Conhecimentos associados ao conceito de função manifestados por estudantes dos anos iniciais ao resolverem situações mistas

Knowledge associated with the concept of function manifested by students when solving mixed situations

Carla Larissa Broza Halum Rodrigues
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Brasil
carlahalum@gmail.com

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná e Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Brasil
rezendeveridiana@gmail.com

Resumo: Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, foi desenvolvida com o objetivo de analisar invariantes operatórios associados ao conceito de função, mobilizados por estudantes do 5.º ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de situações mistas do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. Para o seu desenvolvimento, foram propostas, a 12 estudantes, situações mistas para resolução individual, por meio do aplicativo *Google Meet.* As análises mostram que nove teoremas em ação verdadeiros foram manifestados pelos estudantes, sendo a maioria composta pelas propriedades isomórficas da função linear. Dentre os conceitos em ação associados a esses teoremas em ação, destaca-se a mobilização pelos estudantes das ideias-base de função: *correspondência, dependência, variável, regularidade* e a ideia de *proporcionalidade*. Por consequência, ressalta-se a importância de o professor estar ciente dos invariantes operatórios associados ao conceito de função, que podem ser manifestados pelos estudantes em situações mistas, para que seja possível potencializar a construção do conceito de função pelos estudantes, ao longo da sua educação escolar.
Palavras-chave: educação matemática; função; invariantes operatórios; situações mistas; teoria dos campos conceituais.

Abstract: This research, based on the Theory of Conceptual Fields, was developed with the aim of analyzing operational invariants associated with the concept of function, revealed by students of the 5th grade of Elementary School, during the resolution of mixed situations of the type of *simple proportion* and *transformation of measures*. For its development, mixed situations were proposed to 12 students to be solved individually, through the Google Meet application. The analyses show that nine true theorems in action were manifested by the students, most of them composed by the isomorphic

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 32(1) 26-49
https://doi.org/10.48489/quadrante.27811
Recebido: outubro 2022 / Aceite: junho 2023

properties of the linear function. Among the concepts in action associated with these theorems in action, it is possible to highlight the substantiation by the students of the basic ideas of function: *correspondence, dependence, variable, regularity*, and the idea of *proportionality*. Consequently, it is important for the teacher to be aware of the operational invariants associated with the concept of function, which can be manifested by students in mixed situations, so that it is possible to enhance the construction of the concept of function by the students, over their school education.
Keywords: mathematics education; function; operational invariants; mixed situations; theory of conceptual fields.

Introdução

O conceito de função é considerado um conceito fundamental na Matemática (Caraça, 1998), um dos objetivos mais importantes de aprendizagem a ser alcançado (Trindade, 1996), e um tópico matemático que perpassa diferentes níveis escolares (Brasil, 2018).

O documento que direciona os currículos brasileiros da Educação Básica, a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (Brasil, 2018), recomenda que alguns aspectos da Álgebra se façam presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Tais ideias, exploradas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, contribuem para a formalização do conceito de função e de suas representações numérica, algébrica e gráfica no 9.º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (Brasil, 2018).

Ainda, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), a noção intuitiva de função pode ser explorada "[...] por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)" (Brasil, 2018, p. 270), habilidade a ser desenvolvida pelos estudantes nos 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental.

A Teoria dos Campos Conceituais pressupõe que um conceito se desenvolve pelo estudante ao longo do seu percurso escolar, em decorrência das diferentes situações experimentadas (Vergnaud, 1996). De acordo com Vergnaud (2009a), as situações podem ser de três tipos: aditivas, contendo as operações de adição e/ou subtração; multiplicativas, contemplando as operações de multiplicação e/ou divisão; e mistas, envolvendo pelo menos uma vez as operações de adição (ou subtração) e multiplicação (ou divisão).

Nesta investigação, interessamo-nos pelas situações mistas. Tais situações estão presentes em livros didáticos brasileiros dos Anos Iniciais, do 2.º ao 5.º ano, sendo que a maior quantidade de situações mistas está presente em livros do 5.º ano. Em uma pesquisa realizada pelas autoras deste artigo, ao analisarem livros didáticos dos Anos Iniciais, foram identificados 22 problemas mistos na coleção Ápis Matemática, considerada para a investigação (Rodrigues & Rezende, 2021).

Vergnaud (1993, 2009a) estudou profundamente tais situações, apresentando classes de situações bem estabelecidas para o campo conceitual aditivo e para o campo conceitual multiplicativo. A partir dos estudos de Vergnaud (2009a) relativos aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Miranda (2019) estabeleceu, *a priori,* ao menos 30 possibilidades de classes para as situações mistas. A pesquisadora também mostra a associação de classes de situações mistas ao conceito de função afim, dentre elas, a classe *proporção simples e transformação de medidas*, tipologia adotada para o presente trabalho.

A escolha das situações mistas do tipo *proporção simples e transformação de medidas* ocorreu com base nos seguintes critérios: i) são, concomitantemente, a classe mais simples para elaborar diferentes situações e aquela com a maior variedade de subclasses, pois as grandezas envolvidas nessas situações podem ser transformadas (aumentadas ou diminuídas); ii) a noção de função é introduzida a partir de situações envolvendo a proporcionalidade (Brasil, 2018); iii) estão presentes nos problemas mistos de livros didáticos para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Rodrigues & Rezende, 2021).

Nesse contexto, desenvolvemos uma pesquisa com a intenção de identificar os conhecimentos e esquemas, associados ao conceito de função, que podem ser manifestados por estudantes do 5.º ano ao resolverem problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. Parte dos resultados desta investigação são apresentados neste artigo. A seguir, apresentam-se os pressupostos teóricos assumidos no desenvolvimento da pesquisa.

Ideias associadas ao conceito de função

O conceito de função originou-se da tentativa de cientistas e filósofos desenvolverem um instrumento matemático que contribuísse para analisar e dominar fenômenos naturais, tais como o movimento dos corpos, a vaporização da água, a passagem de uma corrente elétrica em um condutor, a germinação de uma semente, e muitos outros, descrevendo regularidades, interpretando interdependências de variáveis e generalizando-as (Caraça, 1998).

Em relação à compreensão do conceito de função, as dificuldades dos estudantes podem estar relacionadas ao ensino que se oferta, pois frequentemente a atenção do aluno é focada na expressão algébrica, não havendo menção quanto à variação e à relação de dependência entre as grandezas envolvidas (Braga, 2006). Segundo Tinoco (2002), para minimizar as dificuldades no processo de construção desse conceito e propiciar a aprendizagem, o professor precisa propor aos alunos situações em que, além de se trabalhar os conteúdos específicos, permitam explorar a ideia principal do conceito de função: uma variável é perfeitamente determinada a partir do conhecimento de outra. Após um longo período no Ensino Fundamental, explorando situações envolvendo essa ideia, é possível e adequado apresentar e formalizar o conceito de função.

Considerando os aspectos históricos e epistemológicos para a construção do conceito de função e respaldado em Caraça (1998), Tinoco (2002), Pavan (2010) e Nogueira (2014), o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) do qual participam as autoras deste artigo, vem defendendo que ideias-base de função são aquelas que estão associadas a todas as funções, o que ocorre com as ideias *de correspondência, variável, dependência, regularidade* e *generalização*. Além dessas ideias, a noção de proporcionalidade é também essencial para a construção do conceito de função, e deve ser desenvolvida pelos estudantes desde os Anos Iniciais (Brasil, 2018). A proporcionalidade está relacionada com diferentes funções, tais como a função linear, da forma $f(x) = ax$. Assim, as ideias associadas ao conceito de função tomadas como base para o desenvolvimento desta investigação são: *correspondência, variável, dependência, regularidade, generalização* e *proporcionalidade.*

Caraça (1998, p. 120), ao discorrer sobre o conceito de função, introduz o conceito de *variável*: "Seja E um conjunto qualquer de números, [...], e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo representativo de qualquer dos elementos do conjunto E chamamos de *variável*". Sem essa representação simbólica para os conjuntos, não obteríamos uma generalidade conveniente para expressar a correspondência entre dois conjuntos.

A ideia de *correspondência* entre dois elementos refere-se à maneira pela qual pensar no antecedente desperta o pensar no consequente. Por exemplo, a correspondência entre o objeto (antecedente) e o número (consequente): "[...] apontar para um dos objetos e dizer um, apontar para outro e dizer dois, e vai procedendo assim até esgotar os objetos da coleção; se o último número pronunciado for oito, dizemos que a coleção tem oito objetos" (Caraça, 1998, p. 6). Para estabelecer a *correspondência* entre duas variáveis, utiliza-se a expressão analítica constituindo a lei matemática, por exemplo: $y = ax \pm b$, com a e $b \in \mathbb{R}$, que retrata um tipo específico de função, a função afim. A expressão analítica consiste em um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de x um valor de y (Caraça, 1998). Tal correspondência muitas vezes está implícita no esquema do sujeito, ou seja, ele não a representa por meia da expressão analítica.

A ideia de *dependência,* em uma relação funcional, consiste na determinação de uma grandeza (variável dependente) a partir da variação da outra grandeza (variável independente) (Tinoco, 2002). Para explorar a ideia de *dependência* entre duas grandezas variáveis, Pavan (2010) sugere apresentar aos alunos situações que envolvam duas variáveis, nas quais se peça a determinação do valor de uma variável em função da outra, por exemplo: "O preço que se tem de pagar por certa mercadoria é feito de acordo com a quantidade de mercadoria que se compra. Assim, o preço depende da quantidade (peso), logo o preço é função da quantidade" (Pavan, 2010, p. 25). A *dependência* entre as grandezas variáveis proporciona à Matemática um caráter dinâmico, e isso torna o conceito de função importante para toda a Matemática (Caraça, 1998).

A ideia de *regularidade* surgiu a partir de observações e estudos de fenômenos naturais, com o propósito de descobrir suas causas e consequências. Os cientistas descobriram que alguns fenômenos naturais apresentam *regularidades*, isto é, comportamentos idênticos, com as mesmas condições iniciais, o que permite fazer repetições e previsões (Caraça, 1998). Segundo Nogueira (2014), a ideia de regularidade pode ser desenvolvida desde a Educação Infantil, por exemplo, com o padrão de repetição de uma sequência por meio de desenhos. Com as crianças maiores, podem-se apresentar sequências numéricas do tipo: 5, 10, 15, 20... e pedir que adivinhem o número seguinte; para isso, as crianças precisam perceber que a sequência está aumentando de 5 em 5, e, então, para adivinhar o número seguinte, elas precisam somar 5 ao número anterior.

A ideia de *generalização* advém da observação dos fenômenos que ocorrem com regularidade, uma vez que, ao perceber uma regularidade, é possível estabelecer uma generalização, e essa capacidade de generalização envolve abstração (Tinoco, 2002). Ainda, a autora menciona a importância de analisar a validade da generalização para qualquer caso, registrando-a não somente para casos particulares. Por exemplo, a sequência numérica 0, 5, 10, 15, 20... pode ter sua regularidade generalizada por meio da linguagem natural, ao se afirmar que os números são todos múltiplos de cinco. Também é importante que os alunos, em ano escolar oportuno, desenvolvam a capacidade de generalizar na linguagem matemática algébrica; nesse caso, $y = 5x$.

Segundo Tinoco (2002), a ideia de *proporcionalidade* pode ser explorada quando se conhece uma grandeza e pode-se obter o valor correspondente da outra ao multiplicar o valor da grandeza conhecida por uma constante (taxa). Por exemplo, se um litro de leite custa a reais, então x litros custam $y = ax$ reais. Essa expressão analítica, que generaliza a situação, retrata um tipo específico de função, a função linear. Desse modo, a ideia de *proporcionalidade* presente em situações multiplicativas é um caso específico de relação funcional e "vezes" está implícito no esquema do estudante, quando a proporção entre as grandezas permanece igual.

Na próxima seção, apresentamos a fundamentação teórica do estudo alicerçada nos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais.

Alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), idealizada por Gérard Vergnaud na década de 1980 e formalmente apresentada em 1990, é uma teoria cognitivista que visa fornecer uma estrutura que permita ao professor e ao pesquisador compreender o desenvolvimento de conceitos pelo sujeito ao longo do processo escolar, possibilitando-lhes traçar as filiações e rupturas entre conhecimentos (Vergnaud, 1996*,* 2017).

Vergnaud (1996) considera que um conceito não se forma em uma única classe de situações; e que uma situação, por mais simples que seja, envolve vários conceitos. A partir dessas considerações, Vergnaud (1996, 2009b) estabelece que um conceito é formado por um terno de conjuntos (S, I, L), sendo "S" o conjunto de situações; "I" o conjunto dos invariantes operatórios; e "L" o conjunto das representações linguísticas e simbólicas. Em geral, não há correspondência biunívoca entre eles, o que significa que, para que ocorra a compreensão de um conceito, nenhum dos conjuntos pode ser excluído.

Na TCC, o termo *situações* apresenta o sentido de *tarefa*, uma vez que essas permitem o desenvolvimento de esquemas pelos estudantes. Vergnaud (1996, p. 157) considera como esquema "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situação [...]", ou seja, a forma como o estudante organiza seus conhecimentos para resolver o problema de determinada classe de situações.

Segundo Vergnaud (1993, 2009b), os conhecimentos, implícitos ou explícitos, conscientes ou inconscientes, presentes nos esquemas de um sujeito, formados por um conjunto de objetos, teoremas, propriedades e relações, são denominados *invariantes operatórios,* e são diferenciados em dois tipos: conceitos em ação e teoremas em ação. "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação, pelo estudante, mas que pode ser falsa do ponto de vista científico" (Vergnaud, 2009b*,* p. 23). Para retratar os esquemas e transformar os invariantes operatórios implícitos em explícitos, são necessárias as representações simbólicas (algébricas, gráficas, entre outras).

Um exemplo de teorema em ação verdadeiro associado à função é mencionado por Vergnaud (1996): as crianças, entre os 8 e os 10 anos, compreendem que, se uma quantidade de objetos à venda for multiplicada por 2, por 3, por 4, por 5, por 100, ou por qualquer outro número, seu preço será 2, 3, 4, 5, 10 ou 100 vezes superior. Pode-se exprimir esse conhecimento por meio de um teorema em ação: Se $n, x \epsilon N$, então $f(nx) = nf(x)$, sendo x a quantidade de objetos, n um número natural qualquer e f a relação proporcional entre os objetos e o preço.

A manifestação de um teorema em ação falso significa um conhecimento verdadeiro para o estudante que o mobiliza. Com o intuito de superar alguns equívocos cometidos pelos estudantes, Vergnaud (1996) defende a importância de reconhecer os conhecimentos implícitos que manifestam, sejam eles falsos ou verdadeiros, para propor boas situações que possibilitem a reflexão e a possível desestabilização desses conhecimentos equivocados.

Dentre os campos conceituais associados a conceitos matemáticos estabelecidos por Vergnaud (1996), tomamos como base para o desenvolvimento desta pesquisa dois deles, quais sejam: o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (Vergnaud, 1996). Para as situações aditivas, o autor apresenta seis classes: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação e composição de duas relações, sendo elas relações ternárias que ligam três elementos entre si.

Para as situações multiplicativas, Vergnaud (1996) estabeleceu cinco classes, apresentadas por Gitirana et al. (2014) com as seguintes nomenclaturas: comparação multiplicativa; produto de medidas; proporção simples; proporcionalidade múltipla e função bilinear. As classes de comparação multiplicativa e produto de medidas possuem relações ternárias que ligam três elementos entre si; já as classes proporção simples, função bilinear e proporcionalidade múltipla são relações quaternárias que associam quatro elementos entre si.

O presente trabalho é focalizado nas situações mistas (Vergnaud, 2009a), ou seja, aquelas que envolvem uma relação multiplicativa (multiplicação ou divisão) e uma relação aditiva (adição ou subtração), simultaneamente, e que estão presentes em livros didáticos brasileiros do 5.° ano do Ensino Fundamental (Rodrigues & Rezende, 2021). Mais especificamente, discutem-se neste trabalho situações mistas classificadas como *proporção simples e transformação de medidas*.

A classe de proporção simples, do campo conceitual multiplicativo, consiste na relação de proporcionalidade entre quatro grandezas, duas a duas de mesma espécie, relacionadas por uma taxa entre as grandezas de diferentes espécies (Gitirana et al*.,* 2014). Tal classe permite gerar quatro variações, elaboradas a partir do termo desconhecido. A classe de transformação de medidas pertence ao campo conceitual aditivo, e, de acordo com Magina et al. (2008), refere-se a uma quantidade inicial que se transforma em uma quantidade final e, assim, envolve uma ideia temporal. Ela permite gerar seis variações, elaboradas a partir do resultado da transformação ser positiva ou negativa, e do termo desconhecido.

Para estabelecer as possibilidades de subclasses para as situações mistas do tipo *proporção simples e transformação de medidas,* foram consideradas as quatro variações da classe proporção simples combinadas com as seis variações da classe transformação de medidas, o que possibilitou a formação de 24 subclasses (Quadro 1).

Elegemos a seguinte situação mista proposta no livro Ápis Matemática do 4.º ano do Ensino Fundamental para representar a classe *proporção simples e transformação de medidas*, disponível em Dante (2017, p. 198): “Em seis caixas, há 300 clipes. Marcelo comprou 3 caixas de clipes e já usou 30 clipes. Quantos clipes ele ainda tem?”

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar a quantidade de clipes em 3 caixas. Para isso, considera-se a relação quaternária de proporção simples do tipo quarta proporcional. Assim, 6 caixas estão relacionadas a 300 clipes, e 3 caixas estão relacionadas a *c* clipes. Diante do resultado da quantidade de clipes em 3 caixas, podemos encontrar a quantidade de clipes restantes por meio de uma relação ternária de transformação de medidas, cujo estado inicial corresponde à quantidade de clipes em 3 caixas; a transformação diz respeito a 30 clipes utilizados; e deseja-se descobrir o estado final, a quantidade de clipes restantes. Para representar essas relações, construímos o seguinte esquema sagital e equação, baseado nos esquemas propostos por Vergnaud (2009a) para os campos aditivo e multiplicativo e na pesquisa de Miranda (2019).

Quadro 1. Subclasses de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação

Campo multiplicativo	**Campo aditivo**
Proporção simples um para muitos	Transformação positiva, com o estado inicial desconhecido. Transformação positiva, com a transformação desconhecida.
Proporção simples partição	Transformação positiva, com o estado final desconhecido.
Proporção simples cota	Transformação negativa, com o estado inicial desconhecido.
Proporção simples quarta proporcional	Transformação negativa, com a transformação desconhecida. Transformação negativa, com o estado final desconhecido.

Quadro 2. Esquema sagital de *proporção simples e transformação de medidas*

Esquema sagital					Equação
Proporção simples		**Transformação de medidas**			
caixas	*clipes*	*clipes comprados*	*clipes utilizados*	*clipes restantes*	
6 → 3 →	300 $\boxed{c}$	$\boxed{c}$	→ -30	$\boxed{y}$	$3 \times \frac{300}{6} = c$ $150 = c$
6 → 3 →	300 $\boxed{150}$	$\boxed{150}$	→ -30	$\boxed{y}$	$150 - 30 = y$ $120 = y$

A partir dessa situação, podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: variável – conforme se altera a quantidade de caixas de clipes, se altera a quantidade de clipes restantes; dependência – a quantidade de clipes restantes depende da quantidade de caixas de clipes; correspondência – 1 caixa de clipes comprada corresponde a 20 clipes restantes, 2 caixas de clipes compradas correspondem a 70 clipes restantes, 3 caixas de clipes compradas correspondem a 120 clipes restantes; regularidade – a quantidade de caixas de clipes pode mudar de 1 em 1, e a quantidade de clipes restantes está mudando de 50 em 50; e a generalização – para esse caso particular, pode ser expressa por meio da forma $y = 50x - 30$.

Na sequência, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento desta pesquisa.

Procedimentos metodológicos

Procurando atingir o objetivo proposto, foi realizada uma pesquisa qualitativa, de caráter interpretativo, em um momento pandêmico. As situações mistas foram implementadas individualmente e *online* com doze estudantes de quatro escolas públicas brasileiras que frequentavam o 5.º ano do Ensino Fundamental. Neste artigo, apresentamos os resultados de cinco estudantes, dentre os doze que participaram da pesquisa; eles estão identificados por E1, E2, E3, E4 e E5. Selecionamos esses estudantes pelo fato de terem apresentado esquemas completos para resolução das situações mistas propostas e invariantes operatórios associados ao conceito de função. Eles foram convidados pelos seus professores após seleção entre aqueles de desempenho mediano em Matemática.

A escolha pelo 5.º ano se deu pelo fato de os estudantes estarem frequentando o último nível de escolaridade dos Anos Iniciais, e em fase de consolidação de conhecimentos referentes aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, ou seja, a expectativa é que, a essa altura, os estudantes resolvam problemas aditivos e multiplicativos, conforme previsto pela BNCC (Brasil, 2018). No período da produção de dados, no mês de junho de 2021, devido à pandemia de Covid-19, as instituições brasileiras de ensino estavam fechadas para atendimento presencial. Nesse contexto, a pesquisadora entrou em contato com a direção e as professoras das escolas e conversou a respeito da pesquisa. Essas professoras aceitaram colaborar com a pesquisa e prontamente entraram em contato com os pais dos alunos, que se disponibilizaram a participar. Na sequência, as professoras passaram o número do celular do responsável de cada aluno para a pesquisadora. A pesquisadora falou com os responsáveis, explicou sobre a pesquisa e agendou o dia e o horário para a resolução das situações.

Os encontros entre a pesquisadora e cada aluno (individualmente) aconteceram por meio do aplicativo *Google Meet*. O link do *Google Meet* foi enviado ao celular dos pais e/ou responsável pelo aluno por meio de mensagem pelo *WhatsApp.* Os pais e os alunos já conheciam o aplicativo *Google Meet*, pois os alunos estavam tendo aulas online por meio dele.

As situações mistas foram elaboradas considerando como variável didática a classe de problemas *proporção simples e transformação de medidas* e seus respectivos valores (subclasses). Para este artigo, apresentamos a análise de duas das quatro situações resolvidas pelos estudantes, denominadas Situação 1, pertencente à subclasse *proporção simples cota e transformação positiva, com a transformação positiva desconhecida,* e Situação 2, pertencente à subclasse *proporção simples quarta proporcional e transformação positiva, com o estado final desconhecido*. A escolha dessas situações decorre do fato de elas estarem associadas à operação de divisão em vez da multiplicação, como nas outras situações propostas.

A resolução das situações aconteceu em um único encontro, no mês de junho de 2021. Cada situação mista foi apresentada individualmente ao estudante na tela do celular ou computador, por meio do aplicativo *Google Meet*. Diante da situação, o estudante tentou resolvê-la. Após a resolução de uma situação, o estudante informava que tinha concluído e então passava-se para a próxima situação. Ao término da resolução, a pesquisadora solicitava as fotos das resoluções que foram enviadas pelo *WhatsApp*.

Diante das resoluções das situações, a pesquisadora realizou um diálogo com cada estudante, com o intuito de auxiliar as análises, para que fossem realizadas do modo mais fiel possível. Nesse momento, foi solicitado ao estudante que falasse como pensou para resolver a situação, o que permitiu à pesquisadora acompanhar o raciocínio do estudante, sem corrigir as respostas dadas.

Para a análise dos resultados, foram consideradas as resoluções escritas dos alunos e as transcrições do diálogo final com a pesquisadora. Contribuíram para a análise diversas pesquisas (Ricco, 1982; Vergnaud, 1983; Franchi, 1999; Pavan, 2010; Gitirana et al*.,* 2014; Ferraz, 2016; Calado, 2020) que identificaram invariantes operatórios associados ao conceito de função em situações multiplicativas, como mencionado na próxima seção.

Análise dos resultados

Apresentamos a seguir duas situações mistas propostas a estudantes do 5.º ano do Ensino Fundamental, seguidas de suas respectivas análises. Para cada situação, apresentamos a análise dos esquemas dos estudantes, expostos por meio de representações escritas e do diálogo entre a pesquisadora e o estudante. Os esquemas interpretados pela pesquisadora como correspondentes foram agrupados; depois, apresentamos os possíveis invariantes operatórios (teoremas em ação e conceito em ação) associados às ideias-base de função – *correspondência, dependência*, *variável, regularidade,* generalização e a ideia de *proporcionalidade.*

A situação 1, pertencente à subclasse *proporção simples do tipo partição e transformação negativa com a transformação negativa desconhecida,* apresenta o seguinte enunciado:

- ✓ Pedro comprou 4 bolas de basquete iguais para doar a uma escola. Para pagar à loja, ele entregou R$ 200,00 e recebeu R$ 16,00 de troco. Quantos reais Pedro pagou por cada bola de basquete?

Essa situação mista coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo partição, do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza, e a relação de transformação negativa com a transformação desconhecida, do campo aditivo, que consiste na aplicação do estado final ao estado inicial para obter a transformação negativa.

Situação 1 - Esquema 1

Para a resolução dessa situação, o estudante E1 apresentou como esquema pertinente o algoritmo da subtração e as sequências aditivas recursivas. Por meio de tentativa e erro, ele foi fazendo as sequências aditivas recursivas para encontrar o mesmo valor encontrado após a operação de subtração (Figura 1).

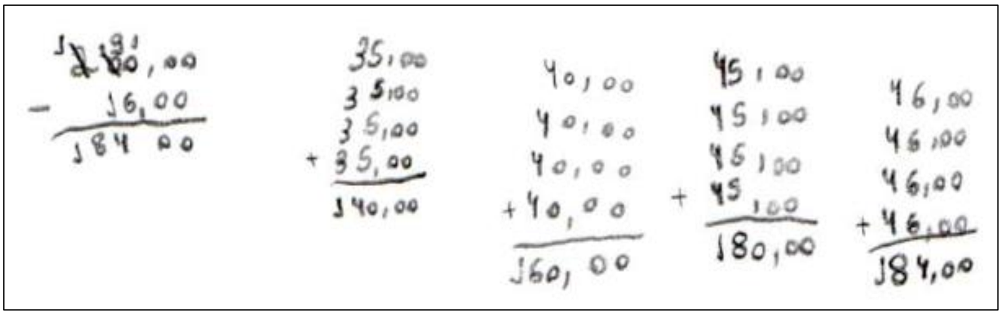

Figura 1. Esquema do estudante E1 referente à situação 1

No momento do diálogo, ao falar como pensou para resolver a situação, E1 relatou:

E1: Fiz a conta 200 – 16, deu 184. Daí eu fiz 35 × 4, que deu 140; 40 × 4, que deu 160; 45 × 4 que deu 180. Daí eu achei o resultado 46 × 4, que deu 184.

Para Vergnaud (1996), é difícil as crianças explicitarem as regras pertencentes ao algoritmo da adição, embora sejam capazes de executar a sequência das regras na operação; por isso, há sempre muito conhecimento implícito nos esquemas.

No esquema do estudante E1, conjecturamos o estabelecimento das seguintes ideias matemáticas, as quais associamos ao conceito de função:

- *Correspondência* um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 46 reais; e em 4 bolas, pagou 184 reais;
- *Dependência* - ao determinar que o valor pago em cada bola depende do valor pago em 4 bolas e do valor do troco;
- *Variável* - mesmo não deixando clara essa ideia, o estudante tem em mente que pode encontrar o valor pago de quantas bolas quiser, contando de 46 em 46, pois cada parcela corresponde ao valor de uma bola;
- *Proporcionalidade* - ao adicionar 4 vezes 46 reais para manter a proporcionalidade: 4 vezes 1 bola são 4 bolas, então e 4 vezes 46 reais são 184 reais
- *Regularidade* - ao resolver a sequência aditiva recursiva somando mais 46 ao resultado anterior, totalizando 184 reais.

Ao utilizar o algoritmo da subtração como esquema, inferimos, com base em Vergnaud (2009a), que o estudante E1 mobilizou um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos ao procedimento de diferença. Vergnaud (2009a) estabelece este teorema em ação do seguinte modo: "[...] se b faz passar de a para c então b é igual à diferença entre c e a". Para exemplificá-lo, podemos subtrair o estado final, representado por 16 reais, do estado inicial, representado por 200 reais, e, assim, encontrar a transformação, 184 reais.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV1, e o modelamos com base em Vergnaud (2009a), ao considerar F representando o estado final, T representando a transformação, e I representando o estado inicial, conforme mencionado a seguir:

TAV1: Se $I - (T) = F$, então $T = I - F$ com $F, I, T \in \mathbb{N}$, e sendo $F < I$

A partir do TAV1, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo estudante E1 na resolução da situação 1: *diferença, estado inicial, estado final e transformação.*

Observa-se que o estudante E1 utiliza como parte do esquema sequências aditivas recursivas, e, a partir desse esquema, pode ter mobilizado um teorema em ação verdadeiro associado à propriedade linear do isomorfismo aditivo. Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, considera-se $f(1\ bola) = 46$, que representa o valor pago por uma bola, valor sugerido pelo próprio aluno para manifestar implicitamente os seguintes raciocínios:

$$f(4 \text{ bolas}) = f(1 \text{ bola} + 1 \text{ bola} + 1 \text{ bola} + 1 \text{ bola}) =$$
$$= f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) = 46 + 46 + 46 + 46 = 184$$

Ao adicionar ou subtrair sucessivamente $f(x)$, uma relação proporcional entre duas grandezas, constatamos um teorema em ação verdadeiro, identificado pela sigla TAV2, como representado a seguir, em um caso geral:

TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade direta, então
$f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.

A partir do TAV2, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados implicitamente por E1: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade e variável.*

Ao explicitar sobre sua resolução, E1 menciona a operação de multiplicação, o que evidencia uma filiação entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo. Com isso, conjecturamos a mobilização pelo estudante E1 de outro teorema em ação verdadeiro, associado à propriedade linear do isomorfismo de medidas. De acordo com este, se multiplicarmos o número de bolas por um número qualquer, o valor pago também é multiplicado por esse número. Para exemplificá-lo, considera-se $n = 4$, e $f(1 \text{ bola}) = 46$ reais, e o seguinte raciocínio:

$$f(4 \times 1 \text{ bola}) = 4 \times f(1 \text{ bola}) = 4 \times 46 \text{ reais} = 184 \text{ reais}.$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV3, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, como representado a seguir:

TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade direta, então
$f(nx) = n \cdot f(\text{x})$, com $x \in \mathbb{N}$, e n um número qualquer sem dimensão.

A partir do TAV3, identificamos indícios de mobilização, por E1, de conceitos em ação associados ao conceito de função, a saber: *correspondência, dependência, proporcionalidade e variável.*

O TAV2 e o TAV3 são mencionados por Ricco (1982), Vergnaud (1983, 1996, 2007) e Franchi (1999), ao falarem a respeito das propriedades isomórficas da função linear; e identificados por Calado (2020) nas resoluções de alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de função afim. O TAV3 é mencionado por Gitirana et al. (2014) no livro *Repensando a multiplicação e a divisão*.

Situação 1 - Esquema 2

Os estudantes E2, E3, E4 e E5 utilizaram, como esquema pertinente para a situação, os algoritmos da subtração e da divisão. Cabe ressaltar que E2 ainda fez a operação de multiplicação para verificar se o resultado da operação de divisão estava correto (Figura 2).

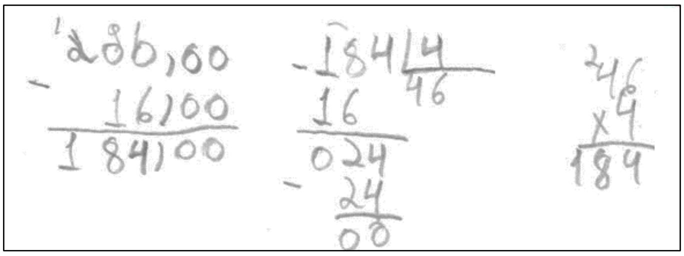

Figura 2. Esquema do estudante E2 referente à situação 1

No momento de diálogo, o estudante E2, ao explicar como pensou para resolver o problema, afirmou:

E2: Eu fiz 200 – 16, que dá 184, e dividi 184 por 4, que dá 46 cada bola.

A resolução empregada pelo estudante E3 demostra a compreensão da relação existente entre a divisão e a multiplicação. Segundo Gitirana et al. (2014, p. 102), "[...] A associação entre multiplicação e divisão pode ser destacada pelo professor, pois é uma ótima oportunidade de apresentar aos estudantes as relações de proximidade entre a divisão e a multiplicação".

Há indícios de que, para resolverem esse problema, os estudantes E2, E3, E4 e E5 mobilizaram as seguintes ideias associadas ao conceito de função:

- *Correspondência* de um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 46 reais; em 4 bolas, pagou 184 reais;

- *Dependência* - ao determinar que o valor pago em cada bola depende do valor pago em 4 bolas e do troco;
- *Proporcionalidade* - ao dividir o valor de 184 reais pela quantidade de 4 bolas e encontrar a taxa de proporcionalidade: 46 reais por bola.
- *Variável* - por meio dessa taxa, conjecturamos que os estudantes têm em mente que podem encontrar o valor a pagar em quantas bolas quiserem.

O esquema utilizado pelos estudantes E2, E3, E4 e E5 é indicativo da mobilização do TAV1, apresentado anteriormente.

Ainda nesse esquema, consideramos, com base em Vergnaud (1983, 1996, 2007), que os estudantes mobilizaram um teorema em ação verdadeiro, expresso pela propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade. Para exemplificá-lo, considera-se 4 equivalente à quantidade de bolas, $f(4\text{ bolas})$ representando o valor pago em 4 bolas, e o seguinte raciocínio:

$$\frac{f(4)}{4} = \frac{184}{4} = 46$$

Identificamos o teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV4 e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, conforme mencionado a seguir:

TAV4: Seja f uma relação de proporcionalidade, então
$a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{N}$, sendo $x \neq 0$ e a a taxa.

A partir do TAV4, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos estudantes E2, E3, E4 e E5: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.*

Ferraz (2016) identificou o TAV4 manifestado na resolução de problemas de estruturas multiplicativas de estudantes do 6.º ano do Ensino Fundamental.

Presumimos que o estudante E2, ao utilizar o algoritmo da multiplicação para verificar o resultado da divisão, pode ter mobilizado um teorema em ação verdadeiro, referente à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade, quando realizou a seguinte relação matemática para um caso particular: o valor pago por 4 bolas é o mesmo que 46 reais por bola (taxa) multiplicado por 4 bolas. Ou seja, $f(4\text{ bolas}) = 46\text{ reais por bola} \times 4\text{ bolas} = 184\text{ reais}$.

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV5 e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre grandezas, conforme mencionado a seguir.

TAV5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$,
com $x, a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa.

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983, 1996, 2007) e Franchi (1999) ao explicitarem a respeito das propriedades isomórficas da função linear; e identificado por Pavan (2010) nas resoluções dos estudantes do 5.º ano em situações multiplicativas.

A partir do TAV5, identificamos a mobilização, por E2, dos seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.*

A seguir apresentamos a situação 2 propostas aos estudantes.

A situação 2, pertencente à subclasse *proporção simples do tipo cota e transformação positiva com a transformação positiva desconhecida* apresenta o seguinte enunciado:

- ✓ Carlos quer comprar um celular que custa R$ 540,00. Ele já possui R$ 60,00 e decidiu economizar R$ 80,00 por mês. Em quantos meses Carlos terá o valor necessário para comprar o celular?

Essa situação coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo cota, do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza, e a relação de transformação positiva com a transformação desconhecida, do campo aditivo, que consiste na aplicação do estado inicial ao estado final para obter a transformação.

Na sequência apresentamos os esquemas e os invariantes operatórios manifestados pelos estudantes ao resolverem a situação 2.

Situação 2 - Esquema 1

Na resolução dessa situação, E1 utilizou, como esquema pertinente, o cálculo mental e as sequências aditivas recursivas. Por meio de tentativa e erro, foi fazendo sequências aditivas recursivas para encontrar o mesmo valor estabelecido no cálculo mental (Figura 3).

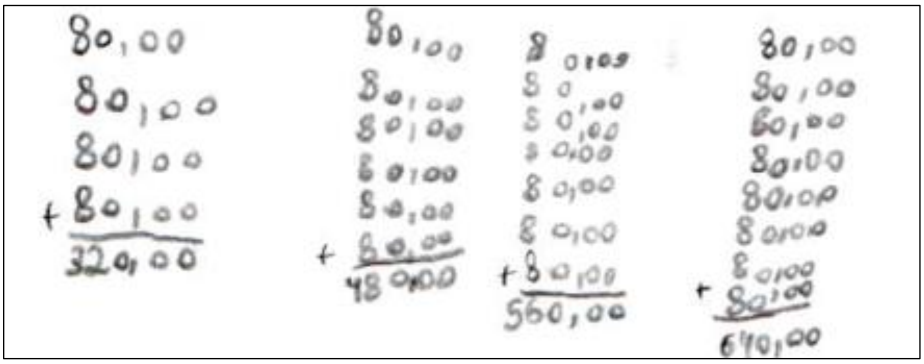

Figura 3. Esquema do estudante E1 referente à situação 2

No momento do diálogo, ao explicar seu esquema, o estudante E1 mencionou:

E1: Fiz 4 × 80, mas daí eu fiz por mais. Daí, o segundo eu fiz vezes 5. [...] peguei a do 4 e somei 80. Eu fiz 8 vezes, que é maior, e vezes 7, daí eu fiz a vezes 6.

No esquema apresentado pelo estudante E1, identificamos a mobilização das seguintes ideias matemáticas:

- *Correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos economizou 80 reais; em 6 meses, Carlos economizou 480 reais; em 7 meses, Carlos economizou 560 reais;
- *Dependência* - o valor economizado depende da quantidade de meses;
- *Variável* - ao variar a quantidade de meses, encontra-se o valor economizado;
- *Proporcionalidade* - ao multiplicar ambos os lados da igualdade por um número qualquer, mantendo a proporcionalidade;
- *Regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7), e o valor obtido está aumentando de 80 em 80 (80, 160, 240, 320, 400, 480 e 560).

O estudante E1 apresenta mobilização de um teorema em ação verdadeiro, que consiste em aplicar o estado inicial ao estado final para encontrar a transformação direta. O estudante E1 não representou numericamente o esquema que possibilita a mobilização desse teorema em ação, mas ao realizar as sequências aditivas, ele buscava encontrar a transformação correspondente ao resultado desse teorema em ação, o que indica que ele fez um cálculo mental. Para exemplificá-lo, considera-se que a solução do problema consiste em aplicar o estado inicial, representado por 60 reais, ao estado final, que consiste em 540 reais, e, assim, encontrar a transformação, 480 reais. Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV6, e o representamos, conforme Vergnaud (1993), a seguir:

TAV6: Se $I + T = F$, então $T = F - I$, com $F, I, T \in \mathbb{N}$, sendo $F > I$.

Subjacente ao TAV6, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo estudante E1 na situação 2: *diferença, estado inicial, estado final* e *transformação.*

Ainda, no esquema do estudante E1, há indícios da mobilização de um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos a uma relação de comparação. Para exemplificá-lo, consideram-se $x = 4$ meses, $x = 5$ meses, $f(4 \text{ meses})$ equivalente ao valor economizado em 4 meses, $f(5 \text{ meses})$ equivalente ao valor economizado em 5 meses, e o seguinte raciocínio:

$$4 < 5 \text{ então } f(4) < f(5)$$

Indicamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV7 e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação de proporcionalidade em $\mathbb{N}$, conforme apresentado a seguir:

TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade em $\mathbb{N}$ e
seja $x < x'$, então $f(x) < f(x')$, com $x, x' \in \mathbb{N}$.

A partir do TAV7, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo estudante E1: *comparação, correspondência, dependência e variável.* Esse TAV7, mobilizado pelo estudante E1, foi explicitado por Ricco (1982) e Franchi (1999).

O estudante E1 utiliza, como parte do esquema, sequências aditivas recursivas, mas, ao explicitá-lo, menciona a operação de multiplicação, o que evidencia uma filiação entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo. Com isso, conjecturamos a mobilização pelo estudante E1 dos TAV2 e TAV3, apresentados anteriormente.

Situação 2 - Esquema 2

Para resolver a situação 2, o estudante E2 utilizou, como esquema não pertinente, os algoritmos da adição e da multiplicação, pois não identificou a taxa: 80 reais por mês (Figura 4).

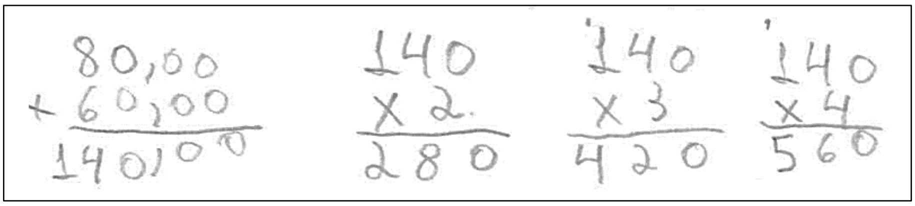

Figura 4: Esquema do estudante E2 referente à situação 2

A fala do estudante E2 atesta sua escolha:

E2: Aqui fiz 80 + 60, que deu 140. Daí, eu fui fazendo de vezes para chegar no valor mais perto que ele queria para comprar o celular: 2×140, que deu 280; 3×140, que deu 420; e 4×140, que deu 560, o mais perto que achei. Deu 4 meses e sobraram 20 reais.

Embora o estudante E2 tenha apresentado em seu esquema ideias associadas ao conceito de função, elas não apresentam valores condizentes para solução da situação proposta. Tais ideias são explicitadas a seguir:

- *Correspondência* de um para muitos - em 1 mês, Carlos obteve 140 reais..., em 4 meses, Carlos obteve 560 reais;
- *Dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas dos meses passados, mas também do valor que Carlos já possuía;
- *Variável* - ao variar a quantidade de meses, encontra-se o valor obtido;
- *Regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3 e 4), e o valor obtido está aumentando de 140 em 140 (140, 280, 420 e 560); e
- *Generalização* - mesmo não deixando explícita essa ideia, E2 tem em mente que pode encontrar o valor obtido em qualquer quantidade de meses, multiplicando a quantidade de meses pela taxa de 140 reais por mês.

A *generalização* exige a "[...] capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os" (Tinoco, 2002). Para isso, salientamos que é necessário propor aos estudantes uma questão, levando-os a manifestar essa ideia; por exemplo: *Como encontramos o valor obtido para qualquer quantidade de meses?*

Ao utilizar o algoritmo da adição como esquema, E2 pode ter mobilizado um teorema em ação verdadeiro, que consiste em aplicar uma transformação direta de adição ao estado inicial para encontrar o estado final. Para exemplificá-lo, considera-se que E2 aplicou a transformação representada pela adição de 80 reais ao estado inicial, que diz respeito a 60 reais e, assim, encontrou o estado final, 140 reais.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV8 e o modelamos, ao considerar F, o estado final, I, o estado inicial e T, a transformação, como representado a seguir.

TAV8: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.

A partir do TAV8, foram identificados os seguintes conceitos em ação, mobilizados por E2, na resolução da situação 2: *estado inicial, estado final* e *transformação.*

Também presumimos que o estudante E2 mobilizou em seu esquema o TAV5, quando considerou $f(1 \text{ mês}) = 140$ reais, e realizou os raciocínios seguintes:

$$f(2 \text{ meses}) = 2 \text{ meses} \times 140 \text{ reais por mês} = 280 \text{ reais}$$
$$f(3 \text{ meses}) = 3 \text{ meses} \times 140 \text{ reais por mês} = 420 \text{ reais}$$
$$f(4 \text{ meses}) = 4 \text{ meses} \times 140 \text{ reais por mês} = 560 \text{ reais}$$

Subjacentes ao TAV5, identificamos a mobilização, pelo estudante E2, dos seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, generalização, proporcionalidade, taxa* e *variável.*

Desse modo, nota-se que o estudante pode manifestar ideias sobre o conceito de função em seu esquema, independentemente do fato de as relações estabelecidas estarem condizentes com a situação proposta. Contudo, o papel dessa situação mista é possibilitar a manifestação das ideias acerca de função, e não modelar uma função em si.

Situação 2 - Esquema 3

O esquema pertinente para a situação utilizado por E3 consiste nos algoritmos da adição (Figura 5), como atestado em sua fala:

E3: Eu fiz tudo de +, primeiro. Daí eu juntei 60 + 80, 140. Daí 140 + 80, 220; 220 + 80, 300; 300 + 80, 380; 380 + 80, 460; 460 + 80, 540.

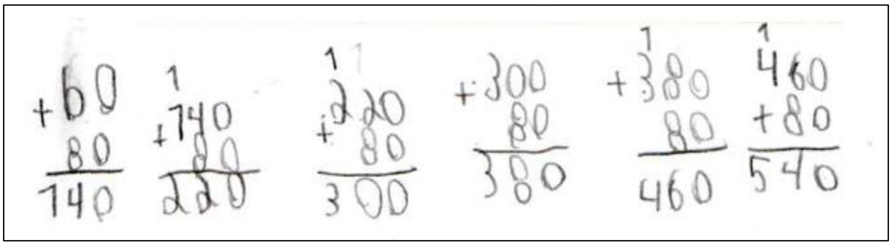

Figura 5: Esquema do estudante E3 referente à situação 2

Por meio dessa fala, observa-se que há sempre conhecimentos implícitos no esquema, que os estudantes não conseguem explicitar, embora sejam capazes de resolver a situação proposta (Vergnaud, 1996).

No esquema apresentado por E3, identificamos a mobilização das seguintes ideias:

- *Correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos obteve 140 reais; em 6 meses, Carlos obteve 540 reais;
- *Dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas da quantidade de meses que Carlos economizou 80 reais, mas também do valor que Carlos já tinha;
- *Variável* - ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor para comprar o celular;
- *Regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5 e 6), e o valor obtido para comprar o celular está aumentando de 80 em 80 (140, 220, 300, 380, 460, 540).

No esquema de E3, identificamos indícios da mobilização de um teorema em ação verdadeiro, quando ele manifestou implicitamente os seguintes raciocínios.

$$f(1 \text{ mês}) = 80 \text{ reais} \times 1 \text{ mês} + 60 \text{ reais} = 140 \text{ reais}$$
$$f(2 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 2 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 220 \text{ reais}$$
$$f(3 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 3 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 300 \text{ reais}$$
$$f(4 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 4 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 380 \text{ reais}$$
$$f(5 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 5 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 460 \text{ reais}$$
$$f(6 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 6 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 540 \text{ reais}$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV9 e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação funcional, a a taxa e b uma constante, como apresentado a seguir:

TAV9: Se f é uma relação funcional então $f(x) = a \cdot x + b$ com $a, b, x \in \mathbb{N}$, sendo b um valor fixo.

Subjacente ao TAV9, identificamos os seguintes conceitos em ação: *constante, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade, taxa* e *variável.*

Segundo Vergnaud (1998), os estudantes geralmente são incapazes de explicar, ou mesmo expressar, em linguagem natural, os teoremas em ação, por isso há muito conhecimento implícito em seus esquemas.

Situação 2 - Esquema 4

Para resolver o problema misto, o estudante E4 utilizou, como esquema não pertinente, o algoritmo da subtração e as subtrações sucessivas (Figura 6). Nota-se que o estudante E4 não encontrou a solução correta para resolver o problema, pois faltou realizar a subtração até obter 0 reais e, então, ao contar a quantidade de grupos de 80 reais, que foram subtraídos, obteve 5 meses, em vez de 6 meses.

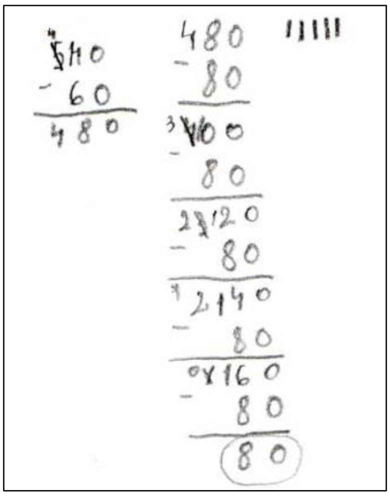

Figura 6. Esquema do estudante E4 referente à situação 2

Conforme também identificado em sua fala:

E4: Fiz várias contas de menos e o resultado deu 5 meses.

Para Gitirana et al*.* (2014), os estudantes apresentam dificuldades em fazer a associação de um problema multiplicativo que pode ser revolvido por uma divisão. Diante dessa dificuldade, eles utilizam outros esquemas para resolver esse tipo de problema, a exemplo das subtrações sucessivas, como apresentado nesse esquema.

No esquema apresentado pelo estudante E4, identificamos a mobilização das seguintes ideias:

- *Correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos obteve 80 reais; em 5 meses, Carlos obteve 480 reais.
- *Dependência* - o valor obtido não depende apenas da quantidade de meses, mas também do valor que Carlos já tinha;
- *Variável* - ao variar a quantidade de meses, encontra-se o valor economizado correspondente;
- *Regularidade* - ao encontrar a quantidade de meses em que Carlos economizou 80 reais, subtraindo 80 ao do número anterior.

Ao analisar esse esquema, indicamos que E4 mobilizou o TAV2 e o TAV6, apresentados anteriormente. Para exemplificar o TAV2, considera-se $f(6 \text{ meses}) = 480$, que consiste no valor economizado em 6 meses; $f(1 \text{ mês}) = 80$, que consiste no valor economizado em 1 mês, e tais procedimentos:

f(5 meses) $=$ f(6 meses) $-$ f(1 mês) = 480 reais – 80 reais = 400 reais
f(4 meses) $=$ f(5 meses) $-$ f(1 mês) = 400 reais – 80 reais = 320 reais
f(3 meses) $=$ f(4 meses) $-$ f(1 mês) = 320 reais – 80 reais = 240 reais
f(2 meses) $=$ f(3 meses) $-$ f(1 mês) = 240 reais – 80 reais = 160 reais
f(1 mês) $=$ f(2 meses) $-$ f(1 mês) = 160 reais – 80 reais = 80 reais

Situação 2 - Esquema 5

O esquema pertinente para a situação utilizado por E5 consiste nos algoritmos da subtração e da multiplicação (Figura 7), conforme atestado em sua fala:

E5: A primeira que eu fiz foi de menos, que é 540 – 60 e dá 480. Depois, fiz uma de vezes: 80 $\times$ 6, que também deu 480.

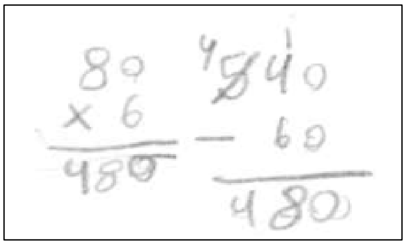

Figura 7: Esquema do estudante E5 referente à situação 2

No esquema do estudante E5, identificamos indícios da mobilização das seguintes ideias:

- *Correspondência* de um para muitos - em 1 mês, Carlos economizou 80 reais; em 6 meses, Carlos obteve 480 reais;
- *Dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas dos meses passados, mas também do valor que Carlos já possuía;
- *Variável* - ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor economizado correspondente ao número de meses;
- *Proporcionalidade* - ao utilizar a taxa (80 reais por mês), mantendo a proporção de 1 para 80.

Ao analisar esse esquema, indicamos que o estudante E5, ao utilizar o algoritmo da subtração, mobilizou o TAV6, apresentado anteriormente, e, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, pode ter mobilizado o TAV5, quando realizou a seguinte relação matemática para um caso particular: o valor obtido em 6 meses é o mesmo que 80 reais por mês (taxa) multiplicado por 6 meses. Esse teorema em ação pode ser representado ao considerar f(6 meses) como representando o valor economizado em 6 meses, 80 reais por mês representando a taxa, e o seguinte raciocínio:

$$f(6 \text{ meses}) = 80 \text{ reais por mês} \times 6 \text{ meses} = 480 \text{ reais}$$

As subclasses de situações contempladas nesta pesquisa possuem estruturas diferentes; com isso, cada subclasse possui um grau de dificuldade, levando em consideração o tipo de relação estabelecida entre os elementos do enunciado do problema. Um exemplo disso é o enunciado da primeira situação que não contém a taxa de proporcionalidade explícita, enquanto no enunciado da segunda situação a taxa está explícita, o que pode facilitar, na segunda situação, a manifestação de esquemas e das ideias-base de função. Esta pesquisa corrobora esse entendimento, pois, na primeira situação, tivemos dois esquemas diferentes, e, na segunda situação, cinco.

Nos esquemas dos alunos, ao resolverem situações mistas, observam-se as estratégias aditiva e multiplicativa, o que vai ao encontro do que mencionam Lesh, Post e Behr (1998, p. 121): "Piaget, ao estudar o raciocínio proporcional, concluiu que ele se desenvolve '[...] a partir (1) de uma estratégia compensatória global (frequentemente de natureza aditiva) passando por (2) uma estratégia multiplicativa sem generalização a todos os casos, até (3) à estruturação final da lei das proporções'".

As operações que resolvem as situações mistas de maneira mais eficiente são as operações de divisão e subtração, porém os estudantes também utilizam as operações de multiplicação e adição com o objetivo de resolver a situação. Observa-se que a multiplicação permite mais facilmente a manifestação das ideias-base de função; logo, as subclasses de situações mistas que envolvem a proporção simples um para muitos, em que a taxa é dada explicitamente e a operação recomendada é a multiplicação, permitem mais facilmente a manifestação das ideias-base de função, conforme mencionado por Silva (2021).

Enfim, as análises desta pesquisa mostram que as situações mistas envolvendo a proporcionalidade são propulsoras da manifestação de ideias-base de função por estudantes dos anos iniciais, mesmo que implicitamente.

Considerações finais

Os resultados desta pesquisa apontam que, nos esquemas dos estudantes, foram identificados nove teoremas em ação verdadeiros, sendo a maioria composto pelas propriedades isomórficas da função linear. Associados aos teoremas em ação, identificamos quinze conceitos em ação, a saber: adição de funções lineares, constante, comparação, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, generalização, proporcionalidade, razão, regularidade, variável, taxa e transformação. Entre eles, citamos as seguintes ideias-base de função: *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização.*

Neste trabalho, estabelecemos uma classificação para as situações mistas pertencentes à classe *proporção simples e transformação de medidas,* e defendemos a importância da diversidade de outras classes de situações para potencializar a elaboração de novos esquemas e a construção do conceito de função pelos estudantes durante todo o processo escolar. Pois, conforme constatado nesta pesquisa, a mobilização da ideia da proporcionalidade e ideias-base de função varia de acordo com a subclasse e com o esquema utilizado pelo estudante para resolver a situação.

Defendemos a importância de os professores conhecerem os indicativos de invariantes operatórios (teoremas e conceitos em ação), associados ao conceito de função, mobilizados por estudantes dos anos iniciais ao resolverem diferentes situações. Assim, ficarão mais aptos a possibilitar situações que permitam a manifestação das ideias-base de função, de modo a potencializar a construção do conceito de função ao longo do percurso escolar, uma vez que tais situações mistas, conforme mostrado nesta pesquisa, possibilitam a mobilização de ideias de *proporcionalidade*, *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização,* associadas ao conceito de função.

Sugerimos ainda que situações mistas sejam retomadas e aprofundadas no decorrer do processo escolar, ampliando os conhecimentos numéricos e algébricos dos estudantes, para que o conceito de função possa ser formalizado com maior significado no 9.º ano do Ensino Fundamental, e aprofundado no Ensino Médio.

Referências

Braga, C. (2006). Função*: a alma do ensino da Matemática*. Anablume.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. MEC - Ministério da Educação, Brasília. http://basenacionalcomum.mec.gov.br

Calado, T. V. (2020). *Invariantes operatórios relacionados à generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel. https://tede.unioeste.br/handle/tede/5249

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Gradiva.

Dante, L. R. (2017). *Ápis Matemática – 4º ano*. São Paulo.

Ferraz, S. R. (2016). *Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG).* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/8707

Franchi, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos Campos Conceituais. In S. D. A. Machado (Org). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*, (pp. 155–196). EDUC.

Gitirana, V., Campos, T. M. M., Magina, S., & Spinillo, A. (2014). *Repensando multiplicação e adição: Contribuições da teoria dos campos conceituais*. PROEM.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (pp. 93–118). Lawrence Erlbaum Associates.

Magina, S., Campos, T., Nunes, T., & Gitirana, V. (2008). *Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. PROEM.

Nogueira, C. M. I. (2014). Construindo o conceito de Funções. In A. S. Ramos, & F. C. Rejani (Orgs.). *Teoria e práticas de Funções*, (pp. 10–59). Centro Universitário de Maringá.

Pavan, L. R. (2010). *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas.* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá – Paraná. http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4378

Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(3), 289–327.

Rodrigues, C. L. B. H. & Rezende, V. (2021). Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, *17*(39), 271–287. http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v17i39.10713

Silva, L. C. P. (2021). *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função.* (Tese de doutorado). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. https://tede.unioeste.br/handle/tede/5773

Tinoco, L. A. A. (2002). *Construindo o conceito de função.* Projeto Fundão.

Trindade, J. A. O. (1996). *Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/111424

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structure. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127–174). Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro* (pp. 1–26). Instituto de Matemática da UFRJ.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In J. Brun (Org.). *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155–191), (M. J. Figueiredo, trad.). Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167–181. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3

Vergnaud, G. (2009a). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar* (M. L. F. Moro, trad.). UFPR.

Vergnaud, G. (2009b). O que é aprender. In M. Bittar, & C. A. Muniz (Orgs.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*, (pp. 13–35). Editora CRV. https://dx.doi.org/10.24824/978856248028.7

Vergnaud, G. (2017). A didática é uma provocação, ela é um desafio. In E. P. Grossi (Org.), *Piaget e Vygotsky em Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais*, (pp. 17–35). Coleção Campos Conceituais. GEEMPA.