

A investigação sobre o ensino e a aprendizagem de temas matemáticos publicada em 30 anos da revista Quadrante

Research on the teaching and learning of mathematical topics published over 30 years in Quadrante

Hélia Oliveira 

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Portugal
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Fátima Mendes 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Portugal
fatima.mendes@ese.ips.pt

Ana Henriques 

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Portugal
achenriques@ie.ulisboa.pt

Resumo. O presente artigo consiste na revisão sistemática da investigação publicada na revista Quadrante, de 1992 a 2021, incidindo no ensino e aprendizagem de quatro grandes temas: números, geometria e medida, álgebra, funções e cálculo, e probabilidades e estatística. Foram selecionados 85 artigos, de natureza teórica ou empírica, onde se procurou identificar e discutir a incidência e os principais resultados da investigação publicada na revista em torno do ensino e aprendizagem dos temas matemáticos referidos. Da análise realizada verifica-se que existe um equilíbrio no número de artigos publicados em cada tema e identificam-se tópicos que carecem de maior atenção por parte dos investigadores. Salienta-se, da investigação publicada na Quadrante, a forte incidência de estudos que são sustentados por intervenções em sala de aula, com destaque para o importante papel das tarefas matemáticas na aprendizagem, assim como, em vários estudos, da tecnologia digital, frequentemente assentes numa perspetiva dialógica de ensino e aprendizagem. No entanto, evidencia-se a necessidade de investigação que melhor especifique a contribuição de tais aspetos para a aprendizagem dos temas em causa e a realização de estudos longitudinais.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem; números; geometria; álgebra; probabilidades; estatística.

Abstract. This article is a systematic review of research published in *Quadrante*, from 1992 to 2021, focusing on the teaching and learning of four major topics: numbers, geometry and measurement, algebra, functions and calculus, and probability and statistics. Eighty-five articles were selected, of theoretical or empirical nature, from which we sought to identify and discuss the incidence and main results of the research published in the journal on the teaching and learning of the mentioned mathematical themes. From the analysis carried out, it appears that there is a balance in the number of articles published in each theme and the topics that need more attention from the researchers are identified. The research published in *Quadrante* highlights the strong incidence of studies that are supported by interventions in the classroom, with emphasis on the important role of mathematical tasks in learning, as well as, in several studies, of digital technology, often informed by a dialogical perspective on teaching and learning. However, there is a need of conducting further research to identify the contribution of such aspects to the learning of mathematical topics and also of developing longitudinal studies.

Keywords: teaching and learning; numbers; geometry; algebra; probability; statistics.

Introdução

A investigação sobre o ensino e a aprendizagem associada a temas matemáticos tem naturalmente uma grande expressão na comunidade de investigadores no campo da educação matemática e está bem patente no conjunto de artigos publicados na *Quadrante*, desde a sua fundação. Perante uma grande variedade de possíveis temas matemáticos a considerar, na revisão sistemática de literatura que apresentamos, optámos por definir quatro que, de alguma forma, cobrem os domínios que são tradicionalmente abrangidos nos currículos da matemática, em particular, na matemática escolar: i) números; ii) geometria e medida; iii) álgebra, funções e cálculo; e iv) probabilidades e estatística.

É nosso objetivo com esta revisão sistemática de literatura, identificar e discutir a incidência e os principais resultados da investigação centrada no ensino e aprendizagem dos quatro temas matemáticos referidos, publicada na *Quadrante*, desde a sua fundação, em 1992, até 2021, cobrindo assim os primeiros 30 anos de atividade da revista. Assumimos a pertinência de cobrir tanto artigos teóricos como empíricos e estabelecemos como critérios para seleção dos artigos a serem integrados nesta análise: i) o objetivo do estudo centrar-se no ensino e/ou aprendizagem de tópicos matemáticos, com resultados de investigação teórica ou empírica que se relacionam com os temas matemáticos em causa; ii) no caso de estudos empíricos, os participantes podem ser professores ou futuros professores, desde que o estudo se foque no seu conhecimento matemático.

A metodologia adotada para seleção dos artigos passou, numa primeira etapa, por usar a ferramenta “Pesquisar” na busca de termos correspondentes aos temas matemáticos, na página da *Quadrante* (<https://quadrante.apm.pt/issue/archive>). Tomando consciência que tal método poderia não permitir selecionar todos os estudos relevantes, numa segunda

etapa, percorremos todos os números da revista, e pesquisámos no título e nas palavras-chave dos artigos e, quando em dúvida sobre o foco do artigo, analisámos também o seu objetivo no resumo ou no corpo do texto. Os artigos foram então organizados por temas matemáticos e, numa terceira etapa, após uma leitura dos resultados e conclusões, não considerámos os que não cumpriam um dos critérios acima referidos.

Foram apurados para análise 85 artigos que se distribuem entre artigos teóricos e empíricos, com grande preponderância destes últimos. Não sendo um objetivo específico desta revisão sistemática a metodologia de investigação adotada nos estudos, pudemos constatar algumas tendências, no conjunto dos artigos analisados. Predomina, claramente, a investigação empírica, de natureza qualitativa, por vezes com referência ao paradigma interpretativo como orientação. Os estudos quantitativos ou mistos estão muito pouco presentes. Os artigos de natureza mais teórica, alguns dos quais de investigadores internacionais de grande projeção, tomam amiúde como ponto de partida resultados de outras investigações para sustentarem teses relativas tanto a processos de aprendizagem como a orientações didáticas para o ensino de conteúdos matemáticos. Salienta-se, ainda, a elevada incidência de estudos que assentam em intervenções na sala de aula e que começam a ser assumidas como experiências de ensino, mas que só a partir de 2013 são explicitamente enquadradas na *design-based research* (Cobb et al., 2003), que é mais tarde traduzida por investigação baseada em design (IBD).

O ensino e a aprendizagem dos números

Nesta secção damos conta da investigação publicada na Quadrante associada ao ensino e à aprendizagem dos números no ensino básico e secundário, bem como à aquisição e aprendizagem dos números em contexto de ensino pré-escolar. Considerando o conjunto de artigos da revista, organizámos duas subsecções: números naturais¹ e operações e números racionais e operações. A temática dos números reais tem uma expressão quase inexistente (1 artigo).

Os números naturais e as operações são centrais nos currículos de matemática, desde os primeiros anos, incluindo o ensino pré-escolar. No final do 1.º ciclo são introduzidos os números racionais não negativos nas suas diferentes representações, sendo estes objetos de numerosas investigações, dada a complexidade destes números e das suas representações e as dificuldades manifestadas na sua aprendizagem (Monteiro & Pinto, 2005).

No final do século XX, por oposição a um ensino dos números focado no cálculo algorítmico, surge a preocupação de a sua aprendizagem ser realizada com compreensão, destacando-se o desenvolvimento do sentido de número como um dos objetivos centrais da aprendizagem da matemática (NCTM, 2000). Esta expressão dissemina-se, sobretudo, a partir do trabalho de McIntosh et al. (1992), que caracterizam sentido de número como uma

compreensão global do indivíduo sobre os números e as operações e a capacidade para usar essa compreensão, de modo flexível, na elaboração de juízos matemáticos e de estratégias úteis na manipulação dos números e das operações. A partir dessa altura, as investigações sobre números surgem relacionadas com o sentido de número dos alunos, umas focando-se nos números naturais, outras nos números racionais.

Associado ao sentido de número, destaca-se a importância de desenvolver o cálculo mental desde os anos iniciais. Embora sempre se tenha considerado fundamental o cálculo mental, este estava associado a efetuar cálculos algorítmicos ‘de cabeça’, sem recurso a papel e lápis. Atualmente, o significado de cálculo mental afasta-se dessa ideia e articula-se com a aprendizagem dos números com compreensão. É consensual a ideia de que calcular mentalmente inclui operar com números e não com dígitos, usar propriedades das operações e relações numéricas, ter um bom conhecimento sobre os números e os factos numéricos elementares e poder recorrer a registos intermédios em papel, apesar de se realizar, sobretudo, mentalmente (Buys, 2008). A importância atribuída ao sentido de número e ao cálculo mental no ensino e na aprendizagem dos números é espelhada, também, nas investigações sobre a temática, sobretudo nos primeiros anos.

Foram analisados um total de 18 artigos, distribuídos pelas três décadas de publicação da *Quadrante*, verificando-se que mais de metade do total desses artigos se concentra na última década (Tabela 1). Realça-se, ainda, que as duas temáticas identificadas não diferem muito quanto ao número de artigos.

Tabela 1. Número de artigos sobre o tema números, publicados por década

Período	1992-2001	2002-2011	2012-2021	Total (%)
Números naturais e operações	2	1	5	8 (44%)
Números racionais e operações	1	4	5	10 (56%)
Total	3	5	10	18 (100%)

Apresentamos, em seguida, a análise dos artigos selecionados de acordo com as subsecções definidas.

Números naturais e operações

O primeiro artigo sobre a temática surge em 1997 e analisa o ensino da aritmética elementar em Portugal nos finais do séc. XVIII (Fernandes, 1997). Também de natureza teórica, o artigo de Gáscon (2001) centra-se na organização da matemática em torno da divisibilidade no ensino secundário espanhol, de forma a proporcionar aos alunos um estudo completo e integrado do tema.

Focando o ensino e a aprendizagem dos números naturais, o artigo de Brown (2005) descreve a estrutura do sistema educativo em Inglaterra, as linhas orientadoras do currículo para crianças (4 aos 6 anos) e analisa o seu conhecimento numérico. Estes conhecimentos são comparados com os de crianças de 8 anos, concluindo-se que os melhores desempenhos de crianças do pré-escolar, em muitos aspetos, se lhes equiparam. Por isso, é sugerida uma maior diferenciação no currículo do ensino primário, considerando o conhecimento e o desempenho das crianças, proporcionando-lhes um maior desafio na aprendizagem.

Fundamentando que a aprendizagem da matemática deve ser com compreensão, Gravemeijer e Bruin-Muurling (2019) apresentam argumentos para a mudança do ensino atual para o ensino com essas características. Por um lado, a investigação empírica realizada na Holanda mostra que a ênfase em procedimentos rotineiros conduz a um baixo nível de proficiência matemática por parte dos alunos. Por outro lado, o papel da matemática na sociedade atual conduz a uma maior necessidade de compreensão. Ora, uma compreensão matemática profunda é alcançada pelos alunos quando constroem objetos matemáticos reificando processos matemáticos, o que, no caso dos números, corresponde à construção e articulação de redes de relações numéricas.

Na segunda década deste século surgem, em Portugal, investigações associadas ao sentido de número e ao cálculo mental e à sua inter-relação, destacando a relevância do seu desenvolvimento nos primeiros anos (Marcelino et al., 2017; Mendes et al., 2013; Morais & Serrazina, 2013).

Numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, Mendes et al. (2013) descrevem e analisam uma trajetória de aprendizagem da multiplicação no 3.º ano. Dos resultados sobressai uma evolução significativa dos procedimentos usados pelos alunos, que parece ser suportada pelas características das tarefas e pelo ambiente da aula, embora não se processe de igual forma para todos. Destaca-se a importância da seleção das tarefas, dos seus contextos e dos números, e da orquestração de discussões coletivas ricas em conhecimento matemático, que contribuem para novas aprendizagens.

Considerando a articulação entre sentido do número e cálculo mental, Morais e Serrazina (2013) apresentam um estudo cujo objetivo foi compreender as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º ano na resolução de problemas de adição e subtração e o modo como o significado da operação envolvida no problema influencia, ou não, a estratégia utilizada. Os resultados apontam para o uso de diferentes estratégias consoante os significados dos problemas. Além disso, os alunos usam estratégias de cálculo associadas, na literatura, a alunos mais velhos, o que destaca a sua compreensão dos números e das operações, sendo fundamental para um bom sentido de número.

Relacionada com o cálculo mental surge a flexibilidade de cálculo, entendida como a construção ou o uso de estratégias de cálculo de acordo com as características dos números envolvidos e as relações que podem ser estabelecidas entre eles (Threlfall, 2009). Para

compreender o modo como alunos desenvolvem flexibilidade no cálculo aditivo, Rodrigues e Serrazina (2019) realizam uma investigação em que analisam a exploração e discussão de duas tarefas, uma numa turma do 1.º ano e outra, na mesma turma, no 2.º ano. Os resultados evidenciaram evolução na flexibilidade de cálculo dos alunos interligada com o seu desenvolvimento conceptual.

Números racionais e operações

O ensino e a aprendizagem dos números racionais têm sido alvo de diversas investigações, destacando-se que a maioria das relativas aos artigos da Quadrante se realizaram no 1.º e no 2.º ciclo, sendo menor a sua expressão no 3.º ciclo ou no ensino secundário.

Focando-se nos números racionais representados na forma de fração, Cruz e Spinillo (2004) desenvolvem um estudo com crianças brasileiras de 8 e 9 anos, com os objetivos de perceber se estas resolveriam a adição de frações através do referencial de metade, bem como de identificar a natureza das suas dificuldades ao realizar a adição de frações através do simbolismo formal. Os resultados apontam para dificuldades na realização das operações através do simbolismo matemático, mas revelam um bom desempenho das crianças quando o referencial de metade era oferecido como âncora no processo de resolução, concluindo que este referencial desempenha um papel importante no raciocínio matemático.

No contexto português, Morais et al. (2018) pretendem compreender como o uso de modelos por alunos dos 3.º e 4.º anos contribui para a compreensão da noção de grandeza de número racional, nas suas diferentes representações, e da densidade como propriedade do conjunto dos números racionais. Os resultados mostram que os modelos utilizados (a reta numérica, a barra e grelhas 10×10 e 10×100) promoveram a identificação e mudança da unidade de referência, o uso de diferentes representações, a mobilização de números de referência e o estabelecimento de relações de ordem entre os números.

Focando-se na aprendizagem da noção de 10%, por alunos do 4.º ano, Guerreiro e Serrazina (2018) apresentam e discutem um estudo cuja finalidade foi compreender de que modo as normas sociais e sociomatemáticas da cultura da sala de aula contribuem para a aprendizagem participada da noção de 10%, como número de referência, alicerçado no desenvolvimento do sentido de número. Os resultados evidenciam que as normas sociais e sociomatemáticas proporcionaram o desenrolar de ações dialógicas que permitiram suportar a construção de processos e relações numéricas que conduziram ao estabelecimento de práticas matemáticas partilhadas em torno da noção de 10%, numa perspetiva sociocultural da atividade matemática.

Ao nível do 2.º ciclo, há vários artigos que descrevem estudos sobre números racionais nas suas diferentes representações. Destaca-se o de Monteiro e Pinto (2005), uma revisão da literatura sobre aspetos do ensino e aprendizagem dos números racionais na sua

representação na forma de fração, identificando também as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando trabalham com números representados dessa forma.

Relatando estudos de natureza empírica no 2.º ciclo, há a referir os artigos de Ponte e Quaresma (2011) e de Carvalho e Ponte (2019). O primeiro apresenta e discute um estudo realizado numa turma do 5.º ano, centrado nos números racionais na forma de fração. Os resultados apontam para a necessidade de propor aos alunos mais problemas com frações impróprias e sobre a densidade dos números racionais. São avançadas, ainda, possíveis alternativas a investigar futuramente, no que se refere à representação na reta numérica, à equivalência de frações e ao trabalho com frações com o significado de razão. O segundo artigo foca-se no desenvolvimento do sentido de número e do cálculo mental com números racionais, em alunos do 6.º ano, com o objetivo de perceber que componentes do sentido de número estão refletidos nas estratégias de cálculo mental usadas. Estas centram-se no uso de relações entre representações dos números racionais, o que lhes permite comparar números e compreender a sua grandeza. Além disso, a mudança de representação assume um papel importante na construção de estratégias de cálculo mental com números racionais, revelando, assim, o sentido de número dos alunos.

Ainda sobre o sentido de número, mas no âmbito do 3.º ciclo, Borralho e Lopes (2010) descrevem uma investigação que caracteriza o sentido de número racional de alunos do 7.º ano. Estes atribuem pouco significado aos números, às operações e aos contextos, manifestando dificuldades na interpretação das situações propostas bem como na mobilização de estratégias apropriadas. Evidenciam, também, pouca compreensão sobre formas de representação dos números racionais, para além das representações decimal e na forma de fração, bem como na comparação e ordenação de números.

No contexto espanhol, González-Forte et al. (2019) relatam uma investigação com estudantes dos ensinos básico e secundário, para perceber o seu nível de desempenho e o seu raciocínio quando resolvem tarefas de multiplicação de um número natural por um número racional. A análise evidenciou a existência do fenómeno *natural number bias*, que corresponde a usar inapropriadamente, no contexto dos números racionais, o conhecimento sobre os números naturais. Embora este fenómeno pareça ter diminuído, quando comparado com anteriores estudos quantitativos, os resultados destacam percentagens de êxito menores nas tarefas em que o conhecimento dos alunos sobre os números naturais não é compatível com a sua resolução.

Para além dos estudos anteriores, focados nos números racionais não negativos, há a destacar o artigo de Bruno e Cabrera (2005), com alunos do ensino secundário com dificuldades na matemática. Foi analisada a forma como aqueles realizam traduções da dimensão da reta para as dimensões abstrata e contextual, no que se refere ao conceito, à

ordem, à adição e à subtração de números negativos. Os resultados mostram, particularmente, que o uso do modelo da reta no ensino dos números negativos não tem êxito se for descontextualizado.

O ensino e a aprendizagem da geometria e medida

Nesta secção damos conta da investigação publicada na *Quadrante* em temáticas associadas ao ensino e à aprendizagem da geometria e medida em contexto de jardim de infância e nos ensinos básico, secundário e superior. Destacamos que o primeiro número da revista, inclui vários artigos dedicados à aprendizagem da geometria (Matos, 1992; Ralha, 1992; Saraiva, 1992), evidenciando a importância atribuída ao tema no final do século XX, o que não acontece nos anos seguintes, à exceção dos últimos anos. Considerando o conjunto de artigos da revista, organizámos esta secção com os seguintes tópicos: visualização e raciocínio espacial, definições e propriedades em geometria, medida e demonstração em geometria.

A visualização e o raciocínio espacial são aspetos associados ao ensino e à aprendizagem da geometria que têm sido objeto de investigação desde o final do século XX (Clements & Battista, 1992; Del Grande, 1990), considerados importantes ferramentas cognitivas não só no raciocínio geométrico, mas também para uma análise geométrica formal (Battista, 2007). Battista (2007) caracteriza o raciocínio espacial como “a capacidade para ‘ver’, inspecionar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações.” (p. 843). Embora diferentes autores usem expressões distintas de raciocínio espacial, como sentido espacial, raciocínio visual ou visualização espacial, referem-se igualmente a capacidades que incluem um suporte visual, seja físico ou mental. Estas investigações centram-se, sobretudo, nos primeiros anos, assumindo a relevância do desenvolvimento do raciocínio visual nesta faixa etária (Sarama & Clements, 2009).

As definições e propriedades dos objetos geométricos são tradicionalmente associados à investigação em geometria, dadas as características particulares dos objetos geométricos, como figuras ou sólidos geométricos, e as dificuldades manifestadas pelos alunos na identificação dessas características. Além disso, a aprendizagem de conceitos geométricos específicos, tais como os quadriláteros, tem sido alvo de numerosas investigações, tendo como pano de fundo a teoria de van Hiele para a aprendizagem (De Villiers, 2010).

Profundamente relacionada com a geometria surge a noção de medida, associada às diferentes grandezas, pelo que foi nossa opção incluir aqui os estudos que sobre ela se debruçam, destacando-se investigações sobre os conceitos de área, perímetro, volume e amplitude de ângulo.

A demonstração matemática, de um modo geral, e em geometria em particular, tem sido apontada como uma área que se revela bastante desafiadora para os alunos, mesmo dos níveis de escolaridade mais avançados. No processo de construção da compreensão da

demonstração é importante ter em conta que estão envolvidas diferentes facetas: demonstrar como uma atividade intelectual, as funções e o significado da demonstração e a compreensão da sua estrutura (Miyazaki et al., 2022). A tecnologia disponível para trabalhar em geometria, nomeadamente, os designados Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), tem sido uma grande impulsionadora de estudos sobre a demonstração em geometria (Marrades & Gutiérrez, 2000), trazendo novas perspetivas sobre esta atividade.

Foram analisados, para esta secção, um total de 20 artigos, distribuídos por três décadas, verificando-se que uma maior incidência na última década (Tabela 2). O tema que concentra mais artigos é a visualização e o raciocínio espacial, decorrendo, em boa medida, de ser o que mais se destaca no número temático, de 2018, sobre o ensino e aprendizagem da geometria.

Tabela 2. Número de artigos sobre o tema geometria e medida, publicados por década

Período	1992-2001	2002-2011	2012-2021	Total (%)
Visualização e raciocínio espacial	3	0	4	7 (35%)
Definições e propriedades em geometria	2	1	2	5 (25%)
Medida	0	1	2	3 (15%)
Demonstração em geometria	2	2	1	5 (25%)
Total	7	4	9	20 (100%)

Apresentamos, em seguida, a análise dos artigos seleccionados de acordo com as subsecções definidas.

Visualização e raciocínio espacial

Reconhecendo que a capacidade de as crianças se envolverem em pensamento geométrico e raciocínio espacial pode apoiar o seu desenvolvimento global em matemática, destacam-se os artigos de Clements et al. (2018) e de Gordo (1994). Os primeiros autores analisam os efeitos de um currículo de geometria que sintetiza os elementos cognitivos visuais do programa Agam, bem como o discurso matemático do professor e os seus impactos na aquisição de conceitos matemáticos em crianças do ensino pré-escolar. Concluem que o currículo de geometria do ensino pré-escolar é mais eficaz quando considera um vasto conjunto de tarefas, incluindo exemplos variados e contraexemplos, favorece a cognição visual progredindo para o pensamento analítico e integra um discurso matemático rico e

diversificado. Já Gordo (1994) estuda a relação entre o desenvolvimento da visualização espacial (Del Grande, 1990) e a construção de conceitos matemáticos de alunos do 3.º ano. Os resultados apontam para uma evolução positiva na resolução das atividades, tendo-se verificado o desenvolvimento das capacidades de visualização espacial bem como a sua relação com a construção de conceitos matemáticos.

Tendo como participantes crianças do ensino pré-escolar, Nunes e Rodrigues (2018) caracterizam o seu raciocínio espacial através da análise das suas estratégias na composição e desenho de formas tridimensionais. Os resultados sugerem a interação entre múltiplos processos que caracterizam o raciocínio espacial e revelam que as crianças utilizam estratégias envolvendo a intencionalidade e a antecipação. É também evidenciada a capacidade de perceberem relações espaciais, atendendo às posições relativas de cubos como partes distintas de tetracubos.

Ainda focado no raciocínio e na estruturação espaciais, o artigo de Conceição e Rodrigues (2020) analisa os registos de alunos do 1.º ano em duas tarefas e as suas comunicações nos momentos de discussão coletiva. Relativamente aos processos de raciocínio espacial evidenciados pelos alunos no registo de figuras a três dimensões, verifica-se a presença de processos associados a compreender e a transformar. A estruturação espacial parece estar ancorada em processos de raciocínio espacial, permitindo-lhes compreender melhor a estrutura das figuras e também transformá-las.

Num outro estudo, com alunos do 3.º ano, Canavarro e Prieto (2018) centram-se no desenvolvimento do sentido espacial através do uso de múltiplas representações emergentes na resolução de tarefas com conexões com a dança tradicional. Os alunos usaram diversas representações, associando consistentemente ideias representadas ativamente ao dançar e a esquemas elaborados e explicações verbais, evidenciando-se uma forte presença da representação contextual. Além disso, desenvolveram aspetos do sentido espacial, como a localização e orientação espacial, e a compreensão de objetos geométricos, das suas propriedades e relações. Contudo, não evidenciaram a mesma facilidade de identificação das simetrias de reflexão e de rotação presentes na dança, embora tenham reconhecido a transformação geométrica rotação.

Definições e propriedades em geometria

No primeiro número da Quadrante, Matos (1992) apresenta e discute a teoria de van Hiele para a aprendizagem da geometria, focando-se na teoria cognitiva implícita. À luz de investigações realizadas no campo, destacam-se aspetos críticos e propõem-se alterações à teoria. Partindo de conceitos particulares, como o de losango, exemplifica-se uma sequência didática que pode ser seguida pelo professor no sentido da apropriação do conceito pelos alunos. Relativamente às propriedades das figuras geométricas, no nível 2 da teoria de van Hiele, cada figura é entendida como possuindo um conjunto de propriedades e, no nível 3,

há já um conhecimento de relações lógicas entre propriedades, sendo estas ordenadas logicamente. Num outro estudo, Matos (1993) caracteriza diversos modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo presentes em alunos do 4.º e 5.º anos dos Estados Unidos da América, identificando uma multiplicidade de representações mentais e relacionando-as com os processos de aprendizagem.

Também centrado no conceito de ângulo, o estudo de Gomes e Ralha (2005) procura conhecer que conceito tinham desenvolvido professores e futuros professores do 1.º ciclo. Os resultados apontam no sentido de uma predominância da associação do objeto geométrico a exemplos prototípicos e pouco sustentada na sua definição matemática, o que leva as autoras a sugerir a necessidade do desenvolvimento de conhecimento matemático mais sólido para ensinar este conceito.

Focado na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros, Pereira e Serrazina (2015) desenvolveram um estudo com uma turma do 4.º ano sobre os contributos do GeoGebra e do geoplano para essa compreensão. Destaca-se que os alunos identificaram as propriedades das figuras com base nas representações, mas centraram-se em casos particulares, de acordo com a imagem mental que tinham da figura (protótipo), indiciando a influência da visualização. Sobressai a dificuldade de considerarem uma figura como representante de uma classe e em distinguirem atributos essenciais e não essenciais. Ainda assim, as autoras consideram que tanto o geoplano como o GeoGebra foram uma mais-valia, permitindo o desenvolvimento de uma compreensão mais avançada dos quadriláteros.

Também centrado no trabalho num AGD, Junqueira (1996) procurou compreender os processos usados, por alunos do 9.º ano, para fazerem construções geométricas, a justificação desses processos e como identificam propriedades das figuras. São apresentados três níveis no que diz respeito à manipulação das construções no AGD que a autora relaciona com os níveis 1 a 3 do modelo de Van Hiele, na medida em que existem alunos que se centram na aparência das figuras, identificam propriedades ou estabelecem relações entre propriedades, sendo o nível intermédio o mais frequente. Os alunos revelaram progressos atribuídos ao AGD e feedback, mas ainda assim alguns permaneceram no nível 1, o que suscita uma reflexão sobre a necessidade de continuidade deste tipo de trabalho.

Num estudo focado nos aspetos relativos ao processo de definir a que futuros professores dão atenção ao selecionarem e construírem definições de figuras geométricas e na relação desse processo com a estruturação espacial e geométrica, Brunheira e Ponte (2018) evidenciam a conceção limitada que as participantes tinham sobre a definição em geometria. No entanto, com o decurso da formação, verificou-se que as formandas deixaram de considerar apenas as propriedades necessárias numa definição, reconhecendo também o carácter suficiente e inclusivo das condições que exploraram. Ademais, percebeu-se a influência da estruturação espacial e geométrica no processo de definir e que esta evoluiu com as atividades desenvolvidas.

Medida

Há artigos que relacionam conceitos geométricos com aspetos associados a grandezas e medida, tais como o de Camargo et al. (2018), que se focam na interpretação do conceito multifacetado de ângulo em crianças do 4.º ano e, a esse propósito, abordam também os significados de atributo mensurável e de unidade de medida de ângulo. Os autores destacam a complexidade do conceito bem como a construção de significado na sala de aula, chamando a atenção para a necessidade de existirem espaços de interação discursiva que contribuam para essa construção coletiva.

No que se refere à aprendizagem dos conceitos de perímetro, área e volume, Mascarenhas et al. (2014) descrevem um estudo com alunos do 5.º ano em que recorreram a atividades de investigação e resolução de problemas, suportadas pelo uso de materiais manipuláveis. Os resultados evidenciam que a intervenção pedagógica, com as características identificadas, favoreceu a aprendizagem dos conceitos referidos.

Demonstração em geometria

Num artigo publicado no primeiro número da *Quadrante*, já se reflete sobre o recurso a um *software* de geometria em associação com o tópico da demonstração no tema geometria vetorial e analítica (Saraiva, 1992). O uso da tecnologia, em duas turmas do ensino secundário permitiu perceber uma apropriação diversa, por parte dos alunos, da necessidade de demonstração como forma de validação das suas conjeturas. Assim, numa das turmas os alunos tendiam a assumir como válidas conjeturas que tinham testado a um conjunto limitado de casos, recorrendo ao *software*, enquanto na outra diversos alunos recorreram às potencialidades do recurso para gerarem casos aleatórios e assumiram a testagem para um exemplo genérico como uma demonstração.

Também Neto et al. (2011) recorreram a um AGD e outros recursos, neste caso, para que alunos do ensino secundário tomassem contacto com modelos de geometria distintos da euclidiana, como é o caso da geometria hiperbólica ou da geometria do motorista de táxi. Num estudo de caso com duas alunas, os autores recorrem ao enfoque ontosemiótico da educação matemática (Godino et al., 2007) para analisar as justificações apresentadas, concluindo que se registou uma evolução na produção de justificações empíricas para dedutivas, que associam à exploração de outros modelos de geometrias planas.

A partir das diferenças entre a argumentação indireta, como mais intuitiva, e a demonstração por absurdo, Antonini (2018) centra-se no modo como alunos dos ensinos secundário e superior usam diferenciadamente as figuras geométricas na construção da argumentação e da demonstração, em alguns casos recorrendo a um AGD, em situação de entrevista. O autor aponta a necessidade da realização de estudos sobre a transição entre esses dois processos.

O ensino e a aprendizagem da álgebra, funções e cálculo

Nesta secção damos conta da investigação publicada na revista em temáticas associadas à álgebra e funções no ensino básico e secundário e à introdução do cálculo no ensino secundário, assim como de alguns estudos desenvolvidos no ensino superior em áreas afins. Atendendo ao foco principal dos artigos publicados na revista, optámos por organizar a secção em quatro grandes temáticas: pensamento algébrico, sentido de estrutura, funções e cálculo infinitesimal, como passamos a apresentar.

O pensamento algébrico tem-se afirmado como uma das principais linhas de investigação associadas ao tema da álgebra, a partir do final da década de 80 do século passado (Kieran, 2007). O influente trabalho de Kaput (2008) enfatiza que o cerne do pensamento algébrico (*algebraic reasoning*, no original) envolve “processos de simbolização complexa que servem a generalização com sentido e o raciocínio com generalizações” (p. 9). Associada ao pensamento algébrico, tem surgido com particular destaque a perspectiva da *Early Algebra*, centrada nos anos iniciais, que pretende extrair o carácter algébrico da aritmética (Carraher & Schliemann, 2018) e que tem tido implicações no desenvolvimento curricular em diversos países com a introdução de ideias algébricas desde cedo (Carraher & Schliemann, 2018; Oliveira & Mestre, 2014; Pinto & Cañadas, 2021). No entanto, é igualmente pertinente a investigação sobre o pensamento algébrico para além dos anos iniciais, uma vez que o facto de os alunos terem estudado álgebra no seu percurso escolar não significa que tenham desenvolvido plenamente as capacidades requeridas, evidenciando, muitas vezes, uma aprendizagem fortemente assente na aplicação de regras e procedimentos algébricos (Cabral et al., 2021; Oliveira et al., 2021).

Uma outra noção que tem proximidade com o pensamento algébrico é o de *sentido de estrutura* (*structure sense*, no inglês) e que merece atenção dada a importância que as estruturas têm na matemática e, particularmente, na álgebra, por exemplo, no que diz respeito a identificar a estrutura presente em equações ou inequações e a escolher os procedimentos que “fazem o melhor uso dessa estrutura” (Warren et al., 2016, p. 93).

O conceito de função tem grande importância na matemática, que corresponde a uma forte expressão nos currículos escolares, e conseqüentemente é um dos campos da educação matemática mais investigados, desde há muito tempo (Ayalon et al., 2017; Ruiz Higuera et al., 1995). Os focos de estudo relativos às funções são muito variados (Hitt & González-Martín, 2016), cruzando-se com outras áreas, nomeadamente, com o pensamento algébrico, em particular, no que diz respeito à noção de pensamento funcional.

Finalmente, a quarta secção é dedicada ao cálculo infinitesimal no ensino secundário e superior, tema no qual se registou até certo período o domínio de uma perspectiva cognitivista, nomeadamente, adotando o framework de *concept-image* e *concept-definition* (Tall & Vinner, 1981), mas onde foram emergindo outras perspectivas como a de representação semiótica e abordagens socioculturais (Hitt & González-Martín, 2016).

Para esta secção foram analisados um total de 25 artigos, distribuídos pelas três décadas de publicação da *Quadrante*, verificando-se que a segunda e a terceira concentram, cada uma delas, o dobro dos artigos relativamente à primeira (Tabela 3). O tema das funções é o que tem mais artigos (32%), seguido de perto pelo tema do pensamento algébrico (28%). É ainda de destacar que apenas na segunda década começam a surgir artigos sobre o pensamento algébrico e o sentido de estrutura e que o cálculo infinitesimal agrega a quase totalidade dos artigos da primeira década, mas que praticamente desaparece nos períodos subsequentes.

Tabela 3. Número de artigos sobre o tema álgebra, funções e cálculo, publicados por década

Período	1992-2001	2002-2011	2012-2021	Total (%)
Pensamento algébrico	0	4	3	7 (28%)
Sentido de estrutura	0	2	3	5 (20%)
Funções	1	4	3	8 (32%)
Cálculo infinitesimal	4	0	1	5 (20%)
Total	5	10	10	25 (100%)

Passamos, em seguida, a apresentar a análise dos artigos selecionados de acordo com as quatro secções definidas.

Pensamento algébrico

Na *Quadrante* encontramos os primeiros artigos que se referem ao pensamento algébrico (Alvarenga & Vale, 2007; Cusi & Malara, 2007; Kieran, 2007) no número temático, dedicado ao Ensino da Álgebra, acompanhando a tendência de crescimento da investigação no tema. Destacamos, desse período, três artigos de natureza predominantemente teórica (Canavarro, 2007; Cusi & Malara, 2007; Kieran, 2007) que ilustram noções centrais ao pensamento algébrico, contribuindo para uma clarificação deste conceito, a partir de exemplos de sala de aula. Assentes numa perspetiva de *Early Algebra*, dado que incidem principalmente sobre as ideias algébricas no 1.º ciclo do ensino básico, salientam-se nestes artigos argumentos a favor da promoção de uma aritmética generalizada que sustente uma transição da aritmética para a álgebra.

Cusi e Malara (2007) trazem a ideia do *balbuciar algébrico*, enquanto aprendizagem de uma nova linguagem, como elemento-chave nessa transição, enquanto Kieran (2007) sublinha o importante papel da generalização, sendo que em ambos os artigos esta última é identificada como um elemento distintivo do pensamento algébrico. Identificando duas dimensões no pensamento algébrico – o pensamento relacional e o pensamento funcional –

de acordo com a natureza das situações a explorar com os alunos, Canavarro (2007) sublinha a importância das múltiplas representações nesse contexto. Adicionalmente, a compreensão do sinal de igual num sentido relacional, e não simplesmente operacional, é apontada como condição necessária ao pensamento algébrico nos três artigos, a que Kieran (2007) acrescenta a exploração de relações numéricas, na forma de equações numéricas, através das quais os alunos podem desenvolver a noção de variável algébrica, à medida que lidam com os números como quase-variáveis.

Nessa mesma senda, Mestre e Oliveira (2012), a partir de uma experiência de ensino, que se estendeu ao longo de um ano letivo, com uma turma do 4.º ano de escolaridade, centram-se no processo de construção da generalização, em que apontam três momentos: “1) a utilização de quase-variáveis para a expressão da generalização; 2) a emergência da linguagem matemática simbólica; e, 3) a apropriação do sentido de símbolo” (p. 119). A simbolização que os alunos foram construindo e da qual se foram apropriando não constituiu um objetivo em si mesmo, mas esteve ao serviço da generalização, como referem as autoras, evidenciando a sua potencialidade para levar os alunos a perceberem relações matemáticas de outras formas.

Partindo de intervenções em sala de aula mais curtas no tempo, no 5.º ano (Alvarenga & Vale, 2007) e no 7.º ano (Pereira, 2013), os dois estudos focam-se nos processos ou estratégias de generalização empregues por alunos ou grupo-alunos selecionados das respetivas turmas, ao realizarem tarefas matemáticas centradas na exploração de padrões. Evidencia-se, no primeiro, que os alunos seguiam abordagens que tiravam partido do contexto das tarefas, articulando a representação numérica e pictórica, conseguindo realizar generalizações próximas, mas manifestando alguma dificuldade na generalização distante. Já no segundo estudo os alunos tendiam a transformar todas as situações em sequências numéricas, conseguiram interpretar e representar expressões algébricas, em algumas situações, mas evidenciaram, ainda assim, alguma dificuldade em transitarem do concreto para o abstrato, particularmente, no que diz respeito a exprimir a relação explícita entre as duas variáveis presentes na situação, usando linguagem algébrica simbólica.

Num estudo mais recente, com uma turma do 5.º ano, Pimenta e Saraiva (2019) debruçaram-se sobre as ações epistémicas dos alunos, consideradas como ações mentais associadas ao processo de abstração, também numa perspetiva de *Early Algebra*. Destaca-se que os alunos conseguiram compreender e utilizar linguagem simbólica, em resultado da relação estabelecida entre algumas ações epistémicas que, por sua vez, está muito dependente do contexto da tarefa matemática explorada.

Sentido de estrutura

Antecipando que a compreensão da linguagem matemática presente em expressões algébricas pode representar um desafio particular para alunos com discalculia, um estudo

conduzido por Pimenta e Saraiva (2013) apresenta os resultados de uma intervenção com uma aluna. Registou-se uma evolução na interpretação e uso de diferentes representações, mas persistiu uma tendência para a aplicação de procedimentos mecanizados de forma descontextualizada, revelando a complexidade de que se reveste o apoio à aprendizagem de alunos com discalculia.

Tendo por base uma experiência de ensino realizada numa turma do 9.º ano, Nobre et al. (2015) evidenciam como a resolução de problemas contextualizados, com recurso a uma folha de cálculo, contribuiu para que a aluna participante fosse encorajada a usar progressivamente a linguagem algébrica e desse sentido aos métodos formais algébricos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau e equações do 2.º grau a uma incógnita.

O desenvolvimento do sentido de estrutura é crítico para a aprendizagem da matemática no ensino superior, tal como se evidencia em dois artigos, com grande distância temporal, na área da Álgebra Linear. No primeiro, Costa e Catarino (2007) identificam algumas descontinuidades entre a abordagem ao conceito de colinearidade no ensino não superior e o de dependência linear, explorado no ensino superior, as quais podem estar na origem das dificuldades que os alunos frequentemente manifestam. Apontam, entre vários aspetos, a necessidade de procurar alguma harmonização entre a terminologia e simbologia usada no ensino superior e não superior, de explicitação da relação entre os conceitos nos dois níveis de ensino e de incentivar o recurso, em simultâneo, à abordagem geométrica e à algébrica. O segundo estudo, de Ramírez-Montes et al. (2021), centra-se na realização de uma tarefa de modelação matemática envolvendo conceitos de conjunto gerador e base de um subespaço vetorial, com recurso à folha de cálculo. Os resultados evidenciam que a aprendizagem dos conceitos foi potenciada pela exploração de situações da vida real e que o recurso à folha de cálculo teve grande impacto nos processos de modelação matemática, na medida em que permitiu aos alunos a avaliação da eficácia dos modelos matemáticos e computacionais e a sua validação no confronto com a situação real.

Funções

O primeiro artigo sobre funções publicado na *Quadrante* discute de forma aprofundada o fenómeno de transposição didática neste tema matemático, com base nos programas de matemática do ensino secundário em Espanha e de apontamentos de alunos das suas aulas (Ruiz Higuera et al., 1995). Os autores alertam para os riscos do surgimento de obstáculos didáticos à aprendizagem das funções pelas opções tomadas, nomeadamente, a preponderância do registo algébrico na noção de função e sugerem, entre outros aspetos, a exploração de situações de dependência e variabilidade.

Um dos tópicos que se destaca nos estudos sobre funções, é o das representações e suas conexões. Num estudo numa turma do 8.º ano, em que foram propostas diversas tarefas que promoviam a transformação entre representações, Pais e Saraiva (2011) evidenciam que os

dois participantes selecionados mobilizaram várias representações das funções e conseguiram desenvolver uma melhor compreensão da representação analítica a partir da representação gráfica. A aprendizagem parece ter sido favoravelmente influenciada pelo recurso a um software que permitia múltiplas representações das funções. Também o recurso à tecnologia, neste caso a calculadora gráfica, é salientado num estudo com um par de alunos do 11.º ano (Almeida & Oliveira, 2009) como uma vantagem para o estabelecimento de conexões entre as representações analítica e gráfica, pela facilidade que confere à visualização dos efeitos da mudança de parâmetros no gráfico de uma família de funções. Por seu turno, Berciano et al. (2017) apresentam resultados que evidenciam que a interpolação e extrapolação gráficas pode ser facilitada pelo uso de uma coleção de modelos de famílias de funções e que esta cumpre as propriedades de um sistema de representação. Verificaram, ainda, que a maioria dos participantes, alunos do ensino secundário, têm maior dificuldade em usar métodos algébricos, mostrando preferência pelo uso da interpolação gráfica.

Em estreita ligação com a modelação matemática, como contexto privilegiado para aplicação ou construção do conceito de função, surgem três artigos. Recorrendo à Teoria da Atividade de Engeström (1999), num estudo com uma turma do 8.º ano, em que procuraram compreender as aprendizagens realizadas no campo das funções, com os robots como elementos mediadores, Oliveira et al. (2007) concluem que estes facilitaram a associação de aspetos particulares da função de proporcionalidade direta à situação física, contribuindo para que os alunos atribuíssem significado ao conceito. Adicionalmente, destacam, a este respeito, o papel importante do questionamento do professor apoiando a atividade dos alunos. Os outros dois estudos adotaram a Perspetiva de Modelos e Modelação de Lesh e Doerr (2003) na construção de tarefas de modelação com o objetivo de promover o pensamento funcional, antes do ensino formal de funções, com uma turma de alunos com 11 anos de idade (González-Galaviz et al., 2021) e para introduzir a noção de covariação com uma turma de alunos de 14 anos de idade (Moreno-Sandoval & Alvarado-Monroy, 2021). O primeiro estudo mostra que a tarefa de modelação no contexto da criptografia se revelou apropriada para os alunos construírem uma relação funcional, através de uma regra de correspondência, e que foram capazes de a exprimir em diferentes representações, como tabelas e em linguagem natural. No segundo estudo, em que os alunos recorreram ao software de simulação interativa *NetLogo*, verificou-se que 50% destes conseguiram atingir o nível mais elevado no que respeita ao quadro adotado de Thompson e Carlson (2017) para avaliar o desenvolvimento do raciocínio covariacional. Os autores atribuem tal sucesso, em parte, à relevância do contexto da situação da realidade explorada, na medida que os alunos conseguiam dar sentido à quantificação da variação em associação com a interpretação desse contexto.

Cálculo infinitesimal

Na primeira década da Quadrante, a quase totalidade dos artigos incluídos neste tópico centra-se no tema do Cálculo infinitesimal, incluindo a aprendizagem de limite (Moura, 1995) e o ensino do cálculo diferencial e integral (Baldino et al., 1997; Cassol et al., 1995; Silva, 1998), com uma predominância de estudos no ensino superior.

O papel da noção intuitiva de limite na aprendizagem deste conceito está presente no estudo de Moura (1995), realizado com três alunos do ensino superior, que recorrem às potencialidades do software *Probe* para resolver um problema envolvendo limites de sucessões. As representações tabelar e gráfica de uma sucessão permitiram uma articulação entre as representações algébrica e gráfica e favoreceram uma visão dinâmica das sucessões e respetivos limites, assentes em ideias intuitivas dos alunos. Tal conduz a autora a uma discussão sobre a natureza de duas definições formais de limite (de Cauchy e de Weierstrass) e das suas implicações para o ensino. Mais de 20 anos mais tarde, surge um outro estudo sobre a temática dos limites (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017) que identifica noções intuitivas que alunos do ensino secundário possuem antes do estudo destes conceitos e como estas perduram após a introdução formal dos mesmos. Evidencia-se que os alunos detêm uma compreensão instrumental de carácter mais formal, comparativamente ao momento anterior à intervenção, e que está associada à aplicação de regras e estratégias pré-estabelecidas, mantendo ainda assim elementos das suas conceções iniciais. Tal como em Moura (1995), este estudo tem a influência do framework de *concept-image* e *concept-definition* de Tall e Vinner (1981) e recomenda igualmente a abordagem dos conceitos em análise a partir de uma conceção dinâmica dos mesmos.

Já Cassol et al. (1995) analisaram o tratamento dado ao Teorema Fundamental do Cálculo por diferentes manuais didáticos, adotando a Teoria dos Campos Semânticos (Lins, 1994). Observaram diferenças significativas que correspondiam a campos semânticos distintos, nomeadamente, que, por vezes, recorriam à continuidade e limites para fundamentar resultados e demonstrações, enquanto noutras passagens recorriam aos infinitésimos. Também adotando a Teoria dos Campos Semânticos, Baldino et al. (1997) apresentam uma proposta didática para abordagem do coeficiente angular de uma reta no ensino da segunda derivada de uma função. Tal proposta, que se encontrava em experimentação num curso de Cálculo, assenta na ideia de coeficiente angular como multiplicador.

O ensino e a aprendizagem de probabilidades e estatística

Na temática das probabilidades destacam-se os conceitos de aleatoriedade (variáveis e experiências) e espaço amostral na exploração da probabilidade condicionada (NCTM, 2000). Na estatística têm recebido crescente atenção a literacia e o raciocínio estatístico, capacidades que envolvem a organização e interpretação de dados ou seus resumos estatísticos e a compreensão de conceitos e processos estatísticos (Ben-Zvi & Garfield,

2004). As probabilidades e a estatística, sendo pouco comuns no ensino da Matemática até ao século XX, foram privilegiadas nas orientações curriculares que evoluíram a nível internacional, desde os anos iniciais até ao ensino secundário, tendo em vista desenvolver a cidadania ativa dos alunos (Bargagliott et al., 2020). Assim, as mudanças curriculares que têm ocorrido nestas temáticas constituem um campo fértil para a investigação sobre aspetos como: contextos de ensino e aprendizagem a adotar nas aulas; aprendizagens e dificuldades dos alunos nos conceitos; e formação de professores e futuros professores para ensinar esta temática.

Nesta secção apresentamos uma revisão de 22 artigos publicados nas três décadas da revista *Quadrante* (Tabela 4), mostrando distintas investigações sobre o ensino e a aprendizagem das probabilidades e estatística, desenvolvidas nos ensinos básico, secundário e superior, numa generalidade de países, e sobre conhecimento de professores e futuros professores para ensinar. Atendendo aos focos destes artigos, esta secção está estruturada nas temáticas: noções básicas de probabilidade; literacia e raciocínio estatístico. As noções básicas de probabilidade apresentam um número de artigos pouco variável nas três décadas, sendo o tema da literacia e raciocínio estatístico o que possui um maior número de artigos (55%), destacando-se a sua incidência na terceira década, em parte devido à publicação de um número temático em 2014.

Tabela 4. Número de artigos sobre o tema probabilidades e estatística, publicados por década

Período	1992-2001	2002-2011	2012-2021	Total (%)
Noções básicas de probabilidade	3	3	4	10 (45%)
Literacia e raciocínio estatístico	2	0	10	12 (55%)
Total	5	3	14	22 (100%)

Passamos, em seguida, a apresentar a análise dos artigos selecionados de acordo com as duas secções definidas.

Noções básicas de probabilidades

Na temática das probabilidades destacamos diversos artigos que se centram em aspetos associados ao seu ensino e aprendizagem. Quatro destes são de natureza teórica e foram desenvolvidos em distintos contextos internacionais, apresentam tendências curriculares e argumentam abordagens didáticas a adotar no ensino e na aprendizagem das probabilidades em diversos níveis de ensino.

Num estudo, Ponte e Fonseca (2001) analisaram e compararam as tendências curriculares da estatística em vigor, em particular as de Portugal, Inglaterra e EUA, nomeadamente quanto às noções básicas de probabilidade nos diferentes níveis de ensino. Os resultados apontam que é proposta uma abordagem destes conceitos, nos EUA a partir da segunda fase da *elementary school* e em Portugal e Inglaterra desde o 3.º ciclo, para os alunos aprenderem a quantificar a probabilidade de resultados de experiências aleatórias simples. Nos currículos portugueses e americanos, no ensino secundário, são referenciadas a probabilidade condicionada e as distribuições de probabilidades, e no português dos ensinos básico e secundário salientam-se metodologias a adotar na leção das noções de probabilidade para os alunos se familiarizarem com a linguagem e usarem conceitos na resolução de problemas.

Focados em implicações didáticas para a sala de aula, encontramos quatro estudos. Fernandes (2001) contrasta as intuições probabilísticas e cognições de alunos portugueses do 8.º e 11.º anos, verificando que as respostas corretas são mais comuns nos alunos do ensino secundário, que usaram mais estratégias baseadas no conceito de proporção para comparar probabilidades, em vez de raciocínios aditivos. Os resultados sugerem valorizar a interpretação frequencista de probabilidade para promover intuições probabilísticas adequadas e, também, a necessidade de salientar os acontecimentos certos e os que incluam conectivos lógicos na sua formulação. Carvalho e Fernandes (2005) destacam, em contexto português, usar as orientações curriculares nas práticas de ensino da probabilidade, criar tarefas, e promover interações entre os alunos e o professor, estimulantes nas suas resoluções para os envolver nas atividades propostas. Fernandes et al. (2009) também salientam o, então, recente interesse de propor aos alunos a resolução de problemas mais sofisticados com dados reais, e a importância da simulação em probabilidades como fim didático recorrendo a recursos tecnológicos, permitindo explorar conceitos de probabilidade e inferências, desenvolver raciocínios mais intuitivos e abordar situações da realidade. No contexto brasileiro, Kataoka et al. (2014) recomendam propor no ensino fundamental e médio sequências de ensino em que os alunos trabalhem colaborativamente em atividades ajustadas ao nível escolar, construam tabelas simples e gráficos de barras usando computador, discutam as diferenças entre situação determinística e experimentação aleatória, apliquem a lei de Laplace e comparem formas de atribuir probabilidades.

Aspetos didáticos no ensino e aprendizagem das probabilidades são também ilustrados por experiências de ensino realizadas com alunos de distintos níveis, nos três artigos seguintes. No estudo de Correia e Fernandes (2007) são salientes, no ensino da Combinatória, atendendo à sua importância na área das probabilidades, as estratégias espontâneas com potencial para a resolução de problemas usadas por alunos portugueses do 9.º ano. Os resultados também destacam o potencial didático do uso de procedimentos sistemáticos de

enumeração e o diagrama de árvore, como forma de construção de representações e resolução de problemas, que se revelaram eficazes para as respostas corretas dos alunos.

A integração de tecnologia nas metodologias de ensino também é destacada nestes artigos. No estudo de Batanero et al. (2001), com alunos espanhóis no 1.º ano do ensino universitário, foi usado o computador como ferramenta didática para o cálculo e representação gráfica, trabalhando dados obtidos de ficheiros fornecidos e na avaliação de intuições probabilísticas. Na realização de experiências de simulação, apoiadas em programas informáticos, os alunos aprenderam a usar o software, proporcionando-lhes uma experiência estocástica que lhes permitiu adquirir noções da distribuição normal de probabilidade e ultrapassar dificuldades comuns na transição da análise de dados para a inferência. Um estudo mais recente, de Ramírez-Montes e Henriques (2019), com alunos do 10.º ano da Costa Rica, evidencia que o envolvimento dos alunos na resolução de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, como metodologia inovadora, facilitou a visualização de representações de conceitos probabilísticos e a exploração de quantidades numéricas na inferência e interpretação de propriedades, potenciou diversas aprendizagens, nomeadamente o raciocínio indutivo, a compreensão dos conceitos de aleatoriedade e espaço amostral, e a inferência de propriedades do cálculo de probabilidades.

Adicionalmente, dois artigos com base em experiências de formação, destacam o desenvolvimento do conhecimento de conteúdo e didático de futuros professores do ensino básico, para terem sucesso nas práticas de ensino das probabilidades. Ortiz e Mohamend (2014) sugerem, como metodologias de formação, propor a futuros professores do ensino primário espanhol uma amostra de situações experimentais e contextualizadas, representativas do espaço amostral, o trabalho em grupo na identificação de conteúdos associados às probabilidades nas tarefas propostas e avaliarem as respostas dadas por alunos às tarefas, permitindo-lhes adquirir o conhecimento dos conteúdos e prepará-los na componente didática. Fernandes et al. (2014), centrados na formação de futuros professores portugueses do ensino básico, aconselham o seu envolvimento na resolução de questões que envolvam a exploração da probabilidade condicionada e conjunta, centrais para a compreensão do pensamento probabilístico quando se trabalha no contexto de amostragem.

Literacia e raciocínio estatístico

Na área da educação estatística, destacamos diversos artigos publicados na *Quadrante* centrados no ensino e aprendizagem. Um deles (Gea et al., 2014) salienta o uso de livros de texto como um recurso didático, dando apoio ao professor e ao aluno, determinando o ensino. A análise realizada de livros de texto, correspondentes ao currículo do ensino secundário espanhol, baseada em definições dos conceitos associados à distribuição bidimensional, marginal e condicional, e no tipo de representações tabelar e gráfica para

apresentar a distribuição, permitiu deduzir implicações para melhoria de livros de textos futuros e do seu uso na aula por parte dos professores.

A maioria dos artigos foca-se em práticas de ensino e aprendizagem necessárias para o desenvolvimento de literacia e raciocínio estatístico dos alunos, de distintos níveis de ensino, dimensão saliente nos currículos atuais da generalidade dos países. Começamos por destacar quatro artigos, baseados em experiências nos ensinos básico e secundário, que recomendam o trabalho colaborativo dos alunos e o questionamento do professor em discussão coletiva com a turma na resolução de tarefas adaptadas ao conhecimento da estatística, sobretudo assentes na realidade, para desenvolver formas de questionar, explicitar conjecturas e justificar argumentos.

Num estudo com alunos brasileiros do 2.º ano, Corrêa e Lopes (2020) debruçaram-se sobre o contributo do trabalho de projeto, numa turma, no uso da estatística na investigação de problemas de situações reais e na relação dialógico-comunicativa baseada no discurso interativo num ambiente cooperativo. A investigação revelou o desenvolvimento do conhecimento estatístico dos alunos, incluindo o processo argumentativo, o pensamento crítico e a reflexividade narrativa.

Outros dois estudos com turmas portuguesas do 7.º ano, realçam estratégias essenciais para a aprendizagem de conceitos e literacia estatística (Brocardo & Mendes, 2001; Carvalho & César, 2001). No primeiro, evidencia-se que os alunos tiram partido da abordagem das tarefas que envolvem a análise da mediana e média, estabelecendo a relação entre dados agrupados e apresentados numa tabela, através de gráficos de barras e circular, conseguindo compreender estes conceitos. Para ultrapassarem dificuldades de analisar, interpretar e comunicar informação, as autoras recomendam a organização dos dados reais, e um trabalho continuado que valorize o raciocínio, a análise crítica de informação em contextos diversos e a discussão de ideias e processos. O segundo estudo salienta a potencialidade da exploração de situações de vida real quando os alunos resolvem colaborativamente tarefas de investigação ou problemas, formulam conjecturas, tiram conclusões fundamentadas, justificam os seus argumentos, aplicam procedimentos estatísticos no cálculo de média e mediana e passam de um conhecimento instrumental ao relacional, promovendo-se, portanto, a literacia estatística.

Também o estudo de Jacob e Doerr (2014), realizado numa turma do ensino secundário nos EUA, aponta para o desenvolvimento do raciocínio estatístico inferencial informal dos alunos, quando eles, na resolução de tarefas formais de inferência estatística, se envolvem na recolha de dados e estabelecem uma distribuição amostral, explorando e comparando amostras e tomando decisões para tirar conclusões, o que contribuiu para melhorar a sua compreensão sobre amostras e a significância dos valores-p na inferência estatística formal.

Para desenvolver a literacia e raciocínio estatístico dos alunos, as tecnologias, enquanto recursos privilegiados em contextos de sala de aula, foram destacadas em dois artigos

focados em diferentes níveis de ensino. No estudo de Lopes e Fernandes (2014), realizado com alunos portugueses do 8.º ano, propõe-se a realização de projetos envolvendo investigações estatísticas usando tecnologia. Em particular, foi realizada uma corrida com robots, que permitiu aos alunos recolher dados brutos, organizá-los em tabelas e gráficos, explorar e interpretar diferentes representações e tomar decisões informadas e fundamentadas para tirar conclusões e justificar procedimentos. O *TinkerPlots*, sendo também um recurso tecnológico, é perspetivado noutro estudo, com alunos portugueses do 10.º ano (Henriques & Antunes, 2014), como uma vantagem para desenvolverem o raciocínio covariacional, cujo uso confere facilidade para construir representações gráficas significativas e articulá-las com dados disponibilizados em cartões, apoiando-os na identificação de mensagens. Os alunos também conseguiram explorar relações entre variáveis e interpretar a tendência dos dados, usando as variáveis para realizar inferências que suportaram o seu raciocínio covariacional ao usarem o diagrama de dispersão.

Destacamos também cinco artigos baseados em experiências de formação que salientam diversas atividades relacionadas com o conhecimento de estatística e que contribuem para o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores. Dois estudos, um de Mendonça e Lopes (2017), com professores do ensino básico, e outro de Årlebäck et al. (2021), com futuros professores do ensino secundário, salientam o envolvimento dos participantes na exploração das tarefas e discussão de perspetivas sobre modelação matemática para integração da educação estatística. Ao desenvolverem modelos de amostragem, usados pelos estudantes, os futuros professores percebem o raciocínio destes e aproximam-se da modelação matemática como perspetiva pedagógica. O estudo de Estevam et al. (2017), com professores brasileiros do ensino básico, salienta o seu empreendimento conjunto centrado na análise de vídeos de uma aula de estatística em contexto de ensino exploratório, que possibilitou o seu desenvolvimento profissional em termos da reflexão, compreensão, contextualização e justificação do conhecimento para ensinar o pensamento estatístico, privilegiando mudanças na sua própria prática.

Salientamos ainda o estudo de Santos e Ponte (2014), no qual é sugerida como atividade necessária para reforçar a formação de futuros professores do ensino básico (1.º e 2.º ciclos) a realização de investigações estatísticas, que contribui para compreenderem o que nelas está envolvido e desenvolverem uma perspetiva aprofundada sobre como as conduzir na sala de aula, de modo a proporcionar aos alunos a aprendizagem de conceitos e representações estatísticas. O estudo de Canavarro e Patrício (2015) reforça a importância de, na formação de professores do 2.º ciclo, se investir no domínio da organização e tratamento de dados relacionado com o conhecimento curricular sobre literacia estatística, o que contribui para o desenvolvimento do seu conhecimento didático e permite ultrapassar o ensino estrito de tópicos associados ao cálculo de medidas estatísticas.

Conclusões

Da presente revisão dos artigos publicados na revista, no âmbito da investigação sobre o ensino e aprendizagem de temas matemáticos, foi possível identificar que se destacam, em termos de incidência, o tema da álgebra, funções e cálculo infinitesimal com o maior número de artigos e o tema dos números com o menor número de artigos, embora as diferenças entre temas não sejam muito expressivas. Este relativo equilíbrio entre os quatro temas, decorrerá, em parte, das opções editoriais da revista de publicar números temáticos que cobrem tais temas.

Focando-nos nos tópicos tratados em cada tema, verifica-se que, no caso dos números, os estudos se centram essencialmente nos números naturais e racionais e, portanto, no 1.º e 2.º ciclos, sendo quase inexistente a investigação no contexto da educação de infância e no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. No tema da geometria e medida, destaca-se sobretudo, na última década, a investigação associada à visualização e raciocínio espacial (Battista, 2007), realçando-se ainda a existência de um número reduzido de estudos relativos à importante temática curricular da medida. Já no tema da álgebra, funções e cálculo infinitesimal, a investigação cobre todos os níveis de ensino, do básico ao superior, e acompanha a tendência da investigação internacional no que diz respeito ao pensamento algébrico, mas é escassa quanto ao pensamento covariacional (Thompson & Carlson, 2017), muito relevante em diferentes ciclos de ensino, e quanto à aprendizagem das funções no ensino secundário e ao cálculo infinitesimal, este último presente quase exclusivamente na primeira década da revista. No tema das probabilidades e estatística, é de assinalar, na terceira década da revista, um grande aumento de artigos publicados, em especial sobre a literacia e o raciocínio estatístico em linha com um reconhecimento crescente nas orientações curriculares nacionais e internacionais (Bargagliott et al., 2020) sobre a sua relevância para a formação do aluno. No entanto, verifica-se a ausência de estudos sobre a linguagem e o pensamento probabilístico e a inferência informal tem uma reduzida expressão.

Destaca-se também uma presença limitada da demonstração associada ao ensino e aprendizagem dos temas matemáticos, com exceção dos artigos focados na geometria e, globalmente, as conexões matemáticas entre diferentes temas têm pouca expressão. No entanto, as conexões externas são afloradas em alguns estudos, surgindo como um elemento favorecedor das aprendizagens dos alunos de determinados tópicos, nomeadamente, em estudos com influência da *matemática realista* (Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019) ou mais recentemente no campo da modelação matemática.

Uma marca importante da investigação publicada na Quadrante sobre a temática do ensino e aprendizagem da matemática é o número expressivo de estudos que são sustentados por intervenções em sala de aula, a maioria realizada por professores que também são investigadores e envolvendo apenas uma turma. Assim, como referimos na introdução, boa parte da investigação retratada tem um carácter interventivo, verificando-

se, adicionalmente, que é bastante comum os resultados dos estudos envolverem uma discussão sobre o sucesso da intervenção realizada, ainda que esta não seja o foco do estudo. Deste modo, a contribuição de boa parte dos artigos destaca-se no que diz respeito à identificação de condições que podem potenciar a aprendizagem dos tópicos em causa e centram-se amiúde na compreensão de processos de aprendizagem no contexto de tais intervenções, identificando também dificuldades e obstáculos vividos pelos alunos.

Em associação com tais intervenções em sala de aula, desses estudos sobressaem a centralidade das tarefas matemáticas para promover a aprendizagem dos alunos, assim como o relevante papel da tecnologia digital e, numa perspetiva dialógica, do questionamento do professor e dos momentos de discussão coletiva da atividade dos alunos. Saliente-se que a tecnologia digital é referida em todos os temas, com exceção do tema números, sendo menos habitual no 1.º ciclo do que nos anos subsequentes. Apesar da discussão que muitos artigos apresentam em torno das condições de ensino, particularmente, das tarefas matemáticas propostas nas experiências de ensino, verifica-se, tal como Jones e Tzekaki (2016) referem, que se torna necessária uma investigação mais sistemática, nomeadamente, para analisar quais as suas características que são determinantes para a aprendizagem. A esse respeito, nota-se também a necessidade de estudos longitudinais que possam analisar o efeito das intervenções realizadas para além do momento em que estas ocorrem e, desse modo, permitindo perceber a sua contribuição, por exemplo, para a aquisição de aprendizagens duradouras e minorar dificuldades identificadas na literatura.

Notas

¹ Quando se refere o conjunto dos números naturais considera-se que inclui o número 0.

Referências

- Almeida, A. C., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, 18(1&2), 87–118. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22839>
- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 16(1), 27–56. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22813>
- Antonini, S. (2018). Conceitos figurativos na prova por redução ao absurdo. *Quadrante*, 27(2), 115–132. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22967>
- Årlebäck, J. B., Frejd, P., & Doerr, H. (2021). Explorando os modelos de estudantes sobre amostragem e inferências com variáveis nominais. *Quadrante*, 30(1) 158–177. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23655>
- Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2017). Students' conceptualisations of function revealed through definitions and examples. *Research in Mathematics Education*, 19(1), 1–19. <https://dx.doi.org/10.1080/14794802.2016.1249397>

- Baldino, R. R., Ciani, A. B., Lopes, A. R. L. V., Cyrino, M. C. de C. T., & Pereira, P. S. (1997). Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: Crítica ao ensino atual e proposta alternativa. *Quadrante*, 6(1), 29–50. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22693>
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.
- Batanero, C., Sánchez, V., & Tauber, L. M. (2001). Significado e compreensão da distribuição normal em um curso introdutório de análise de dados. *Quadrante*, 10(1), 59–91. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22730>
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). National Council of Teachers of Mathematics
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6>
- Berciano, A., Ortega del Rincón, T., & Puerta Rebuél, M. (2017). Las posibilidades curriculares de la interpolación/extrapolación gráfica en Bachillerato. *Quadrante*, 26(1), 71–92. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22943>
- Borralho, A., & Lopes, A. P. (2010). Desenvolvimento do sentido de número no ensino básico: um estudo no 7.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 19(2), 5–36. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22855>
- Brocardo, J., & Mendes, F. (2001). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante*, 10(1), 33–58. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22731>
- Brown, M. (2005). What do young children know about number and what should they know? *Quadrante*, 14(1), 133–151. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22786>
- Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2018). Definir figuras geométricas: uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras. *Quadrante*, 27(2), 133–159. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22965>
- Bruno, A., & Cabrera, N. (2005). Una experiencia sobre la representación en la recta de números negativos. *Quadrante*, 14(2), 25–41. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22797>
- Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121–146). Sense Publishers.
- Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2021). Preservice teachers' mathematical knowledge about repeating patterns and their ability to notice preschoolers algebraic thinking. *Acta Scientiae*, 23(6), 30–59. <http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6302>
- Camargo, L., Jiménez Ardila, S., & Salazar Fino, V. (2018). Interpretaciones de niños de 4.º de primaria relativas al ángulo. *Quadrante*, 27(2), 89–114. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22968>
- Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81–118. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22816>
- Canavarro, A. P., & Patrício, M. (2015). Conhecimento curricular de professores do 2.º ciclo sobre organização e tratamento de dados: que manifestações da literacia estatística? *Quadrante*, 14(1), 3–28. <https://doi.org/10.48489/quadrante.2291>
- Canavarro, A. P., & Prieto, M. (2018). Desenvolvimento do sentido espacial através do uso de representações múltiplas no contexto da dança tradicional: uma experiência de ensino no 1.º ciclo de escolaridade. *Quadrante*, 27(2), 33–62. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22969>
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds I* (pp. 107–138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5
- Carvalho, C., & César, M. (2001). Interações entre Pares e Estatística: Contributos para o estudo do conhecimento instrumental e relacional. *Quadrante*, 10(1), 3–31. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22732>
- Carvalho, C., & Fernandes, J. A. (2005). Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. *Quadrante*, 14 (2), 71–88. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22795>

- Carvalho, R., & Ponte, J. P. (2019). Cálculo mental com números racionais e desenvolvimento do sentido de número. *Quadrante*, 28(2), 53–71. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23017>
- Cassol, A., Angelo, C. L., Sad, L. A., & Silva, M. R. G. (1995). Uma análise do Teorema Fundamental do Cálculo em alguns livros-texto. *Quadrante*, 4(2), 73–90. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22674>
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D., & Trawick-Smith, J. (2018). O ensino e a aprendizagem da Geometria: Princípios fundamentais. *Quadrante*, 27(2), 7–31. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22970>
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Conceição, J., & Rodrigues, M. (2020). Processos de raciocínio espacial na representação de figuras 3D por alunos do 1.º ano do ensino básico. *Quadrante*, 29(1), 115–139. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23007>
- Corrêa, S. A., & Lopes, C. E. (2020). A relação dialógico-comunicativa gerada pela insubordinação criativa na educação estatística de crianças. *Quadrante*, 29(2), 86–109. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22574>
- Correia, P., & Fernandes, J. A. (2007). Estratégias usadas por alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória. *Quadrante*, 16(2), 51–80. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22817>
- Costa, C., & Catarino, P. (2007). Da colinearidade no ensino secundário à dependência linear no ensino superior: Que descontinuidades?. *Quadrante*, 16(1), 147–162. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22810>
- Cruz, M. S., & Spinillo, A. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*, 13(2), 3–29. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22782>
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16(1), 57–80. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22812>
- De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 400–431.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 14–20.
- Engeström, Y. (1999). Expansive visibilization of work: An activity-theoretical perspective. *Computer Supported Cooperative Work*, 8, 63–93. <https://doi.org/10.1023/A:1008648532192>
- Estevam, E., Cyrino, M. C. T. T., & Oliveira, H. (2017). Análise de vídeos de aula na promoção de reflexões sobre o ensino exploratório de Estatística em uma comunidade de professores. *Quadrante*, 26(1), 146–169. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22940>
- Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), 3–32. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22737>
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: Potencialidades e limitações. *Quadrante*, 18(1&2), 161–183. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22836>
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P., & Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, 23(1), 43–62. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22900>
- Fernandes, R. (1997). O ensino da aritmética elementar em Portugal nos finais do século XVIII. *Quadrante*, 6(1), 51–58. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22694>
- Gascón, J. (2001). Reconstrução da divisibilidade no ensino secundário. *Quadrante*, 10(2), 33–66. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22736>
- Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A., & Gómez, E. (2014). La distribución de datos bidimensionales en los libros de textos de matemáticas de Bachillerato. *Quadrante*, 23(2), 147–172. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22904>

- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 39, 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 109–131. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22787>
- González-Forte, J. M., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante*, 28(2), 32–52. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23026>
- González-Galaviz, I. G., Lima, C., & Alvarado-Monroy, A. (2021). Diseño de una situación contextualizada para la introducción temprana del pensamiento funcional. *Quadrante*, 30(1), 94–115. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23602>
- Gordo, F. M. (1994). A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1.º ciclo do Ensino Básico. *Quadrante*, 3(1), 55–73. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22650>
- Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019). Promovendo transições processo-objeto e uma compreensão mais profunda no domínio dos números e operações. *Quadrante*, 28(2), 6–31. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23030>
- Guerreiro, H. G., & Serrazina, L. (2018). Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem participada da noção de 10%. *Quadrante*, 27(1), 69–94. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22960>
- Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, 26(1), 25–49. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22945>
- Henriques, A., & Antunes, P. (2014). A exploração da covariação estatística por alunos do 10.º ano com o TinkerPlots. *Quadrante*, 23(2), 95–122. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22906>
- Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2016). Generalisation, covariation, functions, and calculus. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–38). Sense Publishers.
- Jacob, B., & Doerr, H. M. (2014). Statistical reasoning with the sampling distribution. *Quadrante*, 23(2), 124–146. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22905>
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109–149). Sense Publishers.
- Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, 5(1), 61–108. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22679>
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kataoka, V. Y., Silva, C. B. da, & Cazorla, I. (2014). Passeios aleatórios da Carlinha: uma sequência de ensino de probabilidade. *Quadrante*, 23(2), 23–46. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22909>
- Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher question from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), 5–26. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22814>
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lins, R. (1994). O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico. *Dynamis, Revista Tecno-Científica*, 2(7), 29–39.
- Lopes, P. C., & Fernandes, E. (2014). Literacia, raciocínio e pensamento estatístico com robots. *Quadrante*, 23(2), 69–93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22907>
- Marcelino, L., Teixeira, R., & Rato, J. (2017). Método sentido de número: intervenção nas competências numéricas iniciais de crianças do 1.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 26(1), 119–144. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22941>

- Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87–125. <https://doi.org/10.1023/A:1012785106627>
- Mascarenhas, D., Maia, J., Sola Martinez, T., & Hinojo Lucena, F. (2014). A importância das tarefas de investigação, da resolução de problemas e dos materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem de perímetro, área e volume no 5.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 23(1), 3–28. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22902>
- Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante*, 1(1), 93–112. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22617>
- Matos, J. M. (1993). Modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo. *Quadrante*, 2(1), 79–88. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22629>
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8. British Columbia, Canada.
- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, 22(1), 133–162. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22884>
- Mendonça, L., & Lopes, C. (2017). As aprendizagens geradas num grupo colaborativo de professores durante um estudo sobre modelagem matemática na Educação Estatística. *Quadrante*, 26(1), 93–117. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22942>
- Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante*, 21(2), 111–138. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22878>
- Miyazaki, M., Fujita, T., Iwata, K., & Jones, K. (2022). Level-spanning proof-production strategies to enhance students' understanding of the proof structure in school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2075288>
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89–107. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22785>
- Morais, C., & Serrazina, L. (2013). O Cálculo Mental na Resolução de Problemas de Subtração. *Quadrante*, 22(1), 53–76. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22887>
- Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante*, 27(1), 25–45. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22963>
- Moreno-Sandoval, S., & Alvarado-Monroy, A. (2021). La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria. *Quadrante*, 30(2), 147–178. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23687>
- Moura, E. (1995). Students' alternative frameworks about the notion of limit. *Quadrante*, 4(1), 67–82. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22662>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Neto, T., Breda, A., & Godino, J. (2011). Desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: Recurso a geometrias planas. *Quadrante*, 20(1), 83–100. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22858>
- Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2015). A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. *Quadrante*, 24(2), 85–110. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22921>
- Nunes, M. J., & Rodrigues, M. (2018). Composto e desenhando formas tridimensionais: Um contributo para a caracterização do raciocínio espacial de crianças de 5 anos. *Quadrante*, 27(2), 63–88. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22971>
- Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 173–197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_11

- Oliveira, H., Polo-Blanco, I., & Henriques, A. (2021). Exploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: A focus on functional thinking. *Journal on Mathematics Education*, 12(2), 257–278. <http://doi.org/10.22342/jme.12.2.13745.257-278>
- Oliveira, R., Fernandes, E., & Fermé, E. (2007). Proporcionalidade directa como função: da perfeição à realidade a bordo de um robot. *Quadrante*, 16(1), 81–110. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22811>
- Ortiz, J. J., & Mohamend, N. (2014). Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Quadrante*, 23(2), 5–22. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22910>
- Pais, S., & Saraiva, M. (2011). O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 20(2), 17–55. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22867>
- Pereira, M. (2013). Estratégias usadas por alunos do 7.º ano de escolaridade na exploração de padrões. *Quadrante*, 22(1), 77–106. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22886>
- Pereira, M. G., & Serrazina, L. (2015). Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra. Um estudo no 4.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 24(1), 29–58. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22916>
- Pimenta, C., & Saraiva, M. (2019). As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 28(1), 27–53. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22976>
- Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 113–134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística. Análise comparativa de três países. *Quadrante*, 10(1), 93–132. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22729>
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20(1), 55–81. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22859>
- Ralha, M. E. (1992). Um estudo sobre as capacidades geométricas (espaciais) de estudantes universitários. *Quadrante*, 1(1), 113–121. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22616>
- Ramírez-Montes, G., Carreira, S., & Henriques, A. (2021). Rotas de modelação matemática apoiadas pela tecnologia na aprendizagem da álgebra linear: Um estudo com estudantes universitários da Costa Rica. *Quadrante*, 30(1), 219–241. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23721>
- Ramírez-Montes, G., & Henriques, A. (2019). A aprendizagem de conceitos probabilísticos: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra com alunos do 10.º ano da Costa Rica. *Quadrante*, 28(1), 54–78. <https://doi.org/10.48489/quadrante.2297>
- Rodrigues, M., & Serrazina, L. (2019). Flexibilidade de cálculo aditivo suportada por relações numéricas. *Quadrante*, 28(2), 72–99. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23016>
- Ruiz Higuera, L., Rodríguez Fernández, J. L., & Godino, J. D. (1995). La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica. *Quadrante*, 4(2), 91–116. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22673>
- Santos, R., & Ponte, J. P. (2014). Ensino e aprendizagem de investigações estatísticas: dois estudos de caso com futuras professoras. *Quadrante*, 23(2), 47–68. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22908>
- Saraiva, M. (1992). O computador na aprendizagem da Geometria - uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 1(1), 123–138. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22615>
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Silva, M. R. G. (1998). Discurso de alguns professores de cálculo sobre taxas de variação. *Quadrante*, 7(1), 55–75. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22701>
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

-
- Thompson, P., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541–555. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0195-3>
- Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of Algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73–108). Sense Publishers.