesso dos alunos (Aksoy & Yazlik, 2017). O uso de modelos, entendidos como representações que refletem aspetos matemáticos e que podem assumir diferentes formas (Morais et al., 2018b), aqui considerados como representações pictóricas, embora existam outros modelos, pode contribuir para uma melhor compreensão, por parte dos alunos, dos números racionais e da conversão entre as suas representações. Considerando que os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados de forma interligada, este estudo tem como objetivo perceber que compreensão revelam os alunos do 5.º ano das diferentes representações simbólicas dos números racionais e da conversão entre elas antes e após a realização de uma experiência de ensino que valoriza o uso de modelos.

## Enquadramento teórico

As representações são fundamentais na Matemática e muitos autores defendem a sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos, muitas vezes, abstratos (Bennett et al., 2019; Fosnot & Dolk, 2002). Assumindo a perspetiva de Bruner (1999), as representações podem ser ativas, icónicas ou simbólicas. O autor associa representações ativas a ações ou a modelos manipuláveis. As representações icónicas são associadas a modelos, como modelos geométricos, modelos de área ou o modelo da reta numérica, e a sua importância em sala de aula é indiscutível. Estas representações permitem: (i) compreender conceitos abstratos ou a relação entre eles; (ii) representar visualmente a grandeza dos números; e (iii) clarificar e organizar a informação para uma melhor compreensão da situação ao nível da resolução de problemas (Blomberg et al., 2021; Lee et al., 2017). As representações simbólicas, por seu lado, estão associadas a uma linguagem formal. Sendo as representações simbólicas dos números racionais o foco deste estudo, e atendendo à sua importância, são discutidas de seguida de forma mais detalhada, sendo tecidas considerações relativas às dificuldades que, muitas vezes, representam para os alunos e aos erros frequentes que estes cometem em tarefas nas quais estas surgem.

## Fração

Dependendo do contexto em que aparecem, as frações podem ter diferentes significados, nomeadamente a relação parte-todo, os significados quociente, operador ou medida, porém, é frequente os alunos entenderem uma fração  $\frac{a}{b}$  apenas como o número de partes iguais em que a unidade está dividida ( $b$ ) e o número de partes consideradas dessa unidade ( $a$ ). Na perspetiva de Lamon (2007) e Cadez e Kolar (2018), tal indica que a abordagem ao conceito de fração é, maioritariamente, feita através do sombreamento de partes de figuras, em que as partes não podem exceder o todo, privilegiando o significado parte-todo das frações. Consequentemente, os alunos, muitas vezes, consideram as frações como dois números inteiros independentes e pensam que as frações representam sempre uma quantidade menor ou igual a 1. Desta forma, evidenciam incompreensão da grandeza das frações, considerando de maior grandeza as frações em que os termos envolvidos são maiores (Aksoy & Yazlik, 2017; Post et al., 1993). Por outro lado, os alunos, quando se deparam com frações impróprias, tendem a inverter os seus termos de forma a fazerem mais sentido para si (Alkhateeb, 2019). O uso de valores de referência, como o referencial de metade (Behr & Post, 1992), ou o uso de frações unitárias e sua iteração que permite atribuir significado a frações impróprias (Norton et al., 2018) podem ajudar os alunos a determinar de forma adequada a grandeza das frações.

## Numeral decimal

Apesar das inúmeras situações em que os numerais decimais surgem no dia-a-dia, os alunos, muitas vezes, demonstram não compreender o sistema de numeração que lhes está subjacente. É frequente revelarem incompreensão da sua densidade, ou seja, pensam que, entre 0,35 e 0,36 não existem mais números ou que, entre 1,25 e 1,27, só existe o 1,26 (Choy, 2021). Também é habitual usarem a *regra do número inteiro* para a ordenação de numerais decimais ao considerarem que os de maior grandeza são os que têm maior número de casas decimais, sendo a parte decimal encarada como um número inteiro (Roell et al., 2019). Outro erro comum relaciona-se com o zero, em que os alunos desconsideram o seu valor posicional, isto é, consideram que 1,025 é o mesmo que 1,25 (Pérez, 1997). A *regra da fração* também é, muitas vezes, usada pelos alunos quando tentam converter um numeral decimal numa fração e vice-versa (Liu et al., 2014). Segundo esta regra, a vírgula do numeral decimal é substituída pelo traço de fração, conduzindo ao erro de considerar que 2,35 é equivalente a  $\frac{2}{35}$  ou que  $\frac{3}{4}$  é equivalente a 3,4.

## Percentagem

O conceito de percentagem tem causado algumas dificuldades nos alunos, pelo que alguns aspetos devem ser tidos em consideração na sua abordagem, designadamente a sua medida relativa (Büscher, 2021). Neste sentido, percentagens superiores a 100% também constituem um obstáculo para os alunos que entendem que o seu máximo é 100%, o que, segundo Hawera e Taylor (2011), acontece porque as percentagens são associadas à relação parte-todo, levando os alunos a pensar que as partes não podem exceder o todo. Como consequência de incompreensões relativas ao conceito de percentagem, Payne e Allinger (1984) referem que é frequente os alunos converterem uma percentagem num numeral decimal ou vice-versa usando a *regra do numerador*, que consiste em substituir o símbolo da percentagem à direita do número por uma vírgula à esquerda desse número e vice-versa (por exemplo, 0,254 é convertido em 254%). Segundo Guerreiro et al. (2018a), a percentagem é caracterizada por três aspetos essenciais: (i) está muito presente no quotidiano, sendo intuitiva a comparação de algo com 100; (ii) a sua notação é mais próxima da notação dos números inteiros do que o numeral decimal ou a fração; e (iii) relaciona-se facilmente com as outras representações simbólicas dos números racionais. Assim, independentemente das dificuldades que os alunos possam demonstrar com este conceito e de lhe ser atribuído, muitas vezes, um papel secundário na abordagem aos números racionais, diversos estudos mostram a importância de partir do conceito de percentagem para promover a compreensão da fração e do numeral decimal e da natureza relacional dos

números racionais (Gray et al., 2018; Guerreiro et al., 2018a, 2018b; Moss & Case, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

### **Relação entre representações e o papel dos modelos**

Segundo Tripathi (2008), a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de um conceito mostra a compreensão geral desse conceito, considerando que cada representação apresenta uma perspetiva diferente. No caso dos números racionais, é a capacidade de fazer transformações entre e dentro de sistemas de representação que permite aos alunos construir as relações entre representações e, de forma progressiva, atribuir significado aos conhecimentos relativos a estes números, além de que permite aceder aos processos de raciocínio dos alunos (Duval, 2006; Post et al., 1993). Isto pode ser útil na medida em que, para determinada situação, um aluno pode preferir usar um tipo de representação e, numa outra situação, usar uma representação diferente. Por exemplo, Gray et al. (2018) referem que os alunos revelam preferência pelo uso da representação em numeral decimal em contextos de medição (contextos contínuos). Sendo flexíveis na conversão entre representações, poderão facilmente converter para numeral decimal quantidades expressas noutra representação e, conseqüentemente, ter um melhor desempenho.

Considerando a complexidade de perceber o mesmo objeto matemático em diferentes representações que podem diferir muito entre si, tanto em termos de características como de conteúdo (Duval, 2006), o uso de modelos geométricos, como representações icónicas, pode ser um auxílio à sua compreensão pelos alunos (Fosnot & Dolk, 2002; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). No caso particular do modelo da grelha  $10 \times 10$ , a sua estrutura de base 100 permite perceber o valor de posição dos algarismos, a grandeza dos números, associada à concetualização de unidade, uma vez que decorre da sua relação com a unidade de referência, bem como a equivalência entre as representações, além de que permite a representação de números racionais em diferentes representações simbólicas (Büscher, 2021; Cramer et al., 2009; Morais et al., 2018a, 2018b).

### **Metodologia de investigação**

Este estudo, qualitativo e interpretativo (Erickson, 1986), tem como objetivo perceber que compreensão revelam os alunos do 5.º ano das diferentes representações simbólicas dos números racionais e da conversão entre elas, antes e após a realização de uma experiência de ensino que privilegiou o uso de modelos. Os participantes são 4 dos 20 alunos de uma turma do 5.º ano, entre os 9 e os 11 anos, pertencentes a uma escola pública no Algarve, selecionados por apresentarem relativa facilidade na comunicação oral e resoluções com diferentes níveis de desempenho, de algum modo ilustrativas do trabalho da restante turma.

O estudo seguiu uma metodologia de Investigação Baseada em Design (Cobb et al., 2016), devido à sua característica intervencionista. Contemplou dois ciclos de realização, sendo os dados aqui apresentados relativos ao ciclo de realização II (2018/2019).

Para a recolha de dados, foram usados dois testes. O teste inicial, aplicado antes da experiência de ensino, pretendia identificar os conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito às representações dos números racionais e à conversão entre elas, entre outros conceitos relativos a estes números. O teste final, aplicado no final da experiência de ensino, pretendia verificar as aprendizagens dos alunos resultantes desta experiência, relativas ao tópico em questão. A escolha das representações simbólicas dos números racionais e da conversão entre elas baseia-se na sua importância ao nível da compreensão geral dos números racionais e pelo facto de os alunos continuarem a demonstrar dificuldade nestes conceitos. Foram também realizadas entrevistas semiestruturadas aos quatro alunos, conduzidas pela primeira autora deste artigo, onde eles tinham a possibilidade de explicar a forma como tinham pensado em cada questão do teste. Estas entrevistas foram gravadas em áudio, transcritas e analisadas na íntegra, permitindo, juntamente com os resultados dos alunos em ambos os testes, analisar os resultados de forma mais aprofundada e completa.

### **A experiência de ensino**

A experiência de ensino referente ao ciclo de realização II contou com 15 tarefas construídas pela primeira autora deste artigo, com o apoio dos restantes autores. Tinha como objetivo promover o desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca das representações simbólicas dos números racionais e da conversão entre elas, dos significados das frações e das operações com números racionais nesta representação. O uso de modelos esteve presente em todo o estudo, nomeadamente modelos geométricos e o modelo da grelha  $10 \times 10$ , como forma de auxiliar a compreensão destes conceitos pelos alunos e de favorecer o desenvolvimento de imagens mentais para as quantidades e a relação entre elas. Pretendia-se que a experiência de ensino constituísse uma trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995), ou seja, que, através da realização de uma sequência de tarefas cuidadosamente elaborada, os alunos progredissem na aprendizagem dos conhecimentos pretendidos.

A construção das tarefas teve por base os dados do ciclo de realização I, a planificação do grupo disciplinar e a revisão de literatura. A sua construção e implementação foi da responsabilidade da primeira autora deste artigo, que conduziu as aulas da experiência de ensino, tendo o professor titular da turma apresentado sugestões ocasionalmente, quando achava pertinente. A realização das tarefas em sala de aula seguiu uma abordagem exploratória (Ponte, 2005), ou seja, a tarefa era apresentada aos alunos, estes resolviam-na maioritariamente de modo individual (por opção do professor, que sugeriu que o

comportamento dos alunos em sala de aula não permitia que fossem realizadas em grupo), no final, havia uma discussão coletiva e uma síntese das ideias principais.

Na tarefa 1 da experiência de ensino, os alunos foram solicitados a indicar, em percentagem a quantidade sombreada em diferentes representações pictóricas, usadas como modelos, que pretendiam representar a carga de diferentes pilhas, nomeadamente 25%, 50%, 75% e 100%. Este conceito recebeu especial atenção neste estudo e foi introdutório das representações simbólicas dos números racionais, partindo de percentagens mais frequentes, que representam valores de referência, para chegar a percentagens menos comuns. Seguiu-se a representação em fração para as mesmas quantidades. Os alunos relacionaram-nas com as respetivas percentagens, procurando diferentes representações para o mesmo número.

O conceito de fração foi abordado de forma bastante elementar, usando os modelos anteriores como forma de promover nos alunos a compreensão de fração como um número ou uma quantidade, a sua grandeza e o significado do denominador, bem como o conceito de fração unitária e sua iteração. De forma a verificar a adequação das respostas, os alunos deveriam dividir estas quantidades em partes iguais e confirmar se obtinham a totalidade, nomeadamente, comparando a parte sombreada com o todo para verificar quantas vezes a parte cabia no total.

Na tarefa 2, os alunos deveriam representar as mesmas quantidades na grelha  $10 \times 10$ , de forma a introduzir a representação em numeral decimal. A estrutura de base 100 destes modelos permitiu, igualmente, abordar a percentagem como uma quantidade relativa a 100 e a respetiva equivalência para a representação em fração, com denominador 100, bem como a equivalência de frações. Também nesta tarefa houve a possibilidade de associar o valor de posição dos algarismos à respetiva quantidade que representam, contribuindo para clarificar algumas das conceções erradas que estes alunos tinham relativamente a esta representação dos números racionais. Nas tarefas seguintes, relativas às representações dos números racionais e à conversão entre elas, as três representações surgiram em simultâneo, com valores menos frequentes. Os alunos usaram diferentes estratégias para determinar as quantidades, sendo sempre incentivados a verificar a sua adequação ao tentar visualizar a relação entre a parte considerada e o todo.

## Resultados

Nesta secção, serão apresentados os resultados dos alunos nos testes inicial e final, respetivamente. Em cada teste, os dados estão organizados de acordo com as várias representações (fração, numeral decimal, e percentagem), bem como a conversão entre representações.

## Fração

A representação em fração surgiu em diversas questões do teste inicial, em diferentes contextos. Numa questão que envolvia uma figura constituída por duas luas, que representava  $\frac{1}{3}$  do todo e solicitava a sua reconstrução, destacamos as resoluções de Maria e de Tiago, que acrescentaram apenas uma lua, considerando que o denominador indicava o total de itens do conjunto e ignoraram o numerador. Num problema que envolvia o significado operador das frações, para determinar  $\frac{2}{3}$  de 150 euros que correspondia ao valor gasto numa prenda, Maria converteu a fração  $\frac{2}{3}$  no número inteiro 23 que referiu ser o valor da prenda. Helena, pelo seu lado, multiplicou a fração operador pela quantidade inicial, obtendo  $\frac{300}{3}$  e referiu que a prenda custaria 300 euros “porque o de baixo não se conta”. Pedro e Tiago, pelo seu lado, compreenderam que “cada  $\frac{1}{3}$  iria ser 50 euros, por isso,  $\frac{2}{3}$  é 100 euros” (Pedro). Num problema que envolvia o significado de medida das frações, os alunos tinham de determinar o comprimento de diferentes barras, com base no comprimento da unidade de medida,  $\frac{1}{2}$ . Helena manteve o numerador 1 em todas as frações, referindo “a gente aqui não vê os de cima, quando é 1” e indicou os denominadores de acordo com o comprimento crescente das barras. Tiago (Figura 1) converteu a fração  $\frac{1}{2}$  no numeral decimal 1,2, justificando “eu não tinha régua, mas pareceu que tinha 1,2 centímetros” e verificou quantas vezes conseguia adicionar esse comprimento em cada uma das barras.

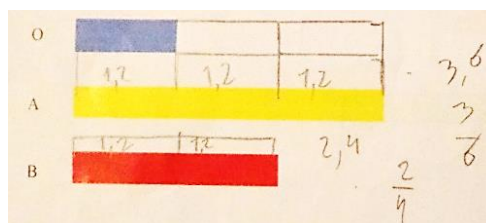


Figura 1. Resolução de Tiago da questão 6

Para apresentar a sua resposta, Tiago converteu os resultados obtidos em frações, seguindo a mesma estratégia incorreta. Pedro conseguiu estabelecer relações entre os comprimentos das diferentes barras, contudo, não os conseguiu indicar usando frações, apenas numerais decimais (por exemplo: 1,5 para a barra amarela). Num outro problema, que envolvia a comparação de frações, a maioria dos alunos indicou que  $\frac{2}{6}$  e  $\frac{1}{2}$  eram as frações de maior e de menor grandeza, respetivamente, considerando que a fração que representava menor grandeza era aquela em que os termos envolvidos eram menores.



## Numeral decimal

Numa questão que envolvia a ordenação de numerais decimais (0,5; 5,01; 2,329; 0,459), a maior parte dos alunos considerou que os de menor grandeza eram os que tinham menos dígitos “depois da vírgula”, mobilizando o seu conhecimento de números inteiros. Comparando os numerais 0,5 e 0,459, Tiago justificou “aqui [0,5] tem só 5, que é mais pequeno que 459”. Porém, algumas vezes consideraram a parte inteira, inicialmente, sem seguir um critério lógico. Pedro começou por analisar as partes inteiras dos numerais. Quando estas coincidiram, analisou as posições decimais, uma a uma, compreendendo a respetiva grandeza. Numa questão que envolvia a reconstrução pictórica de uma figura constituída por três triângulos que representavam 0,6 do todo, o desempenho da maior parte dos alunos foi fraco. Sem estabelecer qualquer relação entre o numeral e a figura, Maria reproduziu uma figura igual à inicial (Figura 2), enquanto Helena reproduziu a figura em todo o espaço disponível para a questão.

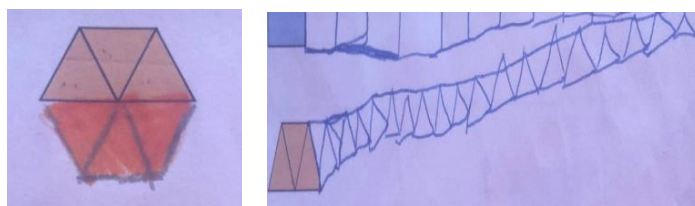


Figura 2. Resoluções de Maria (esquerda) e de Helena (direita) da questão 2

Tiago, por seu lado, deixou a questão em branco por não conseguir determinar o valor de cada triângulo. Apenas Pedro compreendeu a grandeza do numeral, acrescentando mais dois triângulos à figura inicial.

## Porcentagem

Numa questão que solicitava a reconstrução de uma figura formada por três retângulos, que correspondia a 75% do todo, Helena voltou a reproduzir toda a figura no espaço disponível, ignorando o valor apresentado, enquanto Maria acrescentou quatro retângulos e sombreou dois deles. Justificou que o número 7 indicava o total de retângulos da figura e que o número 5 indicava os que deviam estar sombreados, estabelecendo uma associação com a fração. Pedro e Tiago compreenderam que cada retângulo correspondia a 25%, pelo que acrescentaram mais 1, de forma a obter 100%. Numa questão que solicitava o sombreamento de 25% de uma figura constituída por oito retângulos, Maria (Figura 3) fez o seguinte sombreamento:

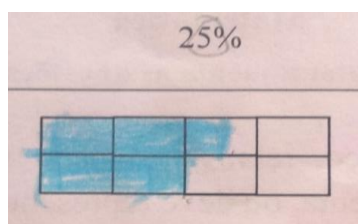


Figura 3. Resolução de Maria da questão 3

A aluna sombreou metade da figura sem o conseguir justificar. Quanto ao restante sombreamento (metade de um retângulo), referiu “como temos ali o 5, que é meia, pintei mais metade de um retângulo!”. Helena referiu a impossibilidade de resolver a questão, baseando-se na forma como entendia a conversão entre a percentagem e a fração: “aqui, eu pintei 5, porque a fração era  $\frac{5}{2}$  [...] pintei 5 e era suposto deixar 2 para pintar, só que eu deixei 3! A figura não dava para fazer!”. Pedro e Tiago compreenderam que podiam dividir a figura em quatro partes iguais, e que cada uma delas representava 25%, pelo que pintaram uma dessas partes.

### Conversão entre representações

A conversão entre representações surgiu numa questão do teste inicial em que, partindo de uma representação, pictórica ou simbólica, os alunos tinham de fazer as restantes. Maria (Figura 4) e Helena, perante um conjunto constituído por oito círculos com quatro deles sombreados, indicaram que a parte sombreada correspondia a  $\frac{4}{8}$ , 4,8 e 48%, usando esta estratégia em outras situações. Durante a entrevista, Helena, quando questionada relativamente à possibilidade de existirem percentagens superiores a 100%, referiu “o máximo é 100, como nos testes”, compreendendo a percentagem como um valor fixo e não como uma relação.

Representação pictórica	Fração	Numeral decimal	Percentagem
	$\frac{4}{8}$	4,8	48%
	$\frac{1}{5}$	1,5	15%
	$\frac{1}{4}$	1,1	11%
	$\frac{1}{4}$	1,4	14%
	$\frac{5}{7}$	1,5	75%

Figura 4. Resolução de Maria da questão 1

Quando foi fornecida a percentagem 75% que, seguindo este raciocínio, seria  $\frac{7}{5}$ , Maria inverteu os termos indicando  $\frac{5}{7}$ . Justificou “neste fiquei na dúvida, porque a gente não pode tirar 7 de 5” e fez uma representação pictórica de  $\frac{5}{7}$ . Quanto à figura totalmente sombreada, compreendendo que correspondia à fração  $\frac{1}{1}$ , Helena e Maria indicaram as representações 1,1 e 11%. Tiago teve um desempenho semelhante ao das colegas, porém, para efetuar a representação em percentagem, baseou-se nas representações pictóricas. Apesar de ter representado o numeral 1,5 como  $\frac{1}{5}$  e uma representação pictórica associada a esta fração, Tiago compreendeu que a figura traduzia a percentagem 20%. Quando partiu da percentagem 75%, indicou a fração  $\frac{5}{7}$ , justificando: “tive de trocar para conseguir fazer”. Pedro interpretou corretamente a grandeza de cada representação. Apenas o numeral decimal 1,5 constituiu um obstáculo para este aluno, que o associou a 4 figuras com 3 delas sombreadas e, conseqüentemente, às representações  $\frac{3}{4}$  e 75%.

### Fração

Numa questão do teste final que solicitava o cálculo de  $\frac{2}{3}$  de 15 km, todos os alunos tiveram um desempenho positivo, baseando-se na compreensão de fração unitária: “cada 5 km é  $\frac{1}{3}$ , logo,  $\frac{2}{3}$  é 10! Os  $\frac{3}{3}$  era 15” (Maria). Num contexto de medida, os alunos tinham uma barra que correspondia à unidade de medida e tinham de determinar o comprimento de outra barra maior. Pedro (Figura 5), Maria e Tiago obtiveram a fração unitária  $\frac{1}{2}$  da quantidade dada, e iteraram-na para obter o comprimento desejado, ou seja,  $\frac{4}{2}$ .

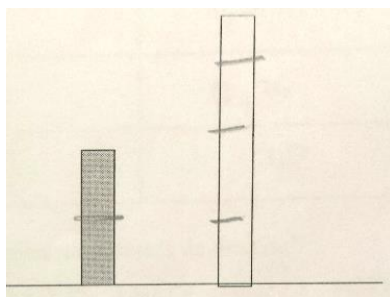


Figura 5. Resolução de Pedro da questão 9

Tiago justificou: “aqui representava  $\frac{1}{2}$ , ...  $\frac{2}{2}$ , ...  $\frac{3}{2}$ , ...  $\frac{4}{2}$ ! Fui fazendo por meios, por meios, até chegar aos  $\frac{4}{2}$ , que é cá em cima!”. Num questão que envolvia a adição das frações  $\frac{5}{12}$  e  $\frac{1}{4}$ , correspondentes a duas frações de alunos de uma turma que se encontraram no intervalo

para brincar, os participantes do estudo tiveram um bom desempenho a vários níveis. Por exemplo, para justificar o uso de denominadores iguais, Pedro referiu que “12 bocadinhos de uma coisa são muito mais pequenos do que 4 bocadinhos de uma coisa igual”, enquanto Helena usou a modelação, isto é, tentou representar as quantidades envolvidas em modelos que reproduziu, tendo justificado: “aqui  $[\frac{5}{12}]$ , os bocadinhos ficaram mais pequenos do que aqui em baixo e, para somar tudo, têm de estar do mesmo tamanho [...] temos mais partes em cima, mas as de baixo são maiores porque são menos!”. O resultado obtido,  $\frac{8}{12}$ , foi interpretado da seguinte forma: “acho que está bem porque primeiro foi quase metade da turma e depois, com mais este bocadinho aqui  $[\frac{3}{12}]$ , dá um bocadinho mais de metade, e  $\frac{8}{12}$  é um bocadinho mais de metade! Metade era se fosse  $\frac{6}{12}$ ” (Maria).

### **Numeral decimal**

Numa questão que envolvia a ordenação de numerais decimais (0,15; 2,35; 0,25; 1,475; 2,035; 0,125), Pedro e Tiago demonstraram compreender a grandeza de cada numeral, associando corretamente cada posição decimal à quantidade que correspondia no modelo da grelha 10×10: “2,035 é o menor porque, depois das duas unidades, só pintamos 3 centésimas, que são 3 quadradinhos. No outro [2,35], pintamos 3 décimas, que são as barras!” (Tiago). Assim, estes alunos verificaram que as posições decimais indicavam uma medida mais precisa. Pedro fez ainda referência ao zero como “rasteira”, referindo que a sua posição “muda tudo”. Durante a entrevista, também mostraram flexibilidade em associar as quantidades a outras representações dos números racionais, mesmo sem ser solicitado, nomeadamente fazendo referência à respetiva percentagem.

Para ordenar os numerais, Maria e Helena tentaram basear-se na estratégia de acrescentar zeros de forma a igualar o número de casas decimais (sugerida pelo professor titular durante as aulas, a alguns alunos), contudo, acabaram por misturar diferentes estratégias originando resoluções que nem as próprias alunas conseguiam interpretar. Durante as respetivas entrevistas, sugeri-lhes que tentassem novas estratégias de resolução. Estas alunas, desta vez com mais sucesso, tentaram analisar a grandeza dos numerais fazendo referência ao modelo da grelha 10×10, tal como os colegas. Maria também foi capaz de estabelecer paralelos com outras representações, nomeadamente com a percentagem, sobre a qual referiu ter desenvolvido preferência: “[0,125] é aproximadamente 12% porque as milésimas são tão pequenas que quase não faz nada!”.

## Percentagem

À semelhança de uma questão que surgiu no teste inicial, também no teste final os alunos tinham de sombrear 25% de um modelo retangular constituído por 8 retângulos dispostos na forma 2 por 4. Todos os alunos tiveram um desempenho adequado, sombreando dois retângulos no modelo. O raciocínio de Helena, “eu consegui fazer 4 grupos iguais e cada grupo vale 25%. Depois, 25% + 25% + 25% + 25% dá os 100%”, espelhou o raciocínio dos restantes alunos, com base no sentido de completude da percentagem. Percentagens superiores a 100% também foram compreendidas pelos alunos, ao contrário do que aconteceu no teste inicial. Este e outros aspetos relativos à compreensão do conceito de percentagem foram evidentes nas questões que envolviam a conversão entre representações e a ordenação de números racionais nas suas diferentes representações simbólicas, pelo que são apresentados a seguir.

## Conversão entre representações

Numa questão do teste final que solicitava a conversão entre representações pictóricas e simbólicas, o desempenho dos alunos foi positivo, comparativamente com o teste inicial, sendo que a resolução de Helena (Figura 6) exemplifica o desempenho geral dos alunos neste tópico.


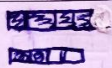
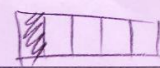


Representação pictórica	Fração	Numeral decimal	Percentagem
	$\frac{1}{2}$	0,50	50%
	$\frac{6}{4}$	1,50	150%
	$\frac{1}{5}$	0,2	20%
	$\frac{3}{4}$	0,75	75%
	$\frac{4}{4}$	1,0	100%

Figura 6. Resolução de Helena da questão 1

A fração  $\frac{1}{2}$  foi facilmente identificada como metade de um todo, associada aos numerais 0,5 ou 0,50 e 50%. A respetiva representação pictórica foi sugerida por Maria como “seis estrelas e pintávamos três”, fazendo referência a unidades discretas. O numeral 1,0 foi também compreendido como 1, uma vez que “não tem nada pintado nas décimas e não tem centésimas nem milésimas” (Pedro) e associado à percentagem 100%. Na sua representação pictórica, os alunos representaram figuras geométricas subdivididas, totalmente sombreadas, indicando a fração de acordo com as características da figura. Nas

situações que forneciam a representação simbólica  $\frac{1}{5}$  e a representação pictórica, os alunos foram igualmente bem-sucedidos, apresentando as respectivas justificações: “podemos ter, tipo, 5 grupinhos iguais e um deles está pintado! Um quinto é um grupinho” (Helena) e “se, destes 4 quadrados, temos 3 pintados, seria  $\frac{3}{4}$ ! Se  $\frac{1}{4}$  vale 0,25, e a gente tem  $\frac{3}{4}$ , vai ser 3 vezes 0,25, que vai dar 0,75. E, com mais 0,25, ia dar  $\frac{4}{4}$ ” (Pedro). O aluno mostrou a preocupação em iterar as quantidades de forma a perfazer o todo.

Todos os alunos referiram compreender que a percentagem 150% correspondia ao numeral 1,5. Representaram duas figuras iguais, divididas no mesmo número de partes, sombreando a primeira totalmente e metade da segunda. A representação em fração foi realizada de acordo com as características da figura. Tiago justificou que a unidade tinha de ser sempre par. Referiu que “aqui, seria 100, e aqui, fazia os 200%. Como só tenho metade em baixo, dá os 150%”. Na sequência desta representação, indicou a fração  $\frac{150}{100}$ , que simplificou até obter  $\frac{3}{2}$  e justificou “também está bem porque  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{2}$  dá  $\frac{2}{2}$  e, com mais  $\frac{1}{2}$ , dá os  $\frac{3}{2}$ !”.

Numa questão que envolvia a ordenação de números racionais ( $75\%$ ;  $1,4$ ;  $2\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{100}$ ;  $0,650$ ), os alunos tiveram igualmente um desempenho adequado, usando diferentes estratégias que evidenciavam as suas preferências. Pedro e Maria estabeleceram paralelos com a percentagem e com o modelo da grelha  $10 \times 10$ . Enquanto Pedro referiu “[ $0,650$ ] é como se fosse 0,65 porque não tem milésimas [...] só pintamos 65 quadradinhos”, Maria justificou “este zero no fim [ $0,650$ ] é que o número não tem milésimas, por isso, é só 6 décimas e 5 centésimas. É como se, nas grelhas de 100 quadradinhos, estivessem pintados 65, então, é 65%” ou “o 1 antes da vírgula é os 100% e, depois, é mais 40%”, relativamente ao numeral 1,4. Tiago usou a representação em fração decimal, com denominador 100, devido à sua relação com a percentagem e à compreensão de 100 como uma referência: “100 é aquele número que eu tenho para comparar os outros. Se é menos que 100, é menor que uma unidade e, se é mais que 100, é maior que uma unidade”. Também usou a estimativa no seu raciocínio ao referir “este aqui [ $1,4$ ] é uma unidade e quase metade de outra, mas não chega!”. Helena apenas resolveu a questão durante a entrevista, baseando-se em estratégias variadas para raciocinar sobre a grandeza dos numerais. Compreendeu a fração  $\frac{3}{100}$  como uma quantidade muito pequena, que associou a três quadradinhos na grelha. O numeral misto  $2\frac{1}{2}$ , por seu lado, foi convertido na fração imprópria  $\frac{5}{2}$ , considerando a divisão do numerador pelo denominador. O resultado obtido, 2,5, foi interpretado como o número de maior grandeza.

## Discussão

Nesta secção, serão discutidos os resultados dos alunos, comparando o seu desempenho antes e no final da experiência de ensino, na representação em fração, em numeral decimal e em percentagem, respetivamente, e ao nível da conversão entre representações.

### Fração

Antes da experiência de ensino, os alunos, na sua maioria, demonstravam incompreensão de grandezas discretas, quando havia a necessidade de considerar subconjuntos de um todo. Foi igualmente visível o entendimento de fração como dois números inteiros independentes, como realçam os estudos de Aksoy e Yazlik (2017) e de Alkhateeb (2019), quando estes alunos consideraram que a fração que representava menor grandeza era aquela em que os termos envolvidos eram menores. Por outro lado, também se verificou que alguns alunos, como Helena, ignoraram um dos termos da fração. Dificuldades relativas à grandeza das frações, também visíveis nos exemplos anteriores, surgiram igualmente em outras questões, como no significado de operador das frações, por parte de Maria. Também foi visível a incompreensão de frações impróprias por parte destes alunos, tal como nos estudos de Alkhateeb (2019), quando converteram 75% em  $\frac{5}{7}$ . Compreender que as frações podem representar quantidades maiores que 1 é fundamental na compreensão de número racional, porém, os alunos mostraram dificuldades neste âmbito.

Após a experiência de ensino, os alunos passaram a compreender uma fração como um número ou uma quantidade. Fizeram, ainda, importantes observações em que manifestaram compreender a relação entre o número de partes em que o todo se divide e a dimensão das partes, ou seja, o papel do denominador na fração. No teste final, estes alunos também demonstraram compreender a grandeza das frações, através do uso flexível de diferentes estratégias. Destaca-se o uso de frações unitárias e da sua iteração, que permite aos alunos atribuir significado a frações impróprias (Norton et al., 2018), tanto no significado de medida, como na interpretação da percentagem. Também o uso de valores de referência, nomeadamente o referencial de metade, permitiu aos alunos analisar a grandeza das frações.

### Numeral decimal

As resoluções e justificações da maior parte dos alunos no teste inicial mostraram dificuldades na compreensão do sistema de numeração decimal e na grandeza destes números, verificando-se a influência do seu conhecimento dos números inteiros. Para ordenarem numerais decimais, destacou-se o uso da *regra do número inteiro* (Liu et al., 2014) que considera que o numeral que representa maior grandeza é aquele que possui

maior número de casas decimais, sendo este um erro frequentemente cometido pelos alunos (Pérez, 1997; Roell et al., 2019). Na reconstrução da figura, dada uma parte, o desempenho da maioria dos alunos também foi inadequado, uma vez que não estabeleceram qualquer relação entre o numeral e a unidade. Apenas Pedro mostrou compreender adequadamente a estrutura destes números.

No teste final, houve uma melhoria na compreensão do conceito de numeral decimal pelos alunos, que passaram a analisar os numerais de acordo com a grandeza de cada posição decimal. Estabeleceram paralelos com o modelo da grelha  $10 \times 10$ , usado durante a experiência. O zero que, antes da experiência, não era considerado por estes alunos, passou a ser mencionado, realçando a importância das suas diferentes posições nos numerais. Isto foi visível na conversão entre representações, em que os alunos compreenderam que 1 era o mesmo que 1,0, ou na ordenação de números racionais em diferentes representações

## Percentagem

Antes da experiência de ensino, os alunos manifestaram alguma dificuldade no conceito de percentagem, entendendo-a como um valor e não como uma relação, sendo este um erro frequente entre os alunos (Fosnot & Dolk, 2002). Nas questões que envolviam a reconstrução da unidade ou o sombreamento, verificou-se que os alunos não estabeleceram qualquer relação entre a figura e a percentagem apresentada, ou converteram, incorretamente, a percentagem apresentada numa outra representação simbólica dos números racionais, originando resoluções incorretas a que os próprios alunos não conseguiam atribuir significado. Apenas Tiago e Pedro tiveram um desempenho adequado. Importa referir que, durante as entrevistas, estes alunos mencionaram que as percentagens eram até 100, razão pela qual não consideraram percentagens superiores a 100%, contudo, não usaram essa compreensão em outras situações. Por exemplo, quando tinham uma figura totalmente sombreada, indicaram a percentagem 11%, proveniente da representação  $\frac{1}{1}$ .

No teste final, foi evidente uma compreensão mais adequada do conceito de percentagem. Os alunos compreenderam que o todo correspondia a 100%, mostrando flexibilidade com a grandeza das partes que o constituem e passaram a atribuir significado a percentagens superiores a 100%, estabelecendo uma comparação com 100 para determinar a sua grandeza, pelo que compreenderam a medida relativa da percentagem, um importante aspeto evidenciado por Büscher (2021), relativamente à compreensão da percentagem: “100 é aquele número que eu tenho para comparar os outros. Se é menos que 100, é menor que uma unidade e, se é mais que 100, é maior que uma unidade” (Tiago). Esta representação ganhou a preferência de alguns alunos, que passaram a usá-la para raciocinar



sobre as quantidades e mencionaram-na em diversas questões do teste final mesmo quando não era solicitada.

### **Conversão entre representações**

No teste inicial, os alunos aplicaram procedimentos incorretos na conversão entre representações, que revelavam incompreensão da grandeza dos números, o que, para Lee et al. (2017), resulta de uma abordagem isolada das representações. Estes alunos usavam a *regra da fração* para converter entre frações e numerais decimais e a *regra do numerador* para fazer conversões entre numerais decimais e percentagens. Apenas a relação entre a representação pictórica e a representação simbólica de fração era estabelecida mais adequadamente, mostrando mais familiaridade neste tipo de tarefas, como também mostram os estudos de Cadez e Kolar (2018) e de Lamon (2007). O desempenho de Tiago mostrou que, analisando as representações pictóricas, em vez do uso de procedimentos, os resultados poderiam ser mais positivos, nomeadamente quanto à representação em percentagem. Apenas Pedro teve um desempenho positivo, baseando-se na grandeza dos numerais para efetuar as conversões:

De um modo geral, os alunos apresentaram um desempenho mais positivo após a experiência de ensino. Passaram a indicar uma quantidade em qualquer representação sem a necessidade de recorrer à respetiva representação pictórica ou de se basear numa representação para fazer as restantes, mostrando flexibilidade com a unidade nas diferentes representações e uma compreensão mais sólida dos números racionais. Argumentaram, por vezes, usando as diferentes representações, mesmo quando não era solicitado, mostrando compreensão conceitual, conhecimento da grandeza dos números e flexibilidade na conversão entre representações o que, segundo Post et al. (1993), é fundamental na compreensão dos números racionais. Na questão que envolvia a ordenação de números racionais em diferentes representações, o conhecimento das diferentes representações e a flexibilidade na sua conversão permitiu aos alunos escolher uma representação que preferiam ou a que melhor se adequava à situação. Isto realça as ideias de Bennett et al. (2019) de que os alunos, por vezes, desenvolvem preferência por uma representação e usam-na nos seus raciocínios.

### **Conclusões**

As ideias iniciais destes alunos sobre números racionais reportam-se, maioritariamente, ao conhecimento das suas estruturas, sem compreenderem os conceitos associados. O seu conhecimento de números inteiros antes da experiência de ensino influenciou fortemente o modo como concebiam os novos conceitos. Trata-se de um conhecimento importante,

havendo a necessidade de ser reconcetualizado. Como consequência da incompreensão concetual de frações, numerais decimais e percentagens, estes alunos basearam-se em procedimentos incorretos para converter entre representações quando foram solicitados a fazê-lo. Em termos gerais, a representação em fração mostrava ser a mais familiar para estes alunos, embora sendo entendida como dois números inteiros independentes e com significados diferentes, em que consideravam, por vezes, apenas um dos termos, embora sendo mais frequente a ideia de que o numerador indicava o total de partes que se deviam considerar numa figura e o denominador indicava o total de partes dessa figura. Os numerais decimais e as frações representaram um obstáculo maior para estes alunos.

Este estudo, em que as representações simbólicas dos números racionais foram abordadas em simultâneo, promovendo a sua conversão, evidenciou resultados positivos, mostrando que esta abordagem é promissora para a compreensão dos números racionais, como salientam os estudos de Post et al. (1993), Duval (2006) e Tripathi (2008). O foco inicial na representação em percentagem, à semelhança do que aconteceu nas investigações desenvolvidas por Guerreiro et al. (2018a, 2018b) e Moss e Case (1999), revelou-se uma mais-valia para as aprendizagens dos alunos e as relações que foram estabelecendo. Os alunos passaram a usar de forma flexível as diferentes representações, adquiriram compreensão da grandeza dos números, e mostraram flexibilidade para pensar sobre os números, usando números de referência. Durante a experiência de ensino foram usados diversos modelos, nomeadamente os modelos geométricos (no início da experiência) e a grelha 10×10. O uso destes modelos teve um importante papel na promoção da compreensão das diferentes representações simbólicas dos números racionais pelos alunos e na conversão entre elas e permitiu a progressão do seu pensamento até ao nível abstrato. Como referem Cramer et al. (2009), a referência a estes modelos nas justificações dos alunos e como auxílio ao seu raciocínio mostra a sua importância na compreensão dos números racionais.

## Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no âmbito de uma bolsa de doutoramento concedida à primeira autora deste artigo, com a referência SFRH/BD/130343/2017.

## Referências

- Aksoy, N., & Yazlik, D. (2017). Student errors in fractions and possible causes of these errors. *Journal of Educations and Training Studies*, 5(11), 219-233. <https://doi.org/10.11114/jets.v5i11.2679>
- Alkhateeb, M. (2019). Common errors in fractions and the thinking strategies that accompany them. *International Journal of Instruction*, 12(2), 339-416. <https://doi.org/10.29333/iji.2019.12226a>
- Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2<sup>nd</sup> ed.) (pp. 201-248). Allyn and Bacon.

- Bennett, A., Inglis, M., & Gilmore, C. (2019). The cost of multiple representations: Learning number symbols with abstract and concrete representations. *Journal of Educational Psychology, 111*(5), 847-860. <https://doi.org/10.1037/edu0000318>
- Blomberg, J., Schukajlow, S., & Rellensmann, J. (2021). Why don't you make a drawing? Motivations and strategy use in mathematical modelling. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (online) (Vol. 2, pp. 111-119). PME.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio d'Água.
- Büscher, C. (2021). Teachers' adaptations of the percentage bar model for creating different learning opportunities. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/10942>
- Cadez, T., & Kolar, V. (2018). How fifth-grade pupils reason about fractions: A reliance on part-whole subconstructs. *Educational Studies in Mathematics, 99*, 335-357. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9838-z>
- Choy, B. H. (2021). Where to put the decimal point? Noticing opportunities to learn through typical problems. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (online) (Vol. 2, pp. 180-188). PME.
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.). *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503).
- Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Rational Number Project: Fraction operations & initial decimal ideas*. [Companion module to RNP: Fraction Lessons for the Middle Grades]. <https://documents.pub/document/rational-number-project-college-of-education-and-number-project-fraction-operations.html?page=1>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Org.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Macmillan.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematician at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Heinemann.
- Gray, M., DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. (2018). Dissociation between magnitude comparison and relation identification across different formats for rational numbers. *Thinking & Reasoning, 24*(2), 179-197. <https://doi.org/10.1080/13546783.2017.1367327>
- Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa, 20*(1), 359-384. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384>
- Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké, 26*(2), 354-374. <https://doi.org/10.20396/zet.v26i2.8651281>
- Hawera, N., & Taylor, M. (2011). "Twenty percent free!" So how much does the original bar weigh? *Australian Primary Mathematics Classroom, 16*(4), 3-7.
- Kara, F., & Incikabi, L. (2018). Sixth grade students' skills of using multiple representations in addition and subtraction operations in fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(4), 463-474. <https://doi.org/10.26822/iejee.2018438137>
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics and learning* (pp. 629-668). Information Age.
- Lee, Y., Chen, H., & Chang, S. (2017). Learning effects of iconic representation animation teaching on the mathematics problem solving process. In Kasetsart University (Org.), *Proceedings of the 10th International Conference on Ubi-media Computing and Workshops (Ubi-Media)* (pp. 1-4). Curran Associates. <https://doi.org/10.1109/UMEDIA.2017.8074132>

- Liu, R., Ding, Y., Zong, M., & Zhang, D. (2014). Concept development of decimals in Chinese elementary students: A conceptual change approach. *School Science and Mathematics*, 114(7), 326-338. <https://doi.org/10.1111/ssm.12085>
- Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae*, 20(4), 552-570. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892>
- Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante*, 27(1), 25-45. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22963>
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147. <https://doi.org/10.2307/749607>
- Norton, A., Wilkins, J., & Xu, C. (2018). A progression of fraction schemes common to chinese and U.S. students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(2), 210-226. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.2.0210>
- Payne, J. N., & Allinger, G. D. (1984). Insights into teaching percent to general mathematics students. Unpublished manuscript, Montana State University, Department of Mathematical Sciences, Bozeman.
- Pérez, J. C. (1997). *Números decimais: Porquê? Para quê?*. Editorial Síntesis.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An Integrations of Research* (pp. 327-362). Lawrence Erlbaum Associates.
- Roell, M., Viarouge, A., Houdé, O., & Borst, G. (2019). Inhibition of the whole number bias in decimal number comparison: A developmental negative priming study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 117, 240-247. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.08.010>
- Siegler, R. S., Fazio, L., Bailey, D., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0438>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>