

# A investigação em resolução de problemas, raciocínio, comunicação e modelação: Uma análise de 30 anos de publicações na revista *Quadrante*

## Research in problem solving, reasoning, communication, and modelling: An analysis of 30 years of published articles in *Quadrante*

**Joana Brocardo** 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal  
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa  
Portugal  
joana.brocardo@ese.ips.pt

**Isabel Vale** 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo  
CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho  
Portugal  
isabel.vale@ese.ipvc.pt

**Luís Menezes** 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viseu  
CI&DEI, Instituto Politécnico de Viseu  
Portugal  
menezes@ese.ipv.pt

**Resumo.** Este artigo analisa os trabalhos publicados na revista *Quadrante* entre 1992-2021 que focam as capacidades matemáticas de Resolução de Problemas, Raciocínio, Comunicação e Modelação. A análise incidu nos 102 artigos a que estavam associadas palavras-chave relativas a cada um destes temas e conduziu à definição de subcategorias de análise. Conclui-se da relevância das tarefas para apoiar a aprendizagem destes temas, avançando-se com características que devem estar presentes no seu *design*. Fica evidente a importância do modo como o professor concebe, explora e gere as interações na aula e identifica-se uma tensão entre as abordagens exploratória e direta ao ensino da matemática. Destaca-se a ideia de que a resolução de problemas é uma parte importante do que significa ensinar e aprender, seja como capacidade, como conteúdo ou metodologia de ensino/aprendizagem e constata-se a sua exigência, sugerindo-se um conjunto de

ideias para promover uma prática letiva que a desenvolva. Destaca-se o entendimento de não limitar a atenção no raciocínio ao raciocínio dedutivo e de discutir características e/ou potencialidades do raciocínio associadas a vários tópicos matemáticos e avançam-se características associadas à prova, justificação e generalização. Sublinha-se, ainda, que experiências de modelação matemática podem apoiar a aprendizagem, destacando-se a importância de usar diferentes ferramentas tecnológicas.

*Palavras-chave:* resolução de problemas de matemática; raciocínio matemático; comunicação matemática; modelação matemática.

**Abstract.** This article analyses the papers published in *Quadrante* between 1992-2021 that focus on the mathematical processes of Problem Solving, Reasoning, Communication, and Modelling. The analysis was grounded on 102 papers associated with keywords related to each of those themes, leading to subcategories of analysis. We notice the relevance of the tasks in supporting the learning of these processes, while characteristics that should be present in their design are proposed. It becomes clear the importance of the way the teacher designs, explores and manages classroom interactions and a tension is identified between exploratory and direct approaches for teaching mathematics. The idea that problem solving is an important part of what it means to teach and learn, either as a skill, as a content, and/or as a teaching/learning methodology, is underlined, and its demanding nature is noted; several ideas are also suggested to promote problem solving teaching practice. The understanding of reasoning as not being limited to deductive reasoning and the discussion about the characteristics and/or potentialities of reasoning associated with multiple mathematical topics is highlighted; moreover, characteristics associated with proof, justification and generalization are proposed. It is also emphasized that mathematical modelling experiences can support learning, stressing the importance of using different technological tools.

*Keywords:* mathematical problem solving; mathematical reasoning; mathematical communication; mathematical modelling.

## Introdução

Neste artigo analisamos os trabalhos publicados ao longo dos 30 anos da *Quadrante* que se focam nas capacidades matemáticas de Resolução de Problemas, Raciocínio e Comunicação. Tendo em conta o número elevado de artigos que explicitamente incidem sobre Modelação, optámos por não os integrar na Resolução de Problemas, tema que igualmente abrange um grande número de trabalhos. Deste modo, este artigo está organizado nos quatro grandes temas transversais considerados: Resolução de Problemas (RP), Raciocínio Matemático (RM), Comunicação Matemática (CM) e Modelação Matemática (MM).

Usámos uma metodologia de análise de conteúdo implementada em quatro fases. Numa primeira fase, a análise visou determinar os artigos a incluir em cada grande tema considerado. Incidiu em todos os artigos em que pelo menos uma das palavras-chave indicadas pelos autores dissesse respeito aos temas transversais, ou, no caso dos primeiros números da *Quadrante*, nas palavras-chave indicadas por nós, após uma breve análise

destes artigos. Foram integrados (i) na RP todos os artigos que tinham pelo menos uma das palavras-chave ‘resolução de problemas’, ‘problemas’, ‘investigações matemáticas’ ‘tarefas de investigação’, ‘atividades de investigação’, ‘formulação de problemas’; (ii) no RM todos os que indicavam pelo menos uma das palavras-chave ‘raciocínio’, ‘prova’ ou ‘generalização’; (iii) na CM os que indicavam pelo menos uma das palavras-chave ‘comunicação matemática’, ‘comunicação’, ‘argumentação’, ‘feedback’, ‘relação dialógica comunicativa’, ‘coconstrução de significados’ ou ‘discurso’; e (iv) na MM, visando separá-la da Resolução de problemas, os que indicavam como palavras-chave ‘modelação’ ou ‘atividade geradora de modelos’. A aplicação destes critérios permitiu contabilizar 102 artigos cuja incidência por tema transversal se indica na Tabela 1. Quando um artigo indica palavras-chave consideradas em mais do que uma capacidade, ele é contabilizado em todas em que incide, pelo que a contagem incluída na Tabela 1 inclui alguns artigos contabilizados mais do que uma vez.

Tabela 1. Número de artigos por tema transversal

<b>Resolução de problemas</b>	<b>Raciocínio</b>	<b>Comunicação</b>	<b>Modelação</b>
37	27	11	32

Nesta fase, a análise visou ainda a elaboração de uma breve caracterização de cada artigo selecionado, incluindo, para além da data de publicação, a nacionalidade dos autores, a sua incidência (alunos, professores, anos de escolaridade/níveis de ensino, número de participantes), a metodologia usada e uma síntese das conclusões.

Na segunda fase, analisámos em profundidade o conteúdo de cada artigo integrado num determinado tema transversal, visando caracterizá-lo em termos do contexto teórico em que se integra e dos seus contributos para o desenvolvimento do conhecimento sobre o tema investigado. Deste modo, o número de artigos que passaram a ser considerados reduziu, uma vez que seleccionámos todos os que explicitamente avançavam conhecimento teórico ou empírico sobre o tema, não considerando trabalhos que reportavam intenções de investigações futuras.

A terceira fase incidiu na caracterização realizada anteriormente e visou identificar todos os subtópicos focados em cada tema transversal, que surgiram indutivamente das leituras sucessivas dos artigos analisados (Tabela 2).

Finalmente, numa quarta fase, a partir da leitura exaustiva do contributo específico dos artigos considerados em cada subtópico, elaborámos um texto que identifica os seus propósitos, destaca os seus contributos e os enquadra na literatura. Os artigos abrangem estudos de natureza teórica e empírica (Tabela 3).

Tabela 2. Subtópicos por tema transversal

<b>Resolução de problemas</b>	<b>Raciocínio</b>	<b>Comunicação</b>	<b>Modelação</b>
Entendimento de resolução de problemas	Entendimento de raciocínio	Entendimento de comunicação	Entendimento de modelação
Resolução de problemas como atividade cognitiva.	Provar, Justificar, Generalizar	Discurso matemático	Tarefas de modelação
Resolução de problemas como abordagem educativa	Raciocínio e exploração de tarefas		Desenvolver a modelação

Tabela 3. Natureza dos estudos

<b>Natureza do estudo</b>	<b>Resolução de problemas</b> N.º de artigos	<b>Raciocínio</b> N.º de artigos	<b>Comunicação</b> N.º de artigos	<b>Modelação</b> N.º de artigos
Empírico	31	23	0	27
Teórico	6	4	0	5
<b>Total</b>	<b>37</b>	<b>27</b>	<b>11</b>	<b>32</b>

Quanto às opções metodológicas dos estudos empíricos analisados é de salientar que a esmagadora maioria se enquadra no paradigma interpretativo e que usam um design de estudo de caso ou de investigação baseada em *design*, onde se incluem experiências de ensino e uma de formação. Em número bem inferior, identifica-se o recurso a metodologias mistas (um na RP, dois no RM, quatro na MM) e quantitativas (três na RP). É na RP que se regista um número significativo de estudos desenvolvidos em contextos de formação de professores (14).

## **Resolução de Problemas de Matemática**

Nos 30 anos da *Quadrante* as publicações sobre a RP são constantes e incluem dois números temáticos: *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (1998) e *Resolução de Problemas* (2015) (Tabela 4). Os artigos percorrem vários níveis de ensino desde o básico ao superior. Abordam diferentes temáticas relacionadas com a RP nas quais se identificam, discutem, caracterizam e clarificam conceitos, tipos de tarefas, estratégias, modelos, perspetivas e dificuldades de quem ensina e de quem aprende.

Tabela 4. Número de estudos publicados sobre RP, por década

Década	N.º de estudos
1992-2001	8
2002-2011	12
2012-2021	17
<b>Total</b>	<b>37</b>

### Entendimento do que é a resolução de problemas

Quando se estuda a RP é incontornável a obra de Pólya, para quem o aluno aprende matemática se for desafiado a resolver um conjunto adequado de problemas (não-rotineiros) que o envolva num processo de descoberta, identificando o conhecimento que deve mobilizar, de acordo com um modelo baseado em heurísticas gerais. Nele, a RP é decomposta em quatro etapas (compreender o problema; delinear um plano; executar o plano, verificar), e envolve o uso de estratégias de resolução e capacidades de ordem superior.

Falar de RP é falar de *problema*, conceito abordado em vários trabalhos publicados na *Quadrante* (e.g. Allevato & Vieira, 2016; Graça, 2003; Saraiva, 2016; Souza & Guimarães, 2015; Vale et al., 2015) que têm por base as ideias de Pólya (1945, 1981). Considera-se que um problema é uma tarefa não rotineira que se pretende resolver e que constitui um desafio intelectual, contribuindo para melhorar a compreensão e o desenvolvimento matemático dos alunos, mas para a qual não está disponível de imediato uma estratégia para chegar à solução. Estes problemas são o que Pólya designa por *problemas não-rotineiros, ou não-familiares*, também designados de *problemas de investigação*, que apresentam características relacionadas com a criatividade, envolvendo processos complexos do pensamento (e.g. Alvarenga & Vale, 2007; Freiman & Manuel, 2015; Pecharromán Gómez et al., 2016; Saraiva 2016; Souza & Guimarães, 2015; Vale et. al, 2015; Valério, 2005). Dentro deste tipo de problemas há várias categorias que são abordadas em diferentes artigos. Em particular, Freiman e Manuel (2015) defendem o recurso a problemas *ricos* que são aqueles que respeitam o maior número possível das seguintes características: ser aberto; complexo; mal-definido; ter múltiplas interpretações; e ser contextualizado. Um *problema aberto*, tal como também é considerado por outros autores (e.g. Allevato & Vieira, 2016; Morgan, 2003), admite várias respostas corretas ou pode ser resolvido usando várias estratégias. Nesta categoria, podemos incluir as explorações e investigações, sugeridas por Ponte et al. (2015), assim como as tarefas com múltiplas-resoluções (e.g. Alvarenga & Vale, 2007; Canavarro, 2007; Nobre et al., 2015; Vale et al., 2015). Um *problema complexo* requer mais de uma etapa para o resolver, envolve a procura de padrões, generalização, prova, justificações e a formulação de questões/problemas para futuras explorações. Um *problema mal-definido* contém dados desnecessários ou apresenta informações não relacionadas. Um

problema com *múltiplas interpretações* estimula diferentes formas de pensar. Finalmente, um *problema contextualizado* é aquele em que a matemática é apresentada na vida real ou em situações fictícias. Nobre et al. (2015) trabalham problemas em contexto da realidade que têm várias ligações com a modelação. A estas características de um problema *rico* pode acrescentar-se a de problema com *múltiplas-representações* (Tripathi, 2008). As representações permitem informar sobre o pensamento dos alunos e o seu recurso contribui para uma melhor compreensão dos assuntos, permitindo ao resolvidor optar por aquela que mais lhe convenha (e.g. Alvarenga & Vale, 2007; Canavarro, 2007; Henriques, 2012; Meneghetti & Redling, 2008, Nobre et al., 2015; Souza & Guimarães, 2015; Vale et al., 2015; Valério, 2005).

Souza e Guimarães (2015) propõem os *problemas verbais* que são formulados por escrito em linguagem natural, permeada ou não por elementos da linguagem própria da matemática. No seu estudo analisam e discutem aspetos teóricos sobre o modo como estes problemas são formulados, uma vez que a compreensão do texto/enunciado tem implicações no desempenho dos resolvidores.

Pólya distingue *exercício* de *problema* consoante o aluno dispõe ou não de um processo já conhecido ou mecanizado que conduza de imediato à solução (e.g. Allevato & Vieira, 2016; Blanco, 1997; Ponte et al., 2015; Vale et al., 2015). Ponte et al. (2007), numa análise do modo como as equações do 2.º grau são abordadas em manuais escolares (fins do séc.19 e início do séc.20), constata uma evolução no uso dos termos *exercício* e *problema*. Primeiramente, os *exercícios* tendiam a ter grande complexidade e designavam-se por problemas os que tinham um enunciado em linguagem natural. No manual mais recente, o termo *exercício* desaparece e o termo *problema* passa a designar tarefas de tipo muito diversificado.

Alargando o tipo de tarefas Ponte et al. (2015) e Ponte et al. (1998) discutem uma categorização de acordo com o nível de estruturação e de desafio que suscitam, propondo quatro tipos de tarefas: *exercício* (tarefa fechada, desafio reduzido); *problema* (tarefa fechada, desafio elevado), *exploração* (tarefa aberta, desafio reduzido) e *investigações* (tarefa aberta, desafio elevado). Destacam as potencialidades para a aprendizagem das *tarefas abertas*, referidas em vários estudos (e.g. Ferreira & Ponte, 2018; Nobre et al., 2015).

As *explorações* e *investigações* são objeto de outros trabalhos (e.g. Branco, 2013; Henriques, 2012; Jesus & Serrazina, 2005; Mascarenhas et al., 2014; Oliveira, 1998; Pereira & Saraiva 2005; Pires, 2011; Ponte et al., 1998; Ramírez-Montes et al., 2019; Segurado & Ponte, 1998). Oliveira (1998) esclarece que o conceito de atividade de investigação pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático, envolvendo por isso diversos processos matemáticos (formular questões, conjecturar, testar, reformular, provar).

Nos artigos publicados identifica-se uma evolução do uso dos termos *problemas* (no sentido de Pólya, 1945) e *investigações* (no sentido de Ponte et al., 2015) para *tarefas* (não-

rotineiras — tarefas de nível cognitivo elevado, Stein & Smith, 1998) que passa a ser o mais utilizado nos artigos da *Quadrante* do séc. 21.

Alguns artigos discutem teoricamente perspectivas a adotar no ensino e aprendizagem da matemática recorrendo à RP. Em 1992, Boavida discute perspectivas filosóficas da RP. Allevalo e Vieira (2016) defendem o ensino de matemática *através* da RP, pois a matemática e a RP são construídas mutuamente, adotando o ensino-aprendizagem-avaliação da matemática *através* da RP como uma metodologia de ensino. Esta metodologia também é utilizada no estudo de Meneghetti e Dutra (2012). Vale et al. (2015), partindo do mesmo referencial teórico de Allevalo e Vieira (2016) e concordando com a perspectiva de que a RP é uma via privilegiada para o ensino-aprendizagem, reconhecem que ela pode ser, em determinadas circunstâncias, excessiva, pelo que propõem o ensino *com* a RP, uma perspectiva mais consentânea com a prática letiva, em que problemas e outras tarefas devem acompanhar em paralelo o currículo e a prática de sala de aula. Também Blanco (1997) e Carrillo (2000) discutem o mesmo referencial teórico. Contudo, este último autor vai mais além, alargando a perspectiva à didática da matemática, propondo que o foco deve combinar as perspectivas *via* e *sobre*.

As *estratégias* utilizadas na RP, já referidas por Pólya como procedimentos gerais (ou específicos) para aprender a resolver um problema, são um aspeto igualmente discutido por alguns autores (e.g. Alvarenga & Vale, 2007; Blanco, 1997; Pecharrromán Gómez, 2016; Morais & Serrazina, 2013; Vale et al., 2015).

Outro aspeto intimamente ligado com a RP é a *formulação/elaboração de problemas*, que Liljedahl e Cai (2021) consideram como um conceito amplo relacionado com a criação de um novo problema ou a sua reformulação, a qual é estudada por Meneghetti e Redling (2008) e por Vale et al. (2015). A formulação pode ser considerada como equivalente a um *problema aberto*, pois proporciona oportunidades de aprendizagens idênticas às da RP.

Por fim, a RP surge noutra contexto por Santos e Ponte (2002) ao considerarem a prática profissional como uma atividade de RP, pois o professor depara-se com vários desafios profissionais que precisa de resolver. Esta perspectiva é partilhada no trabalho de Azcárate Goded (1999) que se cruza com a de Carrillo (2000), ao identificar que o conhecimento alcançado pela RP é um facilitador do desenvolvimento profissional, ideia que percorre outros trabalhos (Chapman, 1999; Graça, 2003; Pires, 2011).

### **A resolução de problemas como atividade cognitiva**

A RP pode ser entendida como suporte da aprendizagem de alunos e futuros professores, ou seja, como atividade cognitiva onde se identifica o que os alunos, incluindo os da formação inicial de professores, sentem, pensam e fazem.

Durante os anos 90, as *concepções* foram alvo de muita investigação, pois assumia-se que que as experiências vivenciadas na sala de aula influenciavam as concepções e atitudes sobre

a matemática e sobre o modo como se aprende e ensina (Garofalo,1989). Blanco (1997) apresenta uma discussão teórica no âmbito da formação inicial de professores que considera ser o momento ideal para trabalhar as concepções sobre a RP para que os futuros professores venham a considerar a RP na sua prática futura. Mostra que as suas concepções refletiam uma visão tradicional, pelo que se estas concepções não fossem trabalhadas seria impossível que a sua prática se ajustasse às propostas curriculares da altura. Segurado e Ponte (1998) identificam que o trabalho realizado com alunos do 2.º ciclo sobre atividades de investigação contribuiu para uma mudança gradual nas suas concepções e para uma evolução positiva do seu desempenho que evoluiu de algo dependente e receoso para algo mais autónomo. Noutro estudo, Meneghetti e Dutra (2012) abordam a combinatória através de problemas de contagem, com futuros professores, identificando alterações às suas concepções, e argumentando que não se pode deixar que estes concluam a sua formação com as concepções tradicionais com que entraram no seu curso.

Reconhecendo que o avanço de recursos tecnológicos tem vindo a apoiar os alunos na RP e na construção/clarificação de conceitos, Nobre et al. (2015) propõem a folha de cálculo para resolver um conjunto de problemas contextualizados de modo a promover a aprendizagem da álgebra e Ramírez-Montes e Henriques (2019) propõem o GeoGebra para resolver tarefas exploratórias no intuito de promover a aprendizagem de conceitos de probabilidades. Estes estudos concluem que a natureza das tarefas, conjugada com as potencialidades dos recursos utilizados — linguagem híbrida da folha de cálculo, natureza dinâmica do GeoGebra —, contribuíram para a resolução das tarefas e compreensão de conceitos, permitindo alargar o espectro das representações e constituíram-se como uma ferramenta da RP.

As representações têm um papel crucial na RP com tecnologia, mas não só, como Valério (2005) e Canavarro (2007) destacam em contexto do 1.º ciclo. Valério identifica que, na RP de adição e de divisão, as representações usadas pelos alunos evoluem do conhecimento informal (desenhos, escrita verbal, esquemas) para o formal (notações e procedimentos da aritmética formal). Por seu turno, Canavarro, no desenvolvimento do pensamento algébrico, destaca a importância das tarefas e das representações usadas na sua resolução, desde as que incidem sobre o manusear de objetos (ativas) às mais abstratas (simbólicas) e salienta as representações visuais.

Os estudos de Branco (2013), Henriques (2012), Meneghetti e Dutra (2012), Meneghetti e Redling, (2008) e Pereira e Saraiva (2005) debruçam-se sobre a importância das investigações/problemas abertos na aquisição de conceitos (sucessões, análise numérica, geometria, funções, combinatória) e analisam o papel das representações na realização das tarefas e os processos matemáticos envolvidos. Detetam que apesar de algumas dificuldades dos alunos na resolução dessas tarefas, reconhecem o seu contributo para a promoção do raciocínio e a compreensão dos conceitos e concluem que é possível a sua integração curricular.



Vários autores, além de salientarem a importância das representações usadas pelos alunos, consideram-nas indissociáveis das estratégias de RP. Alvarenga e Vale (2007) identificam que alunos do 2.º ciclo na resolução de tarefas em contextos figurativos, recorrem à estratégia *procura de padrões*, privilegiam representações concretas e pictóricas, realizando conexões entre elas. A questão da visualização como estratégia de RP é referida por Pecharromás Gómez et al. (2016) que analisa o uso de estratégias que permitam categorizar o conhecimento intuitivo que é desenvolvido na RP pelos alunos no âmbito do Canguru Matemático. Também Vale et al. (2015) destacam a importância da estratégia *procurar ver* na resolução de um conjunto de tarefas com múltiplas-resoluções, que implicam um conjunto diversificado de representações e contribui para o desenvolvimento de características da criatividade. Nestes trabalhos, a visualização é encarada como uma estratégia de RP que pode constituir uma abordagem alternativa poderosa na RP e na aprendizagem matemática.

Allevato e Vieira (2016) discutem o processo propiciado por tarefas de investigação, realizadas pelos alunos a partir de problemas abertos. A natureza das tarefas desempenhou um papel preponderante na emergência de diversas estratégias de resolução, de acordo com os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos. Por outro lado, Morais e Serrazina (2013) verificaram que as estratégias (específicas) de cálculo mental de alunos na RP, envolvendo diferentes significados de adição e subtração, dependem do significado da operação envolvida nos problemas.

Sobre a formulação de problemas, Vale et al. (2015) defendem a sua integração a par da RP, pois ambas ajudam os alunos a pensar de forma divergente e a ser flexíveis no seu raciocínio. Realçam também a importância que a resolução e a formulação de problemas têm para a criatividade em matemática. Meneghetti e Redling (2008) detetaram dificuldades de futuros professores na reformulação de tarefas para o estudo das funções, fornecidas previamente pelo professor, de modo que tivessem natureza investigativa.

Os estudos de Mascarenhas et al. (2014), Holzmann et al. (2021), Almeida e Almeida (2011), Freiman e Manuel (2015) envolvem um número significativo de alunos. Mascarenhas et al. (2014) averiguaram se uma intervenção pedagógica baseada na RP e em tarefas de investigação, com recurso a materiais manipuláveis, melhoravam a aprendizagem de conceitos de geometria de alunos do ensino básico. Concluíram que a intervenção favoreceu a aprendizagem dos referidos conceitos. O estudo de Holzmann et al. (2021) analisa e relaciona o desempenho aritmético e o desempenho na RP de alunos através de um teste composto de três problemas simples e 35 cálculos aritméticos, concluindo que a aritmética e a RP estão relacionadas e podem ser articuladas no ensino desde os primeiros anos. Estes dois estudos evidenciam que a RP contribui para a aprendizagem dos alunos quer em geometria quer em aritmética. Almeida e Almeida (2011) estudaram as diferenças nos processos cognitivos (elaboração-resolução-verificação)

propostos por Pólya, de alunos com maior e menor aproveitamento na RP em matemática, tendo encontrado diferenças significativas nos processos cognitivos utilizados. No grupo de maior rendimento o processo que mais explicava a resolução era a verificação, enquanto que no grupo de menor rendimento era a planificação. Freiman e Manuel (2015) estudaram uma comunidade virtual concebida para alunos de diferentes níveis, aos quais foram propostos 118 problemas ricos, interessantes e desafiadores para identificar como estes problemas estão relacionados com as percepções de interesse e dificuldade manifestadas pelos resolvidores. Os resultados não revelaram qualquer relação significativa entre a riqueza dos problemas e as percepções dos alunos. Contudo, concluíram que é plausível que a RP *online* afete positivamente a motivação dos alunos, tornando assim o problema mais atrativo do que se fosse apresentado em papel.

### **A resolução de problemas como prática educativa**

A RP continua a ser um desafio para os professores, pelo que é necessário ajudá-los a desenvolver e sustentar a sua prática de RP, e uma fonte dessa ajuda vem do seu desenvolvimento profissional.

Ponte et al. (1998) caracterizam o papel do professor durante a aplicação de uma tarefa de investigação: pensar matematicamente - investigar/relacionar (decorre da natureza aberta da tarefa); dar informação e promover a reflexão (decorre do currículo); desafiar, apoiar e avaliar (decorrem do desenvolvimento de atividade); assim como, aspetos do conhecimento profissional, nomeadamente o conhecimento matemático e o conhecimento didático. Também o estudo de Segurado e Ponte (1998) conclui que o modo de trabalho usado pela professora e a dinâmica da aula proporcionaram situações favoráveis para o trabalho dos alunos com tarefas de investigações. Já Oliveira (1998), que discute os desafios que a realização de tarefas de investigação coloca à prática de duas professoras, conclui que apesar das professoras valorizarem estas tarefas são-lhes colocados alguns desafios como: o apoio a conceder ao aluno, ao lugar da justificação/prova matemáticas e à realização da discussão final, e a importância da reflexão dos professores sobre a gestão de aulas com investigações. Pires (2011) retoma algumas das ideias de Oliveira sobre a prática de uma professora, durante um programa de formação, na exploração de tarefas de investigação. A dinâmica do programa, valorizando estas tarefas assim como a partilha e a discussão coletiva de experiências, ajudou a professora a integrar as investigações e a compreender os novos desafios que acarreta, sobretudo nas mudanças na gestão do seu trabalho e do trabalho dos seus alunos. Estes artigos apontam para o desenvolvimento do conhecimento do professor, salientando a importância de o professor valorizar tarefas/investigações/problemas na aprendizagem dos alunos. Salientam, igualmente, a complexidade do papel do professor para ultrapassar alguns constrangimentos na sua utilização e na integração curricular.

Alguns estudos analisam modos de melhorar as práticas com tarefas não-rotineiras. Ponte et al. (2015) analisam as perspetivas sobre as tarefas (exercício-problema-exploração) a propor aos alunos por professoras que participam num estudo de aula. A partir do trabalho efetuado e das reflexões realizadas, as perspetivas iniciais das professoras sobre tarefas, bem como sobre as capacidades dos seus alunos para as resolver, evoluíram ao longo do estudo. Com as mesmas preocupações, Chapman (1999) discute um programa de RP desenvolvido com professores que tinham pouca/nenhuma experiência em resolver problema não-rotineiros e que ensinavam RP de modo tradicional, mas que estavam interessados em mudar a sua prática. As experiências de RP proporcionadas pelo programa permitiram identificar que a intervenção dos professores antes do programa era a de modelar exemplos de RP que os alunos deveriam praticar, e depois passaram a privilegiar um papel mais autónomo e ativo dos alunos durante a RP. Ajudar os professores a compreender o seu comportamento durante o ensino da RP pode ser um passo para facilitar mudanças nas suas práticas.

Seguindo as mesmas preocupações de Chapman, Carrillo (2000) dá uma visão complexa e integradora dos conhecimentos profissionais do professor de matemática. Concebe a RP como um conhecimento a ser alcançado e facilitador do desenvolvimento profissional. Segue um modelo de ensino que recorre a seis situações do ensino e aprendizagem indicadas para uma prática de RP, exemplificando características desejáveis do conhecimento profissional: 1) estar consciente dos objetivos educativos; 2) possuir elementos de reflexão sobre a adoção de diferentes teorias e conceções; 3) ter critérios para organizar as atividades de aula; 4) possuir uma atitude aberta e flexível; 5) ter perguntas e uma postura crítica face à informação; e 6) colocar-se no ponto de vista do aluno. Estas situações permitiram obter indicadores que ilustram o contributo para o desenvolvimento profissional dos alunos-futuros professores, assim como identificaram que a evolução das conceções dos alunos foi uma consequência positiva da abordagem da RP tal como foi delineada.

Morgan (2003) e Graça (2003) estudam a avaliação da RP. Morgan recorre a vários tipos de problema abertos que permitem um acesso a mais estudantes pois estes podem usar diferentes abordagens de acordo com os seus conhecimentos e experiência pessoais, o que possibilita orientar a avaliação para o que está presente no pensamento do estudante e não para o que pode estar ausente da sua resposta. Graça foca-se na relação entre as conceções e as práticas de avaliação em RP de professores com experiência na área da RP. Enquanto que os professores revelaram coerência entre as suas conceções e respetivas práticas na RP, no que diz respeito à avaliação da RP existe uma diferença entre eles e entre as conceções e práticas de avaliação. Assim, mesmo professores com reconhecida experiência precisam de conhecer os fatores que influenciam o desempenho dos alunos para se sentirem motivados para diversificar os instrumentos de avaliação na RP.

## Raciocínio Matemático

No número de artigos publicados salienta-se a década de 2012-2021 na qual se incluem sete artigos do número temático dedicado a este tema, publicado em 2012 (Tabela 5).

Tabela 5. Número de estudos publicados sobre RM, por década

Década	N.º de estudos
1992-2001	2
2002-2011	6
2012-2021	19
<b>Total</b>	<b>27</b>

Refletindo a complexidade deste tema e as várias abordagens para o analisar, os artigos publicados na *Quadrante* abarcam vários níveis de ensino, focam diferentes tipos de RM, analisam e caracterizam potencialidades das tarefas matemáticas. Esclarecem, ainda, dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem e avançam propostas que sugerem caminhos para uma prática letiva que valoriza o desenvolvimento do RM dos alunos.

## Entendimento de raciocínio matemático

Raciocinar é fazer inferências justificadas, ou seja, usar a informação existente para chegar a novas conclusões. O RM assenta no uso de um conjunto de processos mentais complexos que permitem partir de proposições conhecidas para estabelecer um conhecimento novo (Mata-Pereira & Ponte, 2012). Os processos usados e a sua organização no decurso da produção de conhecimento caracterizam os diferentes tipos de raciocínio habitualmente considerados.

O raciocínio dedutivo, também designado por raciocínio lógico ou raciocínio lógico-dedutivo, parte de um conjunto de afirmações assumidas como verdadeiras (os axiomas) ou de proposições anteriormente provadas (teoremas) para, através do uso rigoroso de um conjunto de regras de inferência, provar que o valor lógico de uma nova proposição é verdadeiro. É um raciocínio essencial para validar afirmações matemáticas e é muitas vezes considerado como ‘o’ raciocínio característico da Matemática. Esta ideia é contrariada implícita ou explicitamente nos artigos publicados na *Quadrante* e que maioritariamente não se focam no raciocínio dedutivo. Mason et al. (2012) propõem mesmo a ‘expressão raciocínio razoável’ para se demarcarem das posições que identificam raciocínio com raciocínio formal.

O raciocínio indutivo consiste em inferir uma regra a partir de regularidades observadas em casos particulares, sendo focado em vários trabalhos. Por exemplo, Pimentel e Vale

(2012) ilustram o seu uso na análise de padrões em sequências de crescimento e Mestre e Oliveira (2012) exemplificam como ele está associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A abdução é um processo de inferência que parte de uma observação invulgar ou estranha, pelo que desperta a curiosidade para procurar uma explicação para a sua ocorrência. Pimentel e Vale (2012) sublinham que este tipo de raciocínio está presente na exploração de problemas de padrão considerando-o como porta de entrada para o raciocínio indutivo. Usa-se este raciocínio quando se buscam hipóteses preliminares que decorrem da identificação de dados comuns aos analisados, processo a que está associada a criatividade subjacente à formulação de novas ideias.

A produção de conhecimento matemático recorre ao uso dos vários tipos de raciocínio. Os raciocínios indutivo e abdução partem do particular para o geral, formulando hipóteses e conjeturas que são sucessivamente testadas com o fim de as justificar ou refutar. O recurso ao raciocínio dedutivo decorre da necessidade de validar as conjeturas que resistem a sucessivos testes, confirmando ou infirmando a sua validade geral. Henriques (2012), com base num estudo com alunos universitários, considera que estes são capazes de usar tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo.

No trabalho de Neto et al. (2011) o foco está no raciocínio dedutivo diferenciando o que designam por justificação empírica de justificação dedutiva. Os trabalhos de Henriques (2012), Mata-Pereira e Ponte (2012), Mestre e Oliveira (2012), Canavarro e Pinto (2012) ou Pimentel e Vale (2012) incidem no RM em geral e nos processos de raciocínio usados, com destaque para a formulação de conjeturas, a justificação e a generalização.

Henriques (2012) sublinha que o RM está fortemente relacionado com as representações usadas uma vez que são elas que permitem o acesso ao raciocínio de cada um. Também salientando o papel das representações, Canavarro e Pinto (2012) destacam o seu papel no desenvolvimento da justificação, identificando a importância do diagrama e, em geral, das representações icónicas.

O quadro conceptual proposto por Mata-Pereira e Ponte (2012) para estudar o RM (Figura 1) articula os processos de conjeturar, exemplificar e generalizar com os raciocínios indutivo, dedutivo e o que designam por processo abdução. A zona central do esquema da Figura 1 corresponde ao RM que se apoia “nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*)” (p. 84). Este quadro evidencia ainda a inter-relação entre o que Jeannotte e Kieran (2017) designam como aspeto estrutural – os tipos de RM já referidos anteriormente – e como aspeto processual do RM – os processos de RM que analisamos mais à frente.

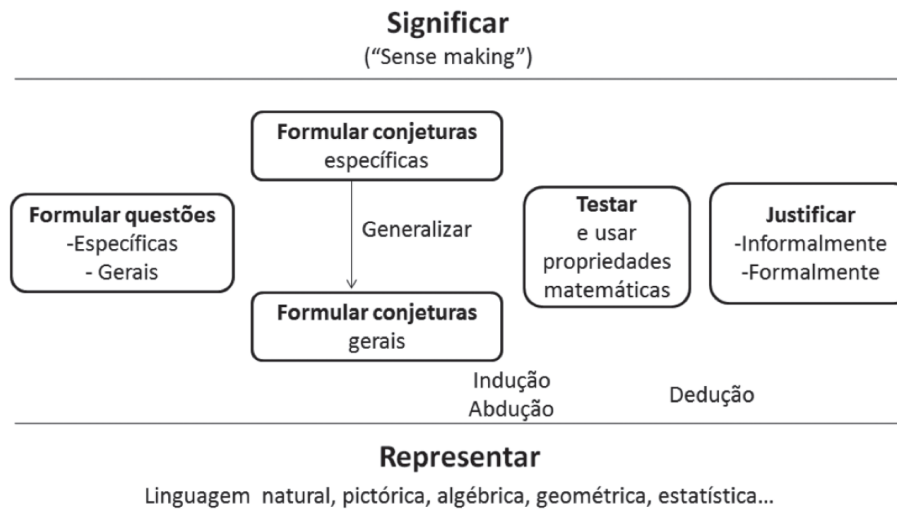


Figura 1. Quadro conceitual para o estudo do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p. 84)

Várias investigações caracterizam o raciocínio com base no uso de processos próprios da Estatística, da Geometria, da Álgebra ou mesmo de partes de cada um destes tópicos matemáticos. Por exemplo, no âmbito da Estatística, Lopes e Fernandes (2014) estudam o raciocínio estatístico indicando que ele envolve fazer interpretações adequadas de dados, representar esses dados e resumos estatísticos, fazer conexões entre os conceitos estatísticos e relacionar ideias sobre os dados. Situando-se igualmente neste tópico, Henriques e Antunes (2014) estudam o raciocínio covariacional que envolve explorar relações entre duas variáveis numéricas, analisar como elas variam em relação uma à outra e interpretar essas relações. No domínio da Álgebra, Kieran (2007) considera o raciocínio algébrico como um processo relativo a atividades de generalização que envolvem os objetos da Álgebra (expressões e equações) e atividades de transformação (manipulação simbólica). Caracteriza-o ainda como incluindo atividades de nível meta, em que a Álgebra é usada como ferramenta e que não são exclusivas deste tópico matemático. Considerar que as características do raciocínio focado num determinado tópico extravasam o conhecimento desse tópico é o entendimento implícito ou explícito dos autores referidos neste parágrafo. Também Clements et al. (2018), no domínio da Geometria, ao referirem, em paralelo, conhecimento geométrico e raciocínio espacial sugerem que estes autores incluem no raciocínio aspetos que não dizem só respeito ao conhecimento geométrico.

Nos estudos de Nunes e Rodrigues (2018), Brunheira e Ponte (2018) e Conceição e Rodrigues (2020), a par do contributo para compreender a evolução do raciocínio espacial e o processo de definir figuras geométricas, identificamos características do seu entendimento de raciocínio geométrico. As primeiras autoras indicam que o raciocínio espacial de cinco crianças de 5 anos, que estudaram, evoluiu, uma vez que foram capazes de resolver as tarefas, compondo e decompondo, dispondo em simetria, comparando e visualizando as

propriedades e relações espaciais em objetos e interligando propriedades das relações espaciais. Brunheira e Ponte (2018) concluem que o processo de definir figuras geométricas promove, em estudantes da Licenciatura em Educação Básica, o conhecimento dos conceitos a definir e a noção de definição e desenvolve o raciocínio geométrico. Finalmente, Conceição e Rodrigues (2020) concluem que relacionar figuras a três dimensões com o seu registo em papel permite aos alunos do 1.º ano usar processos de raciocínio espacial, que envolvem relacionar e reorganizar (*compreender*) e mudar de dimensão (*transformar*).

### **Provar, justificar e generalizar**

A distinção entre prova ou demonstração matemática e argumentação, proposta por Pedemonte (2012), ajuda a clarificar o sentido de demonstração matemática. Esta autora considera que a argumentação pode antecipar a fase de demonstração, apoiando a formulação de conjeturas, mas que elas só podem ser validadas no interior de um quadro teórico. Como Antonini (2018) refere, uma prova matemática é uma forma de argumentação que satisfaz condições lógicas e que é construída e validada no seio de uma teoria matemática que se assume como referência.

Quanto ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo e, em particular, à organização de uma prova matemática, Neto et al. (2011) concluem que a exploração de Geometrias não Euclidianas (GnE) favorece a evolução de justificações empíricas, baseadas em relações que se estabelecem em exemplos, para justificações de natureza dedutiva, que revelam a compreensão do papel das definições na estrutura de uma justificação segundo um esquema dedutivo, recomendando a integração das GnE no Ensino Secundário.

Ainda com o foco no desenvolvimento do raciocínio dedutivo e do tópico Geometria, Antonini (2018) estuda a prova por redução ao absurdo, concluindo que os alunos, para compreenderem esta prova, precisam de restabelecer a rutura entre as componentes figurativas e as conceptuais procurando dar um significado geométrico para o absurdo. No entanto, quando numa prova por redução ao absurdo as figuras geométricas têm de ser rejeitadas, muitos alunos tendem a modificar as figuras para que não pareçam absurdas nem impossíveis.

Henriques (2012), no estudo com estudantes universitários que frequentam a disciplina de Análise Numérica, conclui que eles são capazes de usar tanto o raciocínio dedutivo como o indutivo. No entanto, identifica dificuldades dos estudantes em alguns processos de raciocínio, sobretudo na justificação, pois tendem a não sentir necessidade de justificar as conjeturas, que consideram verdadeiras após a realização de alguns testes, e na generalização, que julgam consistir num processo de formalização. Num estudo que também incidiu em estudantes do ensino superior, Vieira et al. (2020) concluem que o conhecimento dos estudantes, futuros professores, sobre processos de raciocínio é

relativamente adequado, e que no final de uma experiência de formação focada no raciocínio explicitam com maior clareza o modo como os estendem.

Situando-se num contexto que diz respeito a todos os tipos de raciocínio, estudam-se várias formas de justificação: as visuais, referidas por Pimentel e Vale (2012), elaboradas a partir de um apoio geométrico e as que Falsetti e Lugo (2016) designam por ações de validação. Estas incluem aspetos que não são propriamente processos de raciocínio, como a formulação de questões relacionadas com a atividade, explicar ou descrever. No entanto, incluem, igualmente, a justificação por analogia, a exemplificação mostrando regularidades ou a generalização indutiva.

Na generalização, destacamos os contributos de Mestre e Oliveira (2012, 2016), Pimentel e Vale (2012) e Mata-Pereira e Ponte (2012) que a caracterizam tendo em conta diferentes atores e contextos. As duas primeiras autoras concluem que alunos de 4.º ano progredem na mobilização da capacidade de generalização à medida que evoluem no reconhecimento dos aspetos relacionais da aritmética e identificam em alunos deste ano de escolaridade três momentos associados à construção da generalização matemática: (1) a utilização de quase-variáveis para traduzir a generalização, (2) a emergência da linguagem simbólica, e (3) o entendimento de símbolo matemático.

O estudo de Pimentel e Vale (2012) foca a exploração de padrões, sobretudo nos que ocorrem em sequências de crescimento, realizada por estudantes do curso de Educação Básica, e identifica que a generalização ocorre, inicialmente, com base na análise dos termos da sequência representados figurativamente e que se exprime aritmeticamente, mas sem conseguir estender essa informação para gerar um termo qualquer da sequência. Posteriormente, através do diálogo com a professora, os estudantes produzem uma justificação mais sólida, mas ainda não algébrica. Numa terceira fase, conseguem fazer apelo ao que veem na representação figurativa, exprimindo-o algebricamente.

Finalmente, o estudo de Mata-Pereira e Ponte (2012), embora concluindo que tanto os alunos de 7.º como de 9.º ano tendem a seguir uma abordagem indutiva, generalizando as relações observadas em casos particulares para uma classe de objetos mais ampla, sugere diferenças na forma de generalizar. No 7.º ano, os processos de significação usados incidem em conexões com propriedades ou conceitos conhecidos, não traduzindo uma relação direta entre os casos particulares e um mais geral, o que sugere o uso de raciocínio abduutivo. No 9.º ano, uma vez que recorrem à linguagem simbólica, as conexões com as propriedades e conceitos é menos visível e menos imediata, incluindo, algumas vezes, características de cunho dedutivo.

### **Raciocínio e exploração de tarefas**

A importância de usar tarefas que ‘fazem apelo à generalização’ (Mason et al., 2012), de ‘cunho exploratório’ (Ponte et al., 2013), de ‘investigação’ (Henriques, 2012) e de



‘problemas de padrão’ (Alvarenga & Vale, 2007; Pimentel & Vale, 2012) é sublinhada por um grande número de autores.

Centrando-se no raciocínio algébrico, a análise dos casos discutidos por Kieran (2007) revela a importância da cuidadosa sequenciação das tarefas, da sua estruturação numérica e do modo como o professor organiza a sua exploração e questiona os alunos. A autora salienta que é importante que as tarefas e o questionamento do professor promovam nos alunos uma consciência de uma certa forma de organização da sequência de exemplos e da sua generalização.

Mestre e Oliveira (2016) destacam que as tarefas, em que é possível variar quantidades ou cujos contextos permitem aos alunos a atribuição de significado, favorecem a generalização. Os problemas de padrão são igualmente reconhecidos como tarefas que potenciam a simbolização e generalizações próximas (Alvarenga & Vale, 2007). De facto, os alunos de 5.º ano estudados por estas autoras tendem a fazer generalizações próximas baseadas no raciocínio recursivo e que facilmente as compreendem. Não sentem, no entanto, necessidade de testar as suas conjeturas nem de procurar estratégias que permitam chegar a uma generalização distante, que se traduza na regra geral de formação do padrão. Mais uma vez, o professor é considerado fundamental para ajudar os alunos a ultrapassar estas e outras dificuldades.

As tarefas são o suporte que Jacob e Doerr (2014) usam para, através do recurso a entrevistas baseadas em tarefas, investigar a evolução do raciocínio inferencial informal para o raciocínio inferencial formal. As tarefas usadas refletem uma cuidadosa integração crítica do conhecimento teórico e empírico sobre a evolução da aprendizagem da inferência estatística.

Os momentos de discussão coletiva, orquestrada pelo professor, e em que os alunos têm um papel ativo na explicação e interpretação da sua forma de pensar, são considerados por Mestre e Oliveira (2012) como determinantes para a iniciação gradual à simbolização como expressão da procura da generalização. Canavarro e Pinto (2012) destacam a importância do professor na exploração das representações icónicas, ferramentas importantes para o raciocínio matemático.

## **Comunicação Matemática**

Os 11 artigos publicados que incidem sobre a CM concentram-se na década de 2020, havendo um pico no final da terceira década, coincidindo com um número temático dedicado ao tema. São abrangidos todos os níveis de ensino e também contextos de formação de professores.

A generalidade dos autores assume o importante papel que a CM tem no ensino e na aprendizagem da matemática, enquanto discurso que permite a interação em sala de aula.

Porém, as práticas de sala de aula e as oportunidades de aprendizagem proporcionadas poderão ser muito diferentes consoante as conceções de CM adotadas pelo professor (Brendefur & Frykholm, 2000; Guerreiro et al., 2015). Estas diferentes conceções e práticas de CM, plasmadas no discurso, estão presentes nos artigos analisados, como mostraremos a seguir.

### **Entendimento do que é a comunicação**

A CM pode ser entendida como meio, ao serviço do ensino e da aprendizagem da Matemática, e como finalidade curricular, enquanto competência a desenvolver pelos alunos. Quando focamos o papel que a CM pode ter no ensino da matemática, encontramos na literatura diversas conceções e práticas. Destas, destacam-se duas que se traduzem em ecologias de sala de aula díspares. Uma das conceções de CM baseia-se na ideia de que é possível transmitir, do professor para o aluno, um conjunto organizado de conhecimentos matemáticos, seguindo o padrão de interação em que o professor fala e o aluno ouve (Guerreiro et al., 2015). Nos estudos analisados, os trabalhos de Ponte e Serrazina (2004) e de Guerreiro e Martins (2020) refletem sobre esta conceção de CM e sobre as práticas de ensino que lhe estão associadas, sinalizando que elas são predominantes nas aulas de Matemática. Guerreiro e Martins (2020), num estudo com professores do 2.º ciclo do ensino básico, concluem que esta visão da CM está relacionada com uma visão que privilegia a avaliação da aprendizagem em detrimento da avaliação para a aprendizagem.

Enquanto que a primeira conceção de CM está associada ao que habitualmente se chama ensino tradicional, a segunda conceção, que Sierspinska (1998) representa através da metáfora alunos e professor dialogam, assenta na ideia de que a aprendizagem se faz na interação social em sala aula, através de recursivos processos de ação, reflexão e partilha, assentes na resolução de tarefas matemáticas desafiantes, na discussão coletiva e na institucionalização do conhecimento matemático (Canavarro et al., 2014; Guerreiro et al., 2015). Esta conceção de CM inspira aulas baseadas na RP, nas investigações e nos projetos, que habitualmente estabelecem uma estreita relação com a realidade e que promovem o pensamento divergente e criativo. Os padrões de interação nestas aulas são diversos e dinâmicos consoante a atividade dos alunos. O professor desempenha um papel fundamental na constituição desses padrões, através do recurso a ações comunicativas, como, perguntar, responder, explicar e ouvir (Guerreiro et al., 2015). Nos estudos analisados, está presente esta conceção de CM, embora Ponte e Serrazina (2004) e também Guerreiro e Martins (2020) assinalem que ela não é predominante nas aulas de Matemática. Nos estudos de Rodrigues et al. (2020), Corrêa e Lopes (2020) e Carvalho e Gontijo (2020) temos aproximações a esta conceção de CM, com alunos a trabalhar em grupo, resolvendo tarefas e produzindo registos que combinam representações matemáticas e linguagem

verbal para apoiar a discussão coletiva. Rodrigues et al. (2020) analisam as práticas discursivas de professores de matemática do ensino básico em discussões coletivas que decorrem de tarefas matemáticas no tema da Álgebra. Já Corrêa e Lopes (2020), com alunos brasileiros do 2.º ano (6/7 anos de idade), no tema da Estatística, analisam o papel desempenhado pelo diálogo na RP socialmente relevantes. As autoras concluem que os alunos, perante problemas da realidade, manifestam criatividade, que se traduz num diálogo produtivo, que envolve reflexão, questionamento e consciência social.

Retomando a ideia do pensamento divergente e criatividade, Carvalho e Gontijo (2020) investigam como diferentes tipos de interação comunicativa (no trabalho individual, no grupo sem mediação de poder e no grupo com mediação de poder) influenciam o desenvolvimento da criatividade dos alunos em matemática. As conclusões mostram que as interações dos alunos, em grupo com a mediação do professor, impactam positivamente na criatividade, na comunicação e na aprendizagem dos alunos. Em qualquer um destes estudos, mas também nos de Boavida (2006) e de Paiva (2020), o professor é assumidamente um elemento decisivo para a construção do discurso da aula e do envolvimento dos alunos.

### **Discurso matemático**

O discurso é a linguagem em ação com intencionalidade comunicativa pelo que é uma realidade plural. Podemos ter diversos discursos como o da aula de matemática, o do professor, o dos alunos, o dos textos escolares, e o da formação de professores. A capacidade para compreender e produzir discurso é decisiva para o desenvolvimento de professores, de alunos e de autoridades educativas. Santana e Porto (2020) analisam precisamente o discurso promovido pelo programa brasileiro de formação contínua de professores em Matemática (PROFMAT), e como ele integra as produções textuais da matemática escolar. O seu estudo revela práticas comunicativas no contexto da formação marcadas pela transmissão do discurso matemático, não valorizando as produções textuais do contexto escolar dos professores.

Nas aulas de matemática, o discurso escrito tem um peso importante. Contudo, enquanto numa aula tradicional ele é repetitivo e quase sempre da responsabilidade do professor, nas aulas exploratórias ele apoia a RP e a sistematização das aprendizagens, assumindo os alunos elevado protagonismo. A importância dos registos escritos surge nos trabalhos de Corrêa e Lopes (2020), Rodrigues et al. (2020) e Goma et al. (2020). Este último tem o discurso escrito como foco principal, sendo investigada a comunicação escrita de futuras professoras na resolução de uma tarefa matemática de natureza aberta que implica pensamento algébrico. Esta tarefa colocou às futuras professoras dificuldades inesperadas, evidentes nas suas produções escritas. Na análise da comunicação escrita, as autoras utilizam quatro dimensões: clareza, fundamentação, lógica e profundidade. Embora as categorias

sejam bastante amplas, as autoras concluem que as futuras professoras evidenciam pouca clareza, reduzida fundamentação das ideias e problemas de articulação lógica.

Por fim, e tal como os estudos analisados evidenciam, o discurso oral dos alunos está muito ausente em aulas tradicionais e muito presente nas aulas exploratórias da Matemática, seja nos pequenos grupos, seja no grupo-turma.

## Modelação Matemática

A MM é um tema cuja presença na *Quadrante* está muito associada à revista temática dedicada a este tema em 2021 e que inclui 27 artigos, publicados nos dois números desse ano. De facto, para além de três artigos incluídos na década de 1992-2001, só dois da década de 2012-2021 não se integram neste número temático (Tabela 6).

Tabela 6. Número de estudos publicados sobre MM, por década

Década	N.º de estudos
1992-2001	3
2002-2011	0
2012-2021	29
<b>Total</b>	<b>32</b>

A grande maioria dos artigos publicados incide em temáticas globalmente focadas na aprendizagem da MM e abrange os níveis de ensino pré-escolar, ensino básico e ensino superior, podendo também incluir futuros professores. O estudo de Alwast e Vorhölter (2021) é o único que se foca nas competências profissionais do professor, incidindo no desenvolvimento das competências de *noticing* de quatro futuros professores.

## Entendimento de modelação

A ideia de que a MM é um processo (habitualmente designado por ciclo de MM) de resolução de um problema do mundo real no qual se recorre à matemática para construir um modelo matemático da situação e de que, para obter um modelo matemático é necessário, implícita ou explicitamente, estabelecer uma relação entre alguma ideia matemática e uma situação real, é comum a todos os trabalhos publicados.

González Galaviz et al. (2021), Ärlebäck et al. (2021), Irigoyen Carrillo et al. (2021), assim como Aymerich e Albarracín (2021) adotam a perspetiva de modelos e modelação proposta por Lesh e Doerr (2003), pelo que consideram que os modelos matemáticos são sistemas conceptuais generalizáveis de produção de sentido, desenvolvidos iterativamente e que geram representações e significados partilhados dos fenómenos investigados.

O modo como se caracteriza o ciclo de MM é diverso. No entanto, Sala Sebastià et al. (2021) referem que o proposto por Blum e Leiß (2007) é relativamente consensual ao nível da comunidade matemática e que muitos autores o assumem, embora introduzindo-lhe pequenas alterações que decorrem do foco dos aspetos em estudo. De facto, isto verifica-se em muitos dos trabalhos analisados (Alsina et al., 2021, Ludwig & Jablonski, 2021, Sala Sebastià et al., 2021). Este modelo (Figura 2) tem por base a execução de um ciclo que engloba várias fases. Trata-se de um processo cíclico, mas dinâmico e não linear, de interpretação de informações, escolha de dados relevantes, identificação de procedimentos que podem levar a novas informações, criando múltiplas representações matemáticas.

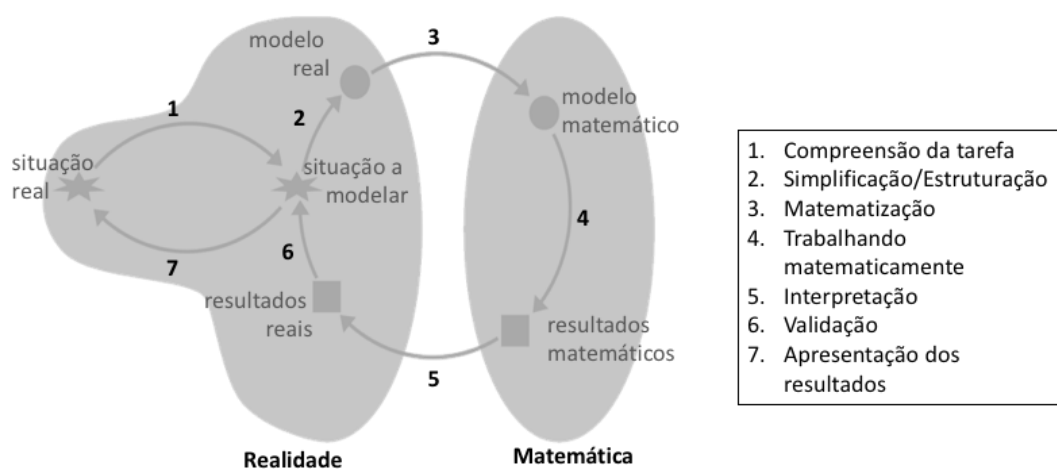


Figura 2. Ciclo de modelação matemática (esquema baseado em Blum & Leiß, 2007, p. 225)

Procurando não associar a MM apenas às atividades que permitem gerar modelos iniciais, muito comuns ao nível da educação infantil, a partir do uso de modelos manipulativos ou de modelos gráficos e/ou visuais, Alsina et al. (2021) usam a designação Modelização Matemática Precoce que igualmente enfatiza a importância do conhecimento inicial para o processo de tradução entre os contextos do mundo real e da matemática.

Ikeda e Stephens (2021), com base na revisão de uma seleção de artigos publicados a partir dos anos 90 pelo ICTMA e pelo ICMI 14, identificam duas conceções de uma abordagem de modelação integrada (*integrated modelling approach*). Na primeira predomina a matematização e a construção do conhecimento matemático que tanto pode ser usado na realidade como na matemática. Na segunda é dada ênfase à visão de modelação como interação entre a realidade e a matemática.

Trabalhar a MM com estudantes para além de incluir situações em que se propõem a construção de modelos matemáticos pode também abranger a exploração de situações de utilização e análise de modelos dados, tal como acontece nos trabalhos de Carreira (1993) e Mendonça e Lopes (2017).

## Tarefas de modelação

Ao nível da prática escolar são muitas vezes usadas tarefas consideradas de modelação, mas que são, de facto, convites a uma matematização simplificada e à exploração de situações pseudo extramatemáticas que não refletem a distinção conceptual entre competências de MM e competências de RP (Højgaard, 2021). Também Jessen e Kjeldsen (2021) identificam em livros de texto dinamarqueses exemplos e exercícios de situações já matematizadas e cujo objetivo não é o de realizar uma atividade de modelação, mas sim de aplicar a matemática em situações práticas. Alertam, ainda, para as alterações que ocorrem durante a transposição didática e que levam a que as práticas de modelação e a interdisciplinaridade sejam bastante limitadas. No entanto, o conhecimento que hoje se tem sobre as características e potencialidades das tarefas de MM é significativo e vários artigos publicados na *Quadrante* espelham muito desse conhecimento.

Nos trilhos matemáticos, tarefas que convidam os participantes a percorrer um trajeto em que existem objetos ou edifícios que contextualizam questões matemáticas, a transição para o modelo matemático, via a matematização, ocorre de modo coerente e sustentado (Buchholtz, 2021; Ludwig & Jablonski, 2021). Estes últimos autores recorrem a um sistema com várias componentes e que inclui uma aplicação que guia os estudantes ao longo de trilhos matemáticos virtuais.

Outro tipo de tarefas são os problemas de Fermi, que são problemas de estimação com contexto real, que Segura Cordero et al. (2021) consideram adequados para iniciar os estudantes na MM, pois tendencialmente envolvem o uso de conhecimentos matemáticos relativamente simples. Num estudo realizado com futuros professores do 1.º ciclo concluem que a resolução destes problemas é exigente do ponto de vista cognitivo e que é importante a realização do trabalho de campo, experiência que os participantes nem sempre tiveram uma vez que numa primeira fase os problemas foram apresentados em papel e com imagens relativas à situação real. Só numa segunda fase é que resolveram os problemas no contexto real a que eles se referiam.

Greefrath e Frenken (2021) desenham um conjunto de critérios para criar problemas de Fermi que aplicam a nove problemas de Fermi incluídos num instrumento de avaliação destinado aos alunos alemães de 14 anos. Concluem que existe uma certa homogeneidade nos problemas de Fermi usados nesta avaliação, mas que estes parecem também estar relacionados com várias dificuldades. Estas parecem estar relacionadas com o número de quantidades matemáticas necessárias para obter a solução. Concluem, ainda, que este tipo de problemas pode abranger vários aspetos de desempenho diferente e que são adequados para integrar situações de MM em testes e, logo, também nas aulas.

A importância do contexto do mundo real apresentado nas tarefas de MM é analisada por Elfringhoff e Schukajlow (2021) que concluem que os cinco alunos de 9.º ano estudados

manifestam interesse em resolver tarefas a cujo contexto se sentem emocionalmente ligados e que acreditam poder resolver corretamente.

A Tabela 7 apresenta de modo resumido os princípios das *Model Eliciting Activities* (MEA) propostos por Lesh et al. (2000), usados no *design* de tarefas nos trabalhos de Irigoyen Carrillo et al. (2021), González Galaviz et al. (2021) e Aymerich e Albarracin (2021) e na Sequência de Desenvolvimento de Modelos estudada por Moreno Sandoval e Alvarado-Monroy (2021).

Tabela 7. Breve caracterização das MEA (Lesh et al., 2000)

<b>Princípio</b>	<b>Descrição</b>
Realidade	Isto poderia ocorrer na vida real?
Construção de um modelo	A tarefa assegura que os estudantes reconheçam a necessidade de construir, modificar, ampliar ou refinar um modelo?
Autoavaliação	São claros os critérios para que os estudantes possam avaliar a utilidade das respostas alternativas?
Documentação do modelo	As respostas requerem que os estudantes explicitem como pensaram acerca da situação?
Protótipo simples	A situação é a mais simples possível e gera a necessidade de um modelo significativo?
Generalização do modelo	O sistema conceptual pode incluir facilmente vários tipos de situações?

Globalmente estes autores consideram o *design* de uma MEA como um processo dinâmico em que se procuram continuamente identificar as características essenciais e os contextos ideais que permitem realizar atividades de MM na aula. O estudo de González Galaviz et al. (2021) conclui que estes princípios de *design* foram úteis para criar contextos de criptografia e Irigoyen Carrillo et al. (2021) identificam a necessidade de fazer ajustes às tarefas de otimização propostas por 44 estudantes do Ensino Superior de modo a evidenciar a aplicação dos princípios da realidade, da construção do protótipo simples e da generalização do modelo. No estudo de Aymerich e Albarracin (2021) as MEA são usadas para apoiar a construção do contexto de aprendizagem que tinha como objetivo geral que os alunos compreendessem a necessidade de medir a variabilidade existente numa grande quantidade de dados quantitativos. Finalmente, o estudo de Moreno Sandoval e Alvarado-Monroy (2021) conclui que a evolução do raciocínio covaricacional dos estudantes pode ser atribuído às características de uma sequência de tarefas de modelação.

As naturezas didática, sociopolítica e fictícia são características que Araújo e Lima (2021) identificam nos projetos de MM e que os distingue dos habitualmente usados nas aulas tradicionais.

## Desenvolver a modelação

A análise da aprendizagem proporcionada a alunos dos vários níveis de ensino, futuros professores ou professores em serviço, por experiências que incidem na MM é o foco de vários trabalhos. Destacam-se as potencialidades da MM para aprender a usar matemática na exploração e compreensão do mundo real (Carreira, 1993), para apoiar a construção de novos conceitos de trigonometria (Carreira, 1993), para apoiar a evolução nos processos de MM entre os 3 e os 5 anos, nas fases de interpretação, estruturação e compreensão, e melhor lidar com as fases de validação e exposição/apresentação (Alsina et al., 2021), para aplicar adequadamente (conceitos de combinação linear, subespaço gerado, base canónica e não canónica na construção de modelos (Ramírez-Montes et al., 2021), para construir modelos adequados para estudar situações de otimização (Irigoyen Carrillo et al., 2021), para promover a aprendizagem da estatística (Aymerich & Albarracín, 2021) e da análise combinatória (Vásquez et al., 2021).

Na exploração de tarefas de MM os estudantes desenvolvem estratégias metacognitivas (por exemplo, de planificar o progresso do trabalho ou de avaliar e monitorizar o processo de modelação) (Vorhölter & Krüger, 2021) e recorrem a metáforas para a produção de significado que os apoiam na interação mundo real/mundo matemático (Carreira, 1998). Ao trabalhar a modelação numa disciplina de geometria no espaço, futuros professores evoluem de uma fase em que apenas associavam a modelação a exemplos para o ensino da modelação a uma outra em que identificam subprocessos envolvidos na MM (Esteley & Cruz, 2021).

A MM é adequada para estudar temas extramatemáticos, para desenvolver a capacidade de analisar criticamente modelos matemáticos (Blomhøj & Elicer, 2021) ou para interligar a matemática com outras disciplinas. Andresen (2021), focando a atenção no estudo das epidemias, conclui que se estabelece uma aprendizagem subsidiária (*spin-off*) sobre este tema que se entrelaça com o conhecimento matemático. Sala Sebastià et al. (2021) identificam subprocessos comuns aos processos de MM e de inquirição usados na exploração de tarefas que interligavam a história e a matemática, que se complementam mutuamente para chegar à solução de um problema.

No entanto, o foco da aprendizagem não pode residir apenas no uso da matemática para lidar com contextos extramatemáticos. Para desenvolver a competência de MM importa igualmente promover a compreensão de modelos matemáticos existentes (Blomhøj & Niss, 2021), aspeto que o estudo de Schneider et al. (2021) confirma ao concluir que os estudantes que tiveram um ensino focado no processo de MM são os que a trabalham de um modo mais completo e estruturado.

A tecnologia tem um papel central para desenvolver e melhorar, de um modo interrelacionado, a competência de modelação e a aprendizagem de tópicos e processos matemáticos. Permite acesso a modelos que seriam inacessíveis apenas com o recurso a métodos manuais de resolução (Galbraith & Fisher, 2021) e uma experimentação nela



baseada favorece a estruturação adequada do problema, a planificação e execução dos cálculos necessários e a discussão dos resultados (Almeida et al., 2021).

Carreira (1993) identifica potencialidades da folha de cálculo na exploração de modelos em situações da realidade envolvendo Trigonometria, destacando a sua importância para apoiar a organização dos dados, a identificação de variáveis relevantes e a procura de relações funcionais entre grandezas. Ramírez-Montes et al. (2021) destacam as potencialidades de simulação e cálculo desta ferramenta que permitem avaliar a eficácia dos modelos matemáticos e computacionais que os estudantes constroem e apoiam a sua validação no confronto com a situação real. Irigoyen Carrillo et al. (2021) salientam importância da integração de diferentes ferramentas tecnológicas (GeoGebra, Excel, Editores de texto) para estimular o uso de diferentes representações. Finalmente, Moreno Sandoval e Alvarado-Monroy (2021) destacam as potencialidades da ferramenta NetLogo para experienciar a realidade e apoiar o desenvolvimento do raciocínio covariacional.

## Conclusão

Nos 102 artigos publicados ao longo dos 30 anos na revista *Quadrante* que incidem nos temas transversais de RP, RM, CM e MM destaca-se uma discussão que aprofunda o entendimento dos vários autores sobre cada tema, as suas potencialidades para a aprendizagem da matemática e os desafios associados à criação de um contexto na aula de matemática adequado para os desenvolver. Predominam investigações focadas nos alunos (6-18 anos), embora também se assinalem conclusões relativas à aprendizagem dos alunos do Ensino Superior. Destaca-se que apenas três estudos são focados em contextos de formação contínua de professores e registam-se apenas dois que se focam em crianças da educação pré-escolar.

Os trabalhos publicados acompanham as tendências de desenvolvimento do conhecimento internacional sobre estes temas. Ao nível da RP assinala-se uma evolução focada no conceito de problema e nas estratégias de RP de Pólya para uma em que se estudam as tarefas, analisadas a partir do seu grau de desafio e de estruturação. A formulação de problemas, assim como a ligação que esta tem com a RP e ambas com a criatividade, assumem pouca expressão nos estudos analisados apesar da sua relevância no panorama internacional. Traduzindo a pouca produtividade de avançar mais na análise das relações entre conceções e prática, assinala-se um decréscimo do número de trabalhos que incidem nas conceções de alunos e professores. No entanto, assinala-se a importância que vários destes estudos tiveram para desvendar e caracterizar contradições muito úteis para propor novos referenciais de aprendizagem e formação ao nível da RP e da CM.

Os estudos sobre CM abordam aspetos importantes, como as conceções de CM, as interações e o discurso, em linha com o que tem sido produzido internacionalmente.

Não confundindo RM com raciocínio dedutivo, os estudos analisados avançam conhecimento sobre os processos de raciocínio, precisando entendimentos sobre os raciocínios indutivo e abdutivo e tomando como foco de estudo a aprendizagem dos alunos (só um trabalho se foca em futuros professores). Deste modo, assinala-se a limitação do conhecimento sobre os desafios que os professores e futuros professores podem enfrentar ao trabalhar em contexto de sala de aula este tema.

Identifica-se esta mesma limitação nos estudos sobre a MM em que apenas um estudo se foca no desenvolvimento profissional do professor. De facto, embora se tenham desenvolvido vários estudos com futuros professores, o seu foco não são as competências enquanto professor, mas sim o conhecimento enquanto estudante (do ensino superior) sobre o processo de MM ou sobre as aprendizagens matemáticas que realizam.

Finalmente, destaca-se a importância dada à construção e análise crítica de tarefas matemáticas, assegurando que incluem características essenciais imprescindíveis para desenvolver a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático, a Comunicação Matemática e a Modelação Matemática.

## Referências

- Allevato, N., & Vieira, G. (2016). Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: Possibilidades para a aprendizagem. *Quadrante*, 25(1), 113–132. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22926>
- Almeida, A., & Almeida, L. (2011). Processos cognitivos e resolução de problemas em alunos com elevado raciocínio numérico: diferenças entre alunos de maior e menos rendimento escolar. *Quadrante*, 20(2), 7–16. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22868>
- Almeida, L., Pessoa da Silva, K., & Borssoi, A. (2021). Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior. *Quadrante*, 30(2), 123–146. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23605>
- Alsina, A., Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C., & Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadrante*, 30(1), 74–93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 16(1), 27–56. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22813>
- Alwast, A., & Vorhölter, K. (2021). O desenvolvimento das competências de noticing de futuros professores num contexto de modelação matemática: um estudo de caso. *Quadrante*, 30(2), 293–314. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23659>
- Andresen, M. (2021). Aprendizagem subsidiária sobre epidemias resultante da modelação com equações diferenciais. *Quadrante*, 30(2), 58–78. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23603>
- Antonini, S. (2018). Conceitos figurativos na prova por redução ao absurdo. *Quadrante*, 27(2), 115–132. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22967>
- Araújo, J., & Lima, F. (2021). A natureza e o propósito dos exemplos usados por um professor em suas intervenções em projetos de modelagem. *Quadrante*, 30(2), 315–334. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23743>
- Årlebäck, J., Frejd, P., & Doerr, H. M. (2021). Explorando os modelos de estudantes sobre amostragem e inferência com variáveis nominais. *Quadrante*, 30(1), 158–177. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23655>

- Aymerich, À., & Albarracín, L. (2021). Modelización matemática en actividades estadísticas: identificando elementos clave del diseño para promover la generación de modelos en el estudio de la variabilidad. *Cuadrante*, 30(2), 179–199. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23686>
- Azcárate Goded, P. (1999). El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Cuadrante*, 8(1&2), 111–138. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22716>
- Blanco, L. J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Cuadrante*, 6(2), 45–65. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22697>
- Blomhøj, M., & Elicer, R. (2021). Modelos epidemiológicos e o problema da coerência: entre a justificação crítica e uma prática de ensino da modelação matemática. *Quadrante*, 30(2), 79–100. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23597>
- Blomhøj, M., & Niss, M. (2021). Descodificar, compreender e avaliar modelos matemáticos existentes: o que é que isso requer? *Quadrante*, 30(2), 9–36. <https://doi.org/10.48489/quadrante.24129>
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling - Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Boavida, A. M. (1992). O sentido de resolução de problemas. *Quadrante*, 1(1), 45–71. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22619>
- Boavida, A. M. (2006). Colaborando a propósito da argumentação na aula de Matemática. *Quadrante*, 15(1&2), 65–93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22805>
- Branco, M. G. (2013). As dificuldades dos alunos quando trabalham com tarefas de exploração e investigação. *Quadrante*, 22(1), 107–132. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22885>
- Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125–153. <https://doi.org/10.1023/A:1009947032694>
- Brunheira, L., & Ponte, J. P. da. (2018). Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras. *Quadrante*, 27(2), 133–159. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22965>
- Buchholtz, N. (2021). Processos de modelação dos alunos envolvidos em trilhos matemáticos. *Quadrante*, 30(1), 140–157. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23699>
- Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81–118. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22816>
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Instituto de Educação.
- Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, 21(2), 51–80. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22880>
- Carreira, S. (1992). Aplicações e modelação nos currículos de Matemática: Contornos do debate actual. *Quadrante*, 1(1), 73–91. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22618>
- Carreira, S. (1993). Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria. *Quadrante*, 2(1), 49–62. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22631>
- Carreira, S. (1998). Do triângulo ao trapézio semiótico: Uma análise do pensamento metafórico em problemas de aplicação da matemática. *Quadrante*, 7(1), 33–54. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22702>
- Carrillo, J. (2000). Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción de conocimiento profesional. *Quadrante*, 9(2), 27–54. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23020>
- Carvalho, A. T., & Gontijo, C. H. (2020). Discursos em interações comunicativas em aulas de matemática e o desenvolvimento da criatividade compartilhada. *Quadrante*, 29(2), 109–131. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22573>

- Chapman, O. (1999). Teacher intervention during mathematical problem solving. *Quadrante*, 8(1&2), 169–188. <https://doi.org/10.48489/quadrante.2271>
- Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D., & Trawick-Smith, J. (2018). O ensino e a aprendizagem da Geometria: Princípios fundamentais. *Quadrante*, 27(2), 7–31. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22970>
- Conceição, J., & Rodrigues, M. (2020). Processos de raciocínio espacial na representação de figuras 3D por alunos do 1.º ano do ensino básico. *Quadrante*, 29(1), 115–139. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23007>
- Corrêa, S., & Lopes, C. (2020). A relação dialógico-comunicativa gerada pela insubordinação criativa na educação estatística de crianças. *Quadrante*, 29(2), 86–108. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22574>
- Elfringhoff, M., & Schukajlow, S. (2021). O que torna um problema de modelação interessante? Fontes de interesse situacional em problemas de modelação. *Quadrante*, 30(1), 8–30. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23861>
- Esteley, C., & Cruz, M. F. (2021). Producción de sentidos sobre modelización: el caso de un grupo de futuras profesoras. *Quadrante*, 30(2), 269–292. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23937>
- Falsetti, M. C., & Lugo, J. I. (2016). Acciones de validación en Matemática en clases de la escuela secundaria. *Quadrante*, 25(1), 5–26. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22930>
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2018). Propondo tarefas sobre números racionais: as ações de futuras professoras durante a prática de ensino supervisionada. *Quadrante*, 27(1), 113–136. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22958>
- Freiman, V., & Manuel, D. (2015). Relating students' perceptions of interest and difficulty to the richness of mathematical problems posted on the CAMI Website. *Quadrante*, 24(2), 61–84. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22922>
- Galbraith, P., & Fisher, D. (2021). Tecnologia e modelação matemática: Enfrentando desafios, abrindo portas. *Quadrante*, 30(1), 198–218. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23710>
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *Mathematics Teacher*, 82(7), 502–505. <https://www.jstor.org/stable/27966379>
- Goma, J. L. de S., Manrique, A. L., & Martinho, M. H. (2020). A comunicação matemática escrita de futuras professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo o pensamento algébrico. *Quadrante*, 29(2), 47–67. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22571>
- González Galaviz, I., Lima, C., & Alvarado Monroy, A. (2021). Diseño de una situación contextualizada para la introducción temprana del pensamiento funcional. *Quadrante*, 30(1), 94–115. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23602>
- Graça, M. (2003). Avaliação da resolução de problemas: Que relação entre as concepções e as práticas lectivas dos professores? *Quadrante*, 12(1), 53–73. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22758>
- Greerath, G., & Frenken, L. (2021). Problemas de Fermi em testes de avaliação padronizados no 8.º ano. *Quadrante*, 30(1), 52–73. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23587>
- Guerreiro, A., & Martins, C. (2020). Avaliação e comunicação na aula de matemática: Conceções e práticas de professores do 2.º ciclo do ensino básico. *Quadrante*, 29(2), 6–23. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22570>
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, 23(4), 279–295. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539>
- Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante*, 21(2), 139–164. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22877>
- Henriques, A., & Antunes, P. (2014). A exploração da covariação estatística por alunos do 10.º ano com o TinkerPlots. *Quadrante*, 23(2), 95–122. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22906>
- Højgaard, T. (2021). Ensinar para a competência matemática: Os diferentes focos da competência de modelação e da competência de resolução de problemas. *Quadrante*, 30(2), 101–122. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23691>

- Holzmann, K. K. J., Nogues, C. P., Lima, E. M., & Dorneles, B. V. (2021). Relação entre desempenho aritmético e desempenho na resolução de problemas de alunos de 3.º e 4.º anos do ensino fundamental. *Quadrante*, 30(2), 335–353. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23751>
- Ikeda, T., & Stephens, M. (2021). Identificação das principais características de uma abordagem integrada ao ensino da modelação. *Quadrante*, 30(1), 267–284. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23595>
- Irigoyen Carrillo, M. E., Alvarado-Monroy, A., & Astudillo, M. T. (2021). Diseño de una experiencia de modelización en una situación de optimización. *Quadrante*, 30(1), 242–266. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23593>
- Jacob, B., & Doerr, H. M. (2014). Statistical reasoning with the sampling distribution. *Quadrante*, 23(2), 123–146. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22905>
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Jessen, B. E., & Kjeldsen, T. H. (2021). A modelação matemática em contextos científicos e no ensino secundário dinamarquês: Existem relações? *Quadrante*, 30(2), 37–57. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23658>
- Jesus, A. M., & Serrazina, L. (2005). Actividades de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. *Quadrante*, 14(1), 3–35. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22790>
- Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), 5–26. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22814>
- Lesh, R., & Doerr, H. (Eds.). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–646). Lawrence Erlbaum Associates.
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Lopes, P. C., & Fernandes, E. (2019). Literacia, Raciocínio e Pensamento Estatístico com Robots. *Quadrante*, 23(2), 69–94. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22907>
- Ludwig, M., & Jablonski, S. (2021). Passo a passo: simplificando e matematizando o mundo real com o MathCityMap. *Quadrante*, 30(2), 242–268. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23604>
- Mascarenhas, D., Maia, J., Sola Martinez, T., & Hinojo Lucena, F. (2014). A importância das tarefas de investigação, da resolução de problemas e dos materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem de perímetro, área e volume no 5.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 23(1), 3–28. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22902>
- Mason, J., Oliveira, H., & Boavida, A. M. (2012). Reasoning reasonably in mathematics. *Quadrante*, 21(2), 165–196. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22876>
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, 21(2), 81–110. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22879>
- Mendonça, L., & Lopes, C. (2017). As aprendizagens geradas num grupo colaborativo de professores durante um estudo sobre modelagem matemática na Educação Estatística. *Quadrante*, 26(1), 93–117. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22942>
- Meneghetti, R. C., & Dutra, A. (2012). Análise combinatória numa abordagem alternativa: Análise de uma aplicação em um curso de Licenciatura em Matemática. *Quadrante*, 21(1), 67–94. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22871>
- Meneghetti, R. C., & Redling, J. P. (2008). O processo de elaboração de tarefas didáticas alternativas para o ensino e aprendizagem de Matemática como possibilidade de trabalho em curso de formação de professores de Matemática. *Quadrante*, 17(2), 23–46. <https://doi.org/10.48489/quadrante.2283>

- Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante*, 21(2), 111–138. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22878>
- Mestre, C., & Oliveira, H. (2016). Uma experiência de ensino no 4.º ano conduzida no duplo papel de professora-investigadora. *Quadrante*, 25(2), 25–49. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22937>
- Morais, C., & Serrazina, L. (2013). O cálculo mental na resolução de problemas de subtração. *Quadrante*, 22(1), 53–76. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22887>
- Moreno Sandoval, S., & Alvarado-Monroy, A. (2021). La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria. *Quadrante*, 30(2), 147–178. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23687>
- Morgan, C. (2003). Criteria for authentic assessment of mathematics: Understanding success, failure and inequality. *Quadrante*, 12(1), 37–51. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22759>
- Neto, T., Breda, A., & Godino, J. (2011). Desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: Recurso a geometrias planas. *Quadrante*, 20(1), 83–100. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22858>
- Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2015). A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. *Quadrante*, 24(2), 85–110. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22921>
- Nunes, M. J., & Rodrigues, M. (2018). Compondo e desenhando formas tridimensionais: Um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos. *Quadrante*, 27(2), 63–88. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22971>
- Oliveira, H. (1998). Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante*, 7(2), 71–98. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22708>
- Paiva, J. (2020). O papel do feedback oral na coconstrução de significados num ambiente de geometria dinâmica. *Quadrante*, 29(2), 132–153. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22569>
- Pecharromán Gómez, C., Ortega, T., & San Miguel Pérez, V. (2016). Análisis de las estrategias heurísticas y valoración del conocimiento intuitivo en la resolución de problemas del Concurso Canguro Matemático. *Quadrante*, 25(1), 27–58. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22929>
- Pedemonte, B. (2012). L'argumentation en mathématiques et sa relation avec la démonstration. *Quadrante*, 21(2), 5–28. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22882>
- Pereira, M., & Saraiva, M. J. (2005). A integração de tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das sucessões. *Quadrante*, 14(2), 43–69. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22796>
- Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, 21(2), 29–50. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22881>
- Pires, M. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: Práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante*, 20(1), 31–53. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22860>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Pólya, G. (1981). *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving*. John Willey & Son.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55–82. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22894>
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41–70. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22709>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2), 111–134. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22920>
- Ponte, J. P., Salvado, C., Fraga, A., Santos, T., & Mosquito, E. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante*, 16(1), 111–146. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22809>
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51–74. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22780>

- Ramírez-Montes, G., Carreira, S., & Henriques, A. (2021). Mathematical modelling routes supported by technology in the learning of linear algebra: A study with Costa Rican undergraduate students. *Quadrante*, 30(1), 219–241. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23721>
- Ramírez-Montes, G., & Henriques, A. (2019). A aprendizagem de conceitos probabilísticos: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra com alunos do 10.º ano da Costa Rica. *Quadrante*, 28(1), 54–78. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22974>
- Rodrigues, C., Ponte, J. P., & Menezes, L. (2020). Práticas discursivas de professores de Matemática na condução de discussões coletivas. *Quadrante*, 29(2), 24–46. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22575>
- Sala Sebastià, G., Font, V., & Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante*, 30(1), 116–139. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23590>
- Santana, F. C., & Porto, M. F. P. (2020). Comunicação na sala de aula do PROFMAT e os princípios que regulam as produções textuais. *Quadrante*, 29(2), 68–85. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22572>
- Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante*, 11(2), 29–54. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22753>
- Saraiva, M. (2016). A resolução de problemas: O legado de Pólya e uma leitura do CERME 2015. *Quadrante*, 25(1), 83–96. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22932>
- Schneider, L., Borromeo Ferri, R., & Ruzika, S. (2021). Sobre a influência do conhecimento acerca dos processos ideais-típicos de modelação nas rotas de modelação dos indivíduos. *Quadrante*, 30(2), 220–241. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23719>
- Segura Cordero, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real. *Quadrante*, 30(1), 31–51. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23592>
- Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Conceções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), 5–40. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22710>
- Sierspínska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bussi & A. Sierpínska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30–62). NCTM.
- Souza, M. A., & Guimarães, H. M. (2015). A formulação de problemas verbais de matemática: Porquê e como. *Quadrante*, 24(2), 135–162. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22919>
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0438>
- Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39–60. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22923>
- Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 37–65. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22789>
- Vásquez, S., Barquero, B., & Bosch, M. (2021). Ensino e aprendizagem de combinatória no ensino secundário: Uma abordagem de modelação baseada na Teoria Antropológica do Didático. *Quadrante*, 30(2), 200–219. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23878>
- Vieira, W., Rodrigues, M., & Serrazina, L. (2020). O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. *Quadrante*, 29(1), 8–35. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23012>
- Vorhölter, K., & Krüger, A. (2021). Estratégias metacognitivas em modelação: Comparação de resultados alcançados através de diferentes métodos. *Quadrante*, 30(1), 178–197. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23653>