

Componentes da aprendizagem evidenciados nas fases de uma atividade de modelagem matemática

Learning components highlighted in the stages of a mathematical modelling activity

Karina Alessandra Pessoa da Silva 

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
karinasilva@utfpr.edu.br

Suzana Lovos Trindade 

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
strindade@alunos.utfpr.edu.br

Resumo. Neste artigo evidenciamos os tipos de aprendizagem matemática proporcionados no desenvolvimento de uma atividade de modelagem por alunos do Ensino Fundamental. O quadro teórico que fundamenta nossa investigação se pauta nos componentes da aprendizagem da matemática que estão presentes nas formas como os alunos lidam com técnicas e procedimentos matemáticos na modelagem matemática, como um meio de estabelecer conexões entre matemática e situações da vida. A pesquisa empírica, com 19 alunos de uma turma do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada, possibilitou inferir a presença dos componentes da aprendizagem nas fases do ciclo de modelagem matemática, tendo sido observado que alguns deles se mostraram mais centrais em certas fases do que em outras. Essas evidências foram proporcionadas pelos registros escritos dos alunos, transcrições de gravações em áudio e vídeo e mensagens em grupos do aplicativo *WhatsApp*. A análise dos componentes da aprendizagem permitiu inferir que o processo de modelagem envolveu aprendizagem matemática inequívoca, visto que vários tipos de aprendizagem foram observados ao longo do ciclo.

Palavras-chave: educação matemática; modelagem matemática; ciclo de modelagem; componentes da aprendizagem; ensino fundamental.

Abstract. In this paper we highlight the types of mathematical learning provided in the development of a modelling activity by Elementary School students. The theoretical framework that underlies our investigation is based on the components of mathematical learning that are present in the ways in which students deal with mathematical techniques and procedures in mathematical modelling, as a

means of establishing connections between mathematics and life situations. Empirical research with 19 students from a class of 8th grade of elementary school at a private school made it possible to infer the presence of learning components in the stages of the mathematical modelling cycle and showed that some of them were more central in certain stages of the process. Such evidence was provided by the students' written records, transcripts of audio and video recordings, and messages in groups on the *WhatsApp* application. The analysis of the learning components allowed inferring that the modelling process involved unequivocal mathematical learning, as several types of learning could be observed throughout the cycle.

Keywords: mathematics education; mathematical modelling; modelling cycle; learning components; elementary school.

Introdução

No âmbito educacional, a aprendizagem é uma das temáticas mais recorrentes em pesquisas que abarcam as finalidades da implementação de atividades de modelagem matemática nas aulas (Almeida, Silva, & Borssoi, 2021; Carreira, 2010; Niss & Blum, 2020; Pollak, 2015). Um dos motivos para incluir a modelagem matemática como um processo significativo de ensino e aprendizagem é o fato de que “a matemática deve ajudar os alunos a entender o mundo em que vivemos e a dominar melhor as situações do mundo real decorrentes da vida cotidiana, bem como de outras disciplinas escolares ou de suas futuras profissões ou áreas de estudo” (Niss & Blum, 2020, p. 28).

Segundo Carreira (2010, p. 1), “considerar as conexões da Matemática com a realidade que nos envolve, numa direção que nos aproxima das aplicações da Matemática ou da atividade de construir e explorar modelos matemáticos” é essencial na experiência dos alunos com a matemática, “clarificando e/ou estendendo o entendimento e a capacidade de os converter em situações concretas de aprendizagem da Matemática”.

Almeida, Silva e Borssoi (2021, p. 124) salientam que “dirigir a atenção para a aprendizagem em atividades de modelagem implica olhar para a atuação dos estudantes nessas atividades”. Trata-se de estar atento às ações dos alunos, a fim de buscar sinalizações da aprendizagem no decorrer da resolução da situação, analisando se souberam resolver e avaliar os resultados e se usaram adequadamente conceitos matemáticos.

Ao lançar um olhar para as ações dos alunos em atividades matemáticas, como as de modelagem, consideramos, assim como Pinilla (2010), que existem diferentes tipos de aprendizagens que podem ser evidenciados. Por exemplo, um aluno pode calcular a área de um retângulo numa figura em que se indica o comprimento e a largura, porém não ter a compreensão do que significa a área do chão retangular de uma sala ou de um gramado. Neste caso, a aplicação de cálculos corretos em exercícios rotineiros não garante a aprendizagem sobre o conceito de área de uma figura plana. A aprendizagem matemática envolve,

para além de saber o conceito e usá-lo para efetuar cálculos, “combiná-lo com outros [conceitos] ou estratégias oportunas para resolver problemas” e “saber explicar a si mesmo e aos outros o conceito construído ou a estratégia seguida” (Pinilla, 2010, p. 14).

Considerando as preocupações relativas à aprendizagem matemática dos alunos, nos debruçamos em investigar os diferentes tipos de aprendizagem que são proporcionados no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no Ensino Fundamental (1º ao 9º ano de escolaridade). Com essa intenção, ao recorrermos à literatura, evidenciamos nos trabalhos de Pinilla (2010) e D’Amore et al. (2015) reflexões sobre a aprendizagem matemática, com ênfase naquilo que os alunos aprendem de matemática, bem como no motivo de seus erros em tarefas rotineiras e de resolução de problemas. Para os autores, saber identificar os erros dos alunos, no desenvolvimento de uma atividade matemática, ajuda o professor a fazer intervenções com o intuito de evitá-los, bem como a decidir retomar conteúdos anteriores.

As reflexões supracitadas foram caracterizadas por Pinilla (2010) em cinco componentes da aprendizagem – conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica –, que podem ser evidenciados nos registros escritos e falados dos alunos. Segundo Pinilla (2010, p. 9), “este tipo de análise é crucial para o docente, em um primeiro momento, quando organiza a própria atividade de ensino e, em um segundo momento, quando deve avaliar a aprendizagem dos estudantes”.

No contexto de uma atividade de modelagem, um instrumento de aprendizagem para os alunos e um instrumento de diagnóstico para os professores pode ser estruturado por meio de ciclos de modelagem (Borromeo Ferri, 2018), que são descritos por um conjunto de procedimentos que configuram etapas ou fases inter-relacionadas. Stender (2018) nota que o ciclo de modelagem tem, por si só, se tornado um indicativo de como se dá (ou como deveria se dar) o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Porém, Borromeo Ferri (2018) afirma que os alunos modeladores podem não seguir o ciclo de forma linear, indo e voltando nas diferentes etapas de desenvolvimento quantas vezes julgarem adequado, revelando o que a autora caracterizou por rotas individuais de modelagem.

Entendemos que o transitar pelas fases do ciclo de modelagem tem potencial para que o professor identifique os componentes da aprendizagem dos alunos, permitindo-lhe avaliar os acertos e intervir nos erros que possam ocorrer, de modo que os diferentes tipos de aprendizagem sejam evidenciados. É sobre as fases do ciclo que subsidiamos a análise que realizamos neste artigo, no âmbito de uma atividade de modelagem desenvolvida por grupos de alunos de uma turma de 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada brasileira.

Componentes da Aprendizagem

Etimologicamente, a palavra aprendizagem corresponde ao ato de aprender, do latim *apprehendere*, que significa “apoderar-se”, “levar para junto de si”. Neste sentido, D’Amore et al. (2015, p. 156), aclaram que a aprendizagem “é o resultado de um contato entre um sujeito que aprende e um objeto de conhecimento”.

Considerando a aprendizagem da Matemática, o objeto do conhecimento está inserido no âmbito conceitual e simbólico (representativo) e, com isso, é revelada pelos signos escolhidos pelo sujeito que aprende. Os signos são formas utilizadas para indicar, remeter ou representar um objeto (Peirce, 2005) e estão associados aos conhecimentos colaterais do sujeito que os utiliza. Uma palavra, um gesto, uma expressão facial, uma reação, um texto escrito somente são signos se afetarem uma mente interpretadora capaz de analisar e produzir outro signo (Santaella, 2007). Na Matemática, somente temos acesso aos objetos por meio de signos que os representam. Um gráfico, uma expressão algébrica, uma tabela ou outra estrutura matemática são exemplos de signos que podem representar um objeto matemático, não em sua totalidade, mas de acordo com certa forma e capacidade. Por exemplo, dependendo do conhecimento colateral de um aluno, uma expressão algébrica pode não deixar explícito o comportamento crescente ou decrescente de uma função, sendo necessária a presença de um signo gráfico. Com isso, podemos asseverar que os diferentes signos se complementam para revelar características do objeto matemático.

Em estudos sobre a complementaridade dos signos para representar os objetos matemáticos, Duval (1998) estruturou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica em que a aprendizagem matemática se faz presente quando o aluno realiza, pelo menos, uma transformação de registro de representação em que há mudança no sistema semiótico. Por exemplo, realizar a mudança do registro algébrico para o gráfico. Todavia, os alunos podem produzir registros de representação inadequados na abordagem de um conceito, criando uma ideia incorreta, ou seja, uma concepção errônea do conceito. Caso, na representação gráfica de uma função exponencial, não se faça uso correto das escalas nos eixos, a análise visual do comportamento assintótico pode ficar comprometida.

Uma concepção errônea (misconcepção), de modo geral, é evidenciada quando há um conflito entre um signo anterior relativo àquele conceito, que o aluno acreditava ser definitivo, e o novo signo (D’Amore, 2007). O conflito geralmente acontece quando o novo signo “amplia os limites de aplicação ou fornece uma versão mais ampla do conceito” (D’Amore, 2007, p. 126). É o caso do conceito de área de uma figura plana em que quando as medidas do comprimento e da largura são indicadas o aluno realiza os cálculos de forma correta; porém, ao “ampliar” a abordagem do conceito para a área retangular de uma sala, o aluno não estabelece a mesma relação, não fazendo uma conexão entre a abordagem matemática e uma situação da realidade.

Assim, no exemplo supracitado, há de se questionar: Como avaliar esse aluno em matemática? Faz sentido avaliar de forma grosseira e não específica? Afinal, o aluno sabe o algoritmo da multiplicação e sabe a fórmula da área de um retângulo! Será que ele não tem conhecimento matemático do que seja área? Não podemos afirmar que o aluno é privado da aprendizagem matemática de área de figura plana. Assim:

Se entendeu o conceito e não sabe usá-lo, inútil insistir na aprendizagem do conceito: se não o entendeu, mas de qualquer forma consegue manipular as fórmulas, na primeira ocasião, diferente daquela rotina, sucumbirá; então torna-se necessário ajudá-lo na construção do conceito (Pinilla, 2010, p. 15).

Para ajudar na avaliação da construção do conceito, subsidiada na compreensão de que, para a aprendizagem matemática, o aluno deve lançar mão de representações em diferentes registros semióticos, realizando tratamentos e conversões, Pinilla (2010) subdividiu a aprendizagem em cinco componentes: conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica.

A aprendizagem conceitual (noética) consiste em construções cognitivas de conceitos que representam diferentes componentes dos objetos matemáticos. Segundo Pinilla (2010, p. 39) “o termo noética significa aquisição conceitual”, portanto, como “os objetos da matemática não existem na realidade concreta” a única maneira de evidenciar a aprendizagem conceitual é por meio dos registros semióticos escolhidos pelo aluno e a representação do conceito. Podemos destacar que “a atividade semiótica é parte construtiva da aprendizagem” (Pinilla, 2010, p. 40), considerando que não basta que o aluno comunique conceitos matemáticos, mas que os represente e se aproprie de suas características de maneira correta; assim, é importante que faça o uso de diversos registros de representação desses objetos.

Aprendizagem algorítmica diz respeito a habilidades de efetuar operações, cálculos, aplicação de fórmulas ou o traçado de figuras, usando os instrumentos adequados. Pinilla (2010) ressalta a importância da interpretação dos cálculos, dado que, para que haja a aprendizagem algorítmica, é importante que o aluno saiba fazer interpretações das operações realizadas. Com isso, “a aprendizagem algorítmica, mesmo cumprindo um papel específico por si só, está estritamente ligada à aprendizagem conceitual” (Pinilla, 2010, p. 66). Ainda vale destacar que o algoritmo, quando utilizado, não tem um propósito único; pelo contrário, traz relações com a aprendizagem estratégica, a partir do momento em que o aluno compreende qual o objetivo de usar o algoritmo, o que espera ser alcançado.

A aprendizagem estratégica diz respeito aos procedimentos e às estratégias que o estudante utiliza para resolver um problema. Destaca-se, porque um problema não tem uma interpretação trivial, mas antes, requer que o aluno compreenda todo o processo que o encaminhará ao produto (solução final). A atividade escolhida pelo professor e o modo

como é orientada proporciona, ou não, a aprendizagem estratégica. Segundo Pinilla (2010, p. 67) “se for conduzida de forma motivada e atenta é rica em significados”.

A aprendizagem comunicativa busca evidenciar a capacidade de expressar ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando e representando de maneira eficaz. Esta aprendizagem é a que valida também o pensamento dos alunos durante a resolução do problema, que não se esgota na obtenção da solução correta. Segundo Pinilla (2010, p. 156), “saber comunicar matemática é um novo objetivo cognitivo”, tornando necessário o diálogo, a discussão e a própria comunicação. É importante que o aluno tenha liberdade para comunicar a matemática, seja na linguagem natural (oral ou escrita), seja por meio de símbolos, desenhos, figuras, gestos, esquemas. Pinilla (2010) ressalta que a comunicação entre aluno e professor pode gerar alguns desentendimentos à medida que o aluno quer emitir algo que não condiz com o esperado por aquele que o recebe (o professor). É necessário que o professor compreenda os diferentes tipos de linguagem e que nem sempre é necessário o uso de definições formais, mas antes saiba valorizar os argumentos e auxiliar no desenvolvimento de novos conceitos. A “argumentação é o fulcro da atividade comunicativa em matemática” (Pinilla, 2010, p. 165).

A aprendizagem semiótica tem raízes nas representações semióticas, está associada às representações do objeto e corresponde a saber transformar as representações sem perder o foco do significado do objeto. Segundo Pinilla (2010), a aprendizagem semiótica é transversal às demais aprendizagens, de modo que é imprescindível o uso de representações semióticas e suas transformações ao longo da resolução de uma atividade. A autora ainda afirma ser importante que os alunos sejam conduzidos a representar e demonstrar de diferentes formas para que se acostumem a ver diferentes representações e compreender o assunto em suas diferentes formas, sem que perca o significado.

Os componentes da aprendizagem “não são nem independentes, nem separáveis, nem com interseção vazia: o resultado positivo na aprendizagem é alcançado somente graças a uma série de causas, a um conjunto holístico de componentes” (Pinilla, 2010, p. 14). Os aspectos epistemológicos desses componentes têm o objetivo de ampliar a análise da aprendizagem dos alunos em uma atividade matemática: “aprender um conceito matemático, aprender a fazer uso de um algoritmo, a comportar-se em modo estratégico, comunicar a matemática e com a matemática,... são todos comportamentos através dos quais se constrói um objeto matemático” (Pinilla, 2010, p. 17).

Conforme compreendemos as causas dos equívocos presentes nas resoluções, podemos inferir sobre sua origem, seja por não se dominar as representações de um objeto, seja por dúvidas na execução dos algoritmos, ou a falta de domínio de determinado conceito. De acordo com D'Amore et al. (2015, p. 151), “para possibilitar a construção cognitiva, de maneira correta, de um objeto matemático, devem ser usados, e não é opcional, muitos

representámen ou representações semióticas, a fim de indicar as diferentes componentes conceituais do objeto”.

Considerando que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se configura em oportunidades de os alunos utilizarem diferentes representações semióticas para se referirem aos objetos – matemáticos e extra matemáticos –, em que conceitos podem ser evidenciados, bem como o fato de inseri-los em situações em que outras aprendizagens podem ser proporcionadas, nos valem das caracterizações dos cinco componentes para evidenciarmos os diferentes tipos de aprendizagem matemática.

Modelagem matemática na Educação Matemática

Na Educação Matemática, a modelagem matemática refere-se, em termos gerais, à investigação de uma situação da realidade por meio da matemática (Elfringhoff & Schukajlow, 2021; Niss & Blum, 2020). Isso corresponde a uma observação do mundo ao nosso redor de modo a apresentar soluções para um problema, através da construção de um modelo matemático.

Formular um problema de modelagem pode se configurar como um desafio, pois é preciso identificar ao nosso redor uma situação passível de ser analisada matematicamente. No entanto, além da análise matemática, “um problema de modelagem também deve fornecer espaço para que os alunos interpretem o problema e tenham escolhas no processo de solução” (Bliss & Libertini, 2016, p. 12). Essas escolhas podem estar subsidiadas nas ações dos alunos ao levantarem hipóteses sobre a situação em estudo, buscarem informações por meio da coleta de dados, identificarem e selecionarem variáveis, realizarem simplificações, representarem matematicamente a situação, validarem essa representação e comunicarem os resultados para os pares.

As ações requeridas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem podem ser associadas a fases, etapas ou estágios por meio dos chamados ciclos de modelagem já caracterizados na literatura (Almeida et al., 2012; Blum, 2015; Borromeo Ferri, 2018; Carreira & Baioa, 2011; Perrenet & Zwaneveld, 2012; Stender, 2018).

De modo geral, na literatura, as fases/etapas presentes em ciclos de modelagem recebem diferentes denominações. Almeida et al. (2012) denominam as fases de uma atividade de modelagem em: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação (Figura 1).

A *inteiração* é a fase em que os alunos têm o primeiro contato com a situação-problema, que será investigada e isso “implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio da coleta de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos” (Almeida et al., 2012, p. 15).

A situação-problema em estudo ou a matemática necessária para a solução do problema, de forma geral, “precisa transcender a situação do mundo em que um problema é formulado, convertendo esta situação na estrutura organizada em linguagem matemática” (Almeida, 2018, p. 19). Para Galbraith (2012), a ação de matematizar se associa à formulação de hipóteses e definição de variáveis que subsidiam a construção do modelo matemático. Borrromeo Ferri (2018) assevera que, conforme os alunos avançam no desenvolvimento da atividade de modelagem, a matematização vai se aperfeiçoando, alicerçada em conhecimentos extra matemáticos sobre a situação-problema em estudo.

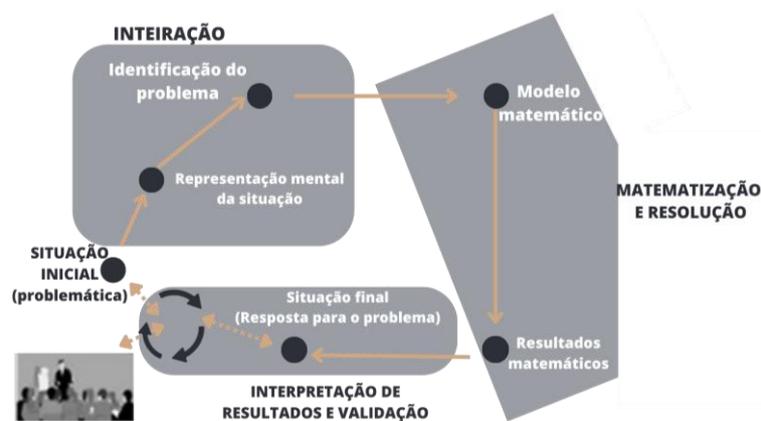


Figura 1. Ciclo de Modelagem Matemática, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012)

A *resolução* consiste na construção de um modelo matemático, uma representação matemática para o que se está investigando, a fim de “analisar aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação” (Almeida et al., 2012, p. 16).

A *interpretação dos resultados* e a *validação* implicam na análise da solução obtida para a situação-problema, a partir do modelo matemático construído, validando ou não a abordagem matemática desenvolvida. Uma ação que pode ser empreendida para subsidiar essas fases é a comunicação dos resultados entre os pares, em que os alunos utilizam argumentações, explicam os procedimentos que utilizaram de modo a convencer os demais que a resposta é coerente com a situação-problema em estudo e com o problema de modelagem formulado.

De acordo com Almeida e Silva (2021, p. 5) “a finalidade do ciclo associa-se então à intenção de apresentar uma versão idealizada do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática no sentido de caracterizar um encaminhamento padrão para essas atividades”. Por mais que existam ciclos de modelagem matemática, os mesmos possibilitam o livre transitar entre as fases. Almeida e Silva (2021), ponderam que

amplamente reconhecida, a estruturação de ciclos de modelagem, além de se propor a indicar possíveis etapas para o desenvolvimento destas atividades, também dá destaque à não linearidade das ações dos modeladores. Ou seja, os

ciclos pretendem incluir o aspecto de que idas e vindas entre as diferentes etapas são recorrentes e relevantes para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática (Almeida & Silva, 2021, p. 5).

Para Scheneider et al. (2021), quando são evidentes “idas e vindas” entre as fases da atividade de modelagem matemática, podem ser reconhecidas as rotas de modelagem percorridas. Contudo, as rotas de modelagem são aparentes quando, no processo cíclico, há associações não lineares entre as fases. Além disso, pode acontecer alguma fase parecer mais proeminente enquanto outra parece estar ausente.

Conforme sugere Borromeo Ferri (2018), os ciclos para além de um esquema teórico que caracteriza uma atividade de modelagem matemática, são também instrumentos de aprendizagem para os alunos e instrumentos de diagnóstico para os professores. De modo a estabelecer um “diagnóstico” sobre a aprendizagem dos alunos, nos debruçamos sobre o ciclo de modelagem e trazemos um diálogo com a literatura relativamente aos componentes da aprendizagem (Pinilla, 2010), de modo a evidenciar os diferentes tipos de aprendizagem proporcionados em uma atividade de modelagem.

Os sujeitos e o contexto da pesquisa

A investigação reportada no presente artigo está subsidiada em uma pesquisa empírica na qual uma atividade de modelagem foi desenvolvida por 19 alunos de uma turma do 8.º ano do Ensino Fundamental em aulas de Matemática de uma escola da rede privada, de um município brasileiro localizado no estado do Paraná.

As escolas da rede privada, de modo geral, fazem uso de material didático apostilado em que os conteúdos se apresentam de forma linear e sequencial, em que o professor deve discutir os conteúdos e solicitar a resolução das tarefas. Em muitos casos, a equipe gestora solicita fortemente que os professores cumpram com todo o conteúdo do material. Neste sentido, implementar práticas de modelagem tem se tornado um desafio para os professores dessa rede de ensino.

Todavia, a professora (segunda autora deste artigo), vislumbrando implementar uma atividade de modelagem na turma do 8.º ano e considerando não alterar em demasia os encaminhamentos das aulas organizadas segundo o material didático utilizado pela escola, recorreu a uma situação real com a intenção de abordar conceitos de Geometria, unidades de medida e proporções, visto que seriam conteúdos curriculares a abarcar. Além disso, considerou que a temática - *Reforma da quadra*¹ - era relevante no contexto em que os alunos estavam inseridos, visto que a quadra poliesportiva da escola apresentava degradação aparente, como rachaduras na parede (Figura 2a) e necessidade de pintura em paredes e chão da quadra (Figura 2b).

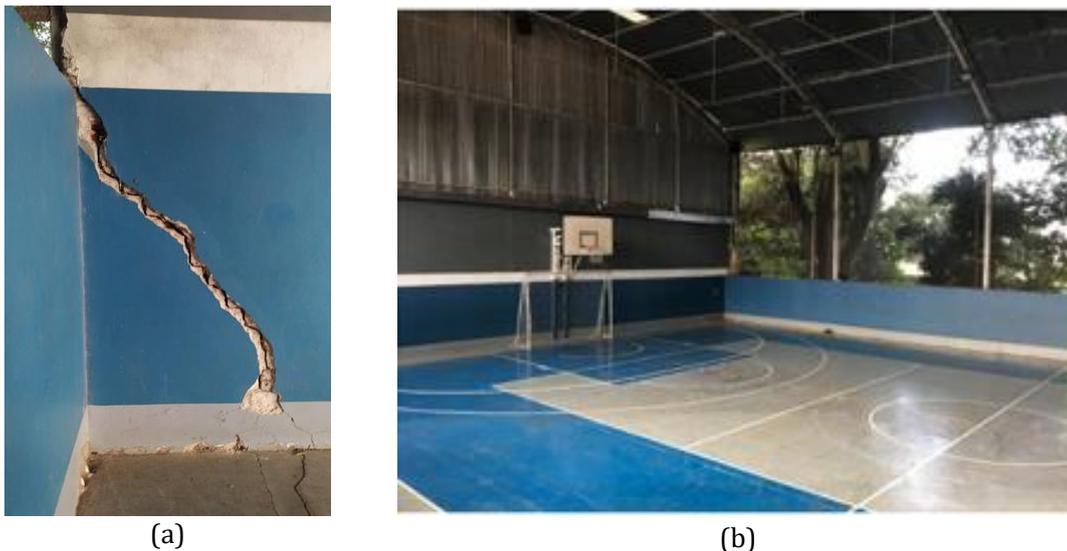


Figura 2. Quadra poliesportiva da escola

Vale destacar que a escolha do tema para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pode ser prerrogativa do professor, desde que contemple as características da atividade. Durante uma conversa com a turma sobre a possibilidade de estimar o valor a ser investido para reformar a quadra, os alunos, orientados pela professora, elencaram os locais que necessitavam de reforma. O chão, o telhado, a lateral e a arquibancada foram os locais da quadra indicados pelos alunos e listados na lousa. Considerando essa listagem, cada um dos alunos informou qual gostaria de investigar para o desenvolvimento da atividade, constituindo quatro grupos, formados por 4 ou 5 integrantes (conforme a Tabela 1). Os alunos foram nomeados por A1, A2,..., A19, seguindo a ordem alfabética.

Tabela 1. Composição dos grupos e aspectos da reforma da quadra investigados

Aspectos da reforma	Grupo	Integrantes
Reforma do chão	Grupo 1	A6, A8, A15, A19
Reforma do teto	Grupo 2	A2, A4, A7, A13, A14
Reforma da lateral	Grupo 3	A3, A9, A11, A17, A18
Reforma da arquibancada	Grupo 4	A1, A5, A10, A12, A16

O desenvolvimento da atividade ocorreu em cinco aulas de 50 minutos cada, distribuídas entre os dias 28 de abril a 05 de maio de 2022. Além das aulas regulares, os alunos organizaram grupos no aplicativo WhatsApp, incluindo a professora, de modo a trocarem informações que encontravam em pesquisas pelas quais se responsabilizavam ou mesmo sobre algum encaminhamento que pudessem empreender para o desenvolvimento da atividade.

A equipe diretiva da escola e os pais dos alunos autorizaram o desenvolvimento da atividade de modelagem pela professora, mediante assinatura de um termo de consentimento livre e esclarecido que garantia o sigilo na identificação dos alunos.

A coleta e a análise dos dados

O processo analítico em que nos embasamos leva em consideração os dados coletados no desenvolvimento da atividade, em que foram utilizadas gravações das aulas e registros escritos produzidos pelos alunos, tanto no ambiente escolar quanto nos grupos criados no aplicativo *WhatsApp*. As gravações foram transcritas na íntegra de modo a manter a fidedignidade dos dados. Os gestos e expressões dos alunos foram descritos entre colchetes quando indicavam indícios de aprendizagem.

Para a análise dos dados, seguimos o paradigma de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), cuja análise interpretativa dos dados é descritiva e se fundamenta no quadro teórico do artigo, visando apresentar indicativos dos tipos de aprendizagem nas várias fases do ciclo de modelagem. De modo a auxiliar nossa análise, nos respaldamos em indicadores prévios que permitissem reconhecer, nos dados, cada um dos componentes da aprendizagem – conceitual, algorítmica, estratégica, comunicativa e semiótica – conforme Tabela 2.

Ao longo do artigo, os excertos que subsidiaram as evidências dos tipos de aprendizagem proporcionados pela atividade de modelagem de cada grupo são apresentados em tabelas. Trata-se de recortes que consideramos ilustrativos para o que evidenciamos. Dados mais detalhados estão disponíveis na dissertação de mestrado da segunda autora (Trindade, 2023).

Tabela 2. Indicadores de identificação dos componentes da aprendizagem

Componente da aprendizagem	Indicadores
Aprendizagem conceitual	Referência a um conceito matemático evidenciado no sistema semiótico escolhido pelos alunos.
Aprendizagem algorítmica	Apresentação de algoritmos corretos para resolver cálculos, aplicar fórmulas ou desenhar figuras por meio de instrumentos adequados.
Aprendizagem estratégica	Uso de procedimentos e estratégias para a busca de uma solução para o problema.
Aprendizagem comunicativa	Expressão de ideias matemáticas por meio da linguagem visual, oral ou gestual, argumentando de forma correta.
Aprendizagem semiótica	Uso de diferentes representações e transformações de sistemas semióticos para o(s) objeto(s) matemático(s).

Descrição e análise da atividade de modelagem matemática

Defronte da problemática da *Reforma da quadra*, os alunos se mantiveram animados com a oportunidade de desenvolver uma atividade em que as aulas aconteceriam de uma forma bem diferente das ditas aulas ‘expositivas’. Investigar e resolver um problema da realidade

por meio de modelos matemáticos despertou o interesse dos alunos, sendo que alguns até se denominaram “engenheiros e arquitetos”. Neste sentido, para alguns alunos, a temática, de certo modo, se associou a possibilidades para “suas futuras profissões ou áreas de estudo” (Niss & Blum, 2020, p. 28). O problema definido pela professora foi: *Qual o custo para reformar a quadra poliesportiva da Escola?* Nos tópicos subsequentes, apresentamos os empreendimentos de cada grupo.

Grupo 1 - Reforma do chão

O grupo 1 iniciou a investigação, delimitando os dados necessários para resolver a questão. Com isso, indicaram inicialmente a necessidade da pintura e sobreposição do piso da quadra com cimento. Os alunos sentiram a necessidade de demarcar a área a receber a reforma, conforme transcrições a seguir:

- A6: Nós só temos régua [segurando uma régua de 30 cm]. Não vai ser suficiente para medir essa quadra toda! [indicando a quadra]
A8: Eu tenho aquele negócio que você puxa e parece uma régua gigante... [gesticula indicando o movimento da trena]
A6: A trena!
A15: Dá pra usar o Google Earth também.
A8: Vamos tentar medir e se a gente não conseguir, a gente tenta outra coisa. O relógio do A4 dá para usar para medir também, mede passos e distância.

A busca por dados quantitativos relativos às dimensões da quadra permitiu aos alunos expressarem os instrumentos que poderiam utilizar, como trena e dispositivos tecnológicos, como o Google Earth ou o relógio de um colega de outro grupo.

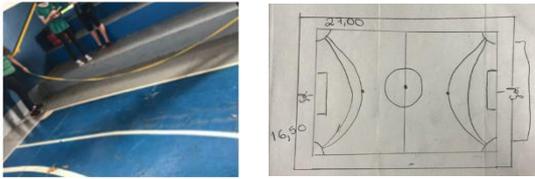
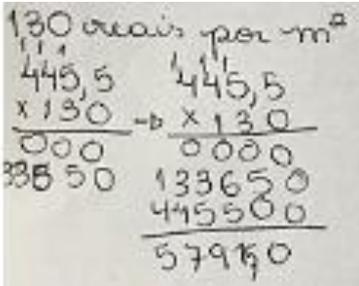
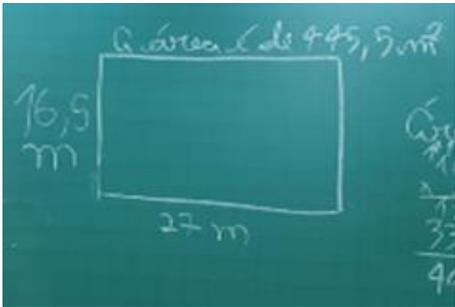
Na inteiração, por meio das ações relativas à medição, podemos evidenciar as aprendizagens conceitual, estratégica e comunicativa. A aprendizagem conceitual se caracterizou quando os alunos associaram as medições ao cálculo da área da quadra, ao mesmo tempo que buscaram por instrumentos de medidas e aplicativos para auxiliar na coleta de dados (aprendizagem estratégica). Ambas as aprendizagens se efetivaram devido à comunicação estabelecida entre os integrantes do grupo, englobando as maneiras utilizadas para descrever conhecimentos matemáticos e expressar seus argumentos.

No que diz respeito à cobertura do chão com cimento e pintura, os alunos transformaram os dados coletados por meio das medições em um esquema figural e destacaram outras informações, como o preço da tinta, do cimento e do corante. Trata-se da matematização, em que a aprendizagem algorítmica foi salientada quando os alunos transcreveram as informações obtidas com uso de instrumentos de medidas, e também ao efetuarem os cálculos para obter a área ocupada pela quadra de $445,5 \text{ m}^2$. Na Tabela 3 apresentamos uma síntese do desenvolvimento da atividade.

Considerando, por hipótese, a área obtida para a quadra, a resolução foi subsidiada pelo uso de proporcionalidade para a obtenção da quantidade de materiais necessária para a

pintura (três corantes, 18 litros de tinta branca) e a quantidade de cimento (445 sacos de cimento). O cálculo proporcional foi baseado em informações obtidas por meio de pesquisas em sites da internet. Tais ações revelaram estratégias e conceitos produzidos pelos alunos para a obtenção de uma solução para o valor da reforma do chão (R\$58978,00).

Tabela 3. Síntese do desenvolvimento da atividade do Grupo 1 – Reforma do chão

Componente da aprendizagem	Evidências nos dados coletados na pesquisa	Características evidenciadas
Estratégica	 <p>Registro disponibilizado no aplicativo WhatsApp a partir de dados coletados via Google Earth.</p>	A aprendizagem estratégica é evidenciada quando os procedimentos e estratégias para resolver um problema têm maior importância, o que acontece quando procuram por instrumentos, aplicativos, que os auxiliem nas medições.
Conceitual	 <p>Alunos coletando dados e registro figural da quadra.</p>	A aprendizagem conceitual se caracteriza quando os alunos fazem as medições para calcular a área da quadra. Quando eles têm condições de identificar propriedades de um conceito, de representá-lo e fazer transformações.
Algorítmica		A aprendizagem algorítmica é evidenciada quando o aluno demonstra ter habilidades para efetuar as operações. Neste caso, com cálculos e uso de instrumentos de medição, como: régua, trena. Aplicação de proporcionalidade direta.
Comunicativa		À medida que os alunos comunicam/expressam suas ideias matemáticas e as justificam a partir de representações adequadas (fala, desenhos, figuras, gestos) podemos evidenciar a aprendizagem comunicativa. Na última fase da atividade, o grupo apresentou seus resultados para a turma.

Na comunicação dos resultados para os colegas da turma, o grupo expôs a solução do problema na lousa. A aprendizagem comunicativa foi evidenciada como a “capacidade de exprimir ideias matemáticas, justificando, argumentando, demonstrando e representando de maneira visual com figuras, de modo eficaz” (D’Amore et al., 2015, p. 167).

As informações apresentadas na comunicação dos resultados não constavam explicitamente dos registros escritos entregues pelos alunos. Portanto, esse momento se configurou também como uma validação e interpretação dos resultados, em que os alunos usaram novas ferramentas de comunicação para expor as etapas da sua resolução. Por meio da comunicação, os alunos necessitaram “expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos, apresentar e justificar suas escolhas baseadas em argumentos racionalmente fundamentados, reconhecer que a situação requer alguma subjetividade” (Almeida et al., 2012, p. 19).

Grupo 2 - Reforma do teto

O Grupo 2, no âmbito das aulas, não havia identificado meios para resolver o problema relativo à reforma do teto. Os integrantes desse grupo apresentaram dificuldades em chegar a um consenso para delimitar o que iriam investigar, conforme excerto transcrito a seguir:

- A7: Para começo de conversa, uma coisa que a gente tem que pôr naquele teto é meio que um negócio que quando você chutar as bolas não vai prender, porque muitas daquelas bolas ficam presas no teto, tem até uma bola laranja.
- A2: Outra coisa, tem que tampar o teto pra não ter negócio de pingar porque sempre tá pingando chuva quando chove.
- A7: A gente vai precisar, provavelmente, de materiais de construção.
- A2: Será que a gente pinta aquele teto todo, porque eu acho que precisa.
- A14: Olha eu acho que a gente tinha que trocar o teto todo.

Na transcrição supracitada, podemos evidenciar que o aluno A7 se atentou para as grades superiores da quadra, o aluno A2 cogitou tapar os buracos por causa das goteiras e também pintar o teto, enquanto o aluno A14 sugeriu trocar o teto todo. Levando em consideração a inconstância sobre o que investigar, entre uma aula e outra da disciplina, os integrantes do grupo iniciaram a negociação a partir de comunicação estabelecida via WhatsApp.

O uso do WhatsApp foi muito importante para dar prosseguimento à atividade, de modo que os integrantes do Grupo 2 eram mais comunicativos por meio dessa rede social do que durante as aulas. Foi possível perceber que até quando estavam em ambiente escolar usavam o grupo para registrar encaminhamentos matemáticos e resultados obtidos.

Durante a coleta *in loco*, os integrantes do Grupo 2 concordaram em trocar o teto, como sugerido por A14. A inteiração com os dados qualitativos, no caso, as escoriações no teto, de certo modo, convenceram os integrantes a optar por uma escolha em detrimento das outras. A participação dos integrantes do grupo para a definição do que investigar delineou “um tipo de ação e uma forma de pertencimento” (Wenger, 2013, p. 248) entre eles.

Diante da escolha, um procedimento seria necessário: *como medir as dimensões do teto?* Os alunos, de imediato, decidiram que poderiam considerar as dimensões do chão sobre a

quadra, pois se tivessem a área a ser coberta conseguiriam obter as medidas para a troca do teto. Dessa forma, estavam convencidos de que uma simplificação se fazia necessária para que os encaminhamentos fossem deliberados. Porém, não levaram instrumentos para efetuar as medições, pelo que o aluno A7 sugeriu usar as medidas dos pés.

Ao considerarem as dimensões do chão a ser coberto, bem como o uso dos pés como medida não-convencional, mas que poderia resolver o impasse da falta de instrumentos de medida, revelou-se a aprendizagem estratégica. Tal ação de busca de uma solução para o impasse gerado é um processo que “ocorre na maioria das vezes dentro do aluno que o resolve, pois, as demandas podem ser significativas (facilitações, sugestões, etc.) quando direcionadas ao sujeito que o resolve” (Pinilla, 2010, p. 96). Ao externalizar a ação, por meio de signos, o aluno A7 mobilizou os colegas para a obtenção das medidas da quadra.

O grupo determinou que a quadra tem 98 passos de comprimento e 55 passos de largura. Considerando como hipótese que cada passo mede 28 cm (tamanho do pé do aluno A7), por meio da multiplicação, determinaram que a quadra tem 2744 cm de comprimento por 1540 cm de largura. Esse encaminhamento revelou a aprendizagem algorítmica a partir da escrita matemática que os alunos utilizaram para representar suas interpretações. A partir da hipótese do tamanho do pé, os alunos configuraram um modelo matemático que associou medidas não-convencionais com medidas convencionais, de modo que os alunos aperfeiçoaram a matematização da situação (Borromeo Ferri, 2018).

Com os dados coletados e com a transformação das medidas não-convencionais para as convencionais, os alunos deram sequência à resolução da atividade com o cálculo da área. Entretanto, ao analisarmos os diálogos entre os integrantes do grupo, evidenciamos dificuldades no conceito de área, sendo necessária a intervenção da professora de modo a evitar uma concepção errônea:

- A2: Têm que descobrir o metro quadrado, né?
 A7: Se eu não me engano, o metro quadrado é só fazer o metro vezes ele mesmo, não é?
 A2: Então é tipo a gente fazer 27×27 que vai dar o metro quadrado, depois a gente faz o resultado vezes 330, que aí vai dar o preço.
 A7: Eu fiz um esqueminha aqui [apontando para uma representação figural registrada na folha de papel], mas tá complicado!
 [...]
 A7: Acho que não, acho que é o 27 vezes 15.
 Professora: Isso mesmo! É o produto entre as duas dimensões da quadra, largura e comprimento.
 A7: Fizemos errado!

As representações aritméticas, às vezes, escondem por trás a mecanização no uso de uma determinada representação algorítmica sem a compreensão do motivo de seu uso. Convergindo com essa ideia, Pinilla (2010, p. 86) afirma que, às vezes, “os algoritmos levam a confundir aritmética com geometria”. Portanto, é importante que o professor esteja atento

para intervir e questionar os alunos para a construção de conceitos da maneira adequada, conforme excerto:

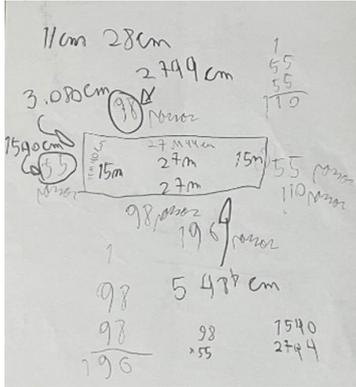
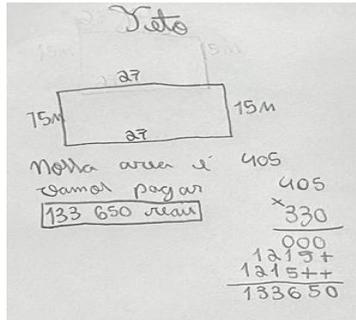
- A2: A14, eu fiz a minha lógica aqui, e ficou muito caro, ficou 240 mil, eu acho que tá errado, porque ficou “muuuuito” caro, eu não esperava que ia ficar isso.
- A14: Eu fiz 15×27 e o resultado vezes 330, porque 330 é o tanto que custa cada metro quadrado, né?
- A13: Acho que você multiplicou errado, você só precisa fazer uma vez 15×27 , porque a professora mostrou que a área faz só a multiplicação dos lados uma vez e não precisa fazer quatro vezes.
- A2: Gente, a professora tá no grupo, a gente pode perguntar se ficou certo [...]
- Professora: Meninos, vamos pensar juntos mais uma vez! O que é a área? Para que vocês estão procurando a área da quadra?
- A7: É o espaço que a quadra tá.
- Professora: Muito bom! É o espaço ocupado. Se eu fizesse vários quadradinhos de mesma medida na quadra, como eu faria para descobrir a área? Lembrem lá do sexto ano...
- A2: A gente pode somar todos pra ver quanto que tem.
- Professora: Se fossem milhares de quadradinhos, será que somar seria a melhor maneira?
- A2: Ah tá, agora eu entendi, por isso que multiplica um lado pelo outro, tipo pra ver quantos quadradinhos têm!
- Professora: Muito bom! Para calcular a área, multiplicamos largura pelo comprimento.

A primeira intervenção da professora não foi suficiente para que o aluno A2 compreendesse o conceito de área, porém ele reconheceu que para a situação em estudo, o valor calculado estava incoerente. De modo a esclarecer esse equívoco, a professora fez outra abordagem no grupo do WhatsApp em que os alunos se comunicavam regularmente. Com as intervenções da professora e o diálogo entre os membros do grupo, os alunos retomaram o conteúdo estudado no 6.º ano e fizeram modificações nos registros que haviam apresentado de modo a organizar a estratégia para a resolução do problema relativo à troca do teto.

A partir da área aproximada (405m^2) e um orçamento obtido com uma empresa especializada da cidade de São Paulo, em que obtiveram o valor de R\$330,00 (trezentos e trinta reais) por metro quadrado de telha, o total obtido pelos alunos para a reforma do teto foi de R\$133650,00. Na Tabela 4 apresentamos uma síntese do desenvolvimento da atividade.

Os alunos chegaram ao valor obtido (R\$133650,00) para a reforma do teto, visto que estavam considerando somente as telhas, tendo percebido que as medidas da quadra poliesportiva da escola ($15\text{m} \times 27\text{m}$, medidas aproximadas que calcularam) estavam próximas dos valores oficiais ($16\text{m} \times 27\text{m}$) que encontraram em sites da internet. No entanto, o valor da metragem de telha (R\$ 330,00) justificou o fato de a direção da escola ainda não ter executado a reforma desse local da quadra.

Tabela 4. Síntese do desenvolvimento da atividade do Grupo 2 – Reforma do teto

Componente da aprendizagem	Evidências nos dados coletados na pesquisa	Características evidenciadas
Estratégica e Comunicativa	A2: O A7 fez os passos, deu 98 o de cima e o lado deu 55 passos, daí a gente transformou. Para transformar, a gente teve que medir o pé do A7, que deu 28 centímetros, aí a gente fez 28 vezes 55 que é o tanto de passos que ele deu e vezes 98, que de 55 ficou 1540 centímetros e de 98 ficou 2744 centímetros.	A aprendizagem estratégica é evidenciada quando os alunos se dedicaram a conseguir as dimensões da quadra, usando medidas não-convencionais. A transcrição foi feita a partir de um áudio encaminhado no WhatsApp, usado para traduzir o que haviam pensado, o que revela a aprendizagem comunicativa.
Algorítmica		A aprendizagem algorítmica se fez presente no uso da linguagem matemática para transcrever a linguagem natural. Após a interpretação da situação-problema, os alunos fizeram seus registros e cálculos. Mesmo que, aparentemente, não haja uma organização dos registros, podemos evidenciar que, a partir de uma figura, os alunos indicaram as medidas e calcularam a área.
Conceitual		A aprendizagem conceitual se caracteriza quando os alunos indicam a construção do conceito de área e de proporcionalidade. Após medirem a quadra, usando os passos, fizeram uma nova representação revelando compreender o uso do cálculo da área; entretanto, antes fizeram algumas interpretações errôneas.

Num momento de discussão com a turma, os alunos do Grupo 2 puderam expor a resolução da atividade e relatar as estratégias utilizadas, bem como a validação que consideraram, por meio do acesso ao portal da transparência da prefeitura de Londrina, em que valores da reforma do teto de uma quadra poliesportiva do município foram disponibilizados.

Grupo 3 - Reforma da lateral

O grupo 3 iniciou a investigação, fazendo pesquisas em sites do Google, procurando por lugares em que poderiam comprar os materiais para a reforma da lateral da quadra, além de organizar os dados obtidos para a pintura e troca de telas:

- A18: A gente precisa fazer algumas coisas, pintar, tampar os buracos e trocar a tela.
- A9: Podemos ir naquela loja do Shopping perto da Escola, para ver quanto custa a tinta.
- A17: Onde a gente vai encontrar a tela?
- A10: Gente, primeiro temos que calcular para saber quanto comprar!
- A11: A tinta primeiro, né?

- A18: Não, cimento.
 A11: Quanto de pacote dá?
 A18: Um deve dar.
 A10: Usa o que sobrar dos outros.
 A11: Vamos ver a tinta.

No diálogo entre os integrantes do grupo, podemos evidenciar a aprendizagem estratégica, à medida em que os alunos vislumbraram usar produtos de outros grupos para a obtenção de uma solução coletiva para o problema, tal como o aluno A10 entendeu que as investigações se complementavam, ao afirmar: *Usa o que sobrar dos outros*.

Para dar continuidade às investigações, os alunos iniciaram a coleta de dados quantitativos. Entretanto, um primeiro impasse se configurou: *obter a altura e as laterais da quadra*. Como a quadra não era cercada totalmente por telas, visto que tinha também a arquibancada, os alunos tiveram que separar as laterais. Com o auxílio de representações figurais para representar as áreas laterais, o grupo calculou a área das paredes laterais sem tela e, em seguida, a área da parede oposta à arquibancada, cuja parte superior é fechada com tela. Trata-se de procedimentos estratégicos que os alunos objetivaram encaminhar para matematizar a situação.

Além de considerar a estratégia de estudar especificamente cada lateral da quadra, os alunos desenvolveram estratégias para estimar a medida da parte superior, considerando que os instrumentos que tinham não seriam suficientes para medir as dimensões das telas. Então, decidiram usar um pilar lateral da quadra como medida de referência, para que assim pudessem encontrar dimensões aproximadas, conforme o excerto:

- Professora: Como vocês vão fazer para descobrir a altura?
 A3: A gente vai descobrir mais ou menos quanto tem de altura o pilar de ferro e diminuir o um e noventa [referindo-se à medida de 1,90m da arquibancada].
 Professora: Gostei que vocês estão buscando relações da parte de baixo com o pilar.

As aprendizagens estratégica e comunicativa estiveram presentes nas ações dos alunos, neste momento, no modo como buscaram por maneiras plausíveis para solucionar o problema, discutiram sobre suas abordagens e desenvolveram estratégias em conjunto. Os alunos não conseguiram medir uma parte do pilar com a trena, então por meio de proporções, determinaram a altura de 4,8m. Considerando por hipótese, que essa medida representava a altura do pilar, obtiveram a área com tela para a reforma dessa lateral: 218,23m².

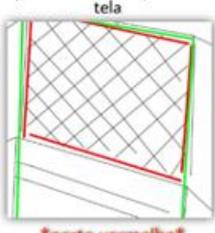
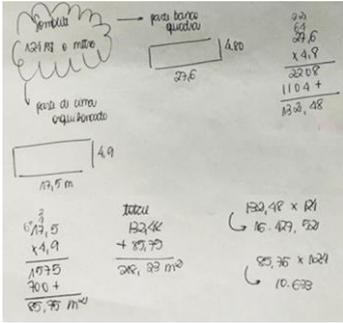
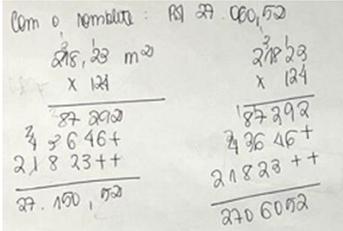
Com as informações matematizadas, bem como considerando os valores pesquisados em um shopping localizado próximo à escola, os alunos encaminharam a resolução, calculando o espaço necessário para cobrir com tela e os que seriam pintados, fazendo uso de desenhos para representá-los, bem como indicar suas dimensões. Essas ações mobilizaram a aprendizagem conceitual, em que os alunos identificaram propriedades de um conceito que indicaram, representaram e utilizaram da maneira correta.

Na resolução, os alunos obtiveram uma solução para o problema, concluindo que a reforma lateral custaria R\$27590,52, como indica a Tabela 5, que traz uma síntese do desenvolvimento da atividade.

Na comunicação dos resultados para a turma, os alunos mencionaram o termo *sombrite*, subsidiando questionamentos pelos colegas da turma, em busca de esclarecimentos:

- A2: O que é sombrite?
 A17: É aquela tela que fica na lateral da quadra.
 A6: Vocês calcularam a área também ou só a tela?
 A3: O sombrite e a área da parede.

Tabela 5. Síntese do desenvolvimento da atividade do Grupo 3 – Reforma da lateral

Componente da aprendizagem	Evidências nos dados coletados na pesquisa	Características evidenciadas
Comunicativa e Estratégica	<p>A10: Gente, primeiro temos que calcular para saber quanto comprar. A11: A tinta primeiro, né? A18: Não, cimento. A11: Quanto de pacote dá? A18: Um deve dar. A10: Usa o que sobrar dos outros.</p>	<p>A aprendizagem comunicativa é evidenciada conforme os alunos expressam suas ideias matemáticas e as justificam, neste caso, estão organizando as ideias para então iniciar a resolução. Criar estratégias que evidenciam a importância do processo para que assim desenvolvam a atividade, caracteriza a aprendizagem estratégica.</p>
Estratégica	<p>lugares que podemos comprar:</p>  <p>tela</p>  <p>*parte vermelha*</p> <p>Os lugares para a compra dos materiais foram pesquisados em sites da internet e disponibilizados no relatório do grupo.</p>	<p>A aprendizagem estratégica é revelada na fase de inteiração com a situação-problema e é caracterizada durante esse processo de investigação, considerando que as ações antes da resolução do problema são significativas dado que formam todo um processo.</p>
Conceitual		<p>Com auxílio de instrumentos de medida, os alunos puderam construir e representar conceitos através de desenhos e registros algébricos. Como a quadra poliesportiva não tinha regularidade em suas paredes laterais, os alunos efetuaram os cálculos por partes, indicando nos desenhos as paredes laterais sem grade e o lado oposto, a arquibancada, cuja parte superior tem grade.</p>
Algorítmica		<p>Ao calcular a área para pintura e a cobertura com tela, de acordo com os dados pesquisados, os alunos finalizaram a resolução da atividade, evidenciando a aprendizagem algorítmica.</p>

Por meio da comunicação, os alunos revelaram aprendizagem com relação a termos técnicos presentes no contexto que estavam investigando. Além disso, por meio da comunicação, puderam expor seus resultados, indicando principalmente como fizeram as medições, que tiveram de ser consideradas por aproximações, já que a quadra poliesportiva da escola tem características distintas para cada uma de suas laterais.

Embora o grupo não tenha confrontado os dados calculados com algum orçamento real, entenderam que os valores encontrados poderiam se aproximar da realidade, devido, sobretudo, às abordagens realizadas pelos demais grupos.

Grupo 4 - Reforma da arquibancada

Os alunos do grupo 4, considerando os elementos presentes em uma arquibancada, listaram necessidades de reformas, como corrimão, cadeiras, tinta, cimento e, para isso, dividiram o trabalho entre os integrantes do grupo, de modo que cada um ficou responsável por pesquisar dados de um dos itens. Embora tais elementos fossem essenciais na arquibancada e até melhorariam o conforto dos usuários, um dos integrantes do grupo relatou que não adiantava inserir esses itens antes de considerar o aspecto básico, conforme excerto:

- A12: Mas primeiro a gente não tem que reformar?
 A10: Sim, vamos ter que pensar nisso. Consertar tudo isso.

Podemos evidenciar que, neste momento, os alunos estavam criando estratégias para a resolução da atividade. Com a decisão de determinar o valor utilizado para a pintura da arquibancada, os alunos iniciaram as medições em um diálogo com a professora, explicando como fariam:

- A16: A gente tem que ver quantos litros de tinta precisaria para cada metro.
 Professora: Metro?
 A16: É, tipo, a gente tem que medir e ver quanto precisa.
 Professora: Olha, se eu pegar essa trena, medir um metro, vejam, é isso que tenho que pintar? Essa "linha"?
 A18: Não faz sentido!
 Professora: Isso aqui é um metro, quando vou pensar na quantidade de tinta para determinado espaço, tenho que [A12 interrompe].
 A12: Metro quadrado. Área.

A aprendizagem algorítmica se fez presente no excerto supracitado pois os alunos raciocinaram antes de executar os cálculos, o que acabou eliminando cálculos não oportunos para a resolução. Além disso, ao estruturarem ideias, explicitando procedimentos para a resolução do problema, a aprendizagem estratégica e a aprendizagem comunicativa foram evidenciadas nas ações dos alunos.

Para a coleta de dados, os alunos mediram a altura de cada degrau e por meio de registros escritos e desenhos, organizaram-nos, revelando características da aprendizagem estratégica. Um dos integrantes do grupo questionou sobre a necessidade de medir cada degrau:

- A1: Gente, tem quatro degraus! Vamos medir todos? Temos uma fita métrica.
A16: Vamos pedir a trena emprestada.
A5: A gente mede a altura desde lá de cima?
A16: Não, gente. A gente tem que medir cada um.

O aluno A16 sentiu a necessidade de medir cada degrau, pois eles não mantinham a mesma altura. Em uma primeira resolução, os alunos não se atentaram em fazer mudanças de unidade de medidas necessárias para os cálculos, chegando a equívocos na resolução. O grupo, então, refez seus cálculos, obtendo $75,06\text{m}^2$ de área da arquibancada a ser pintada. Ao analisar os cálculos, compreendê-los e encontrar equívocos, revelou-se a aprendizagem algorítmica.

Com a medida da área a ser pintada e o resultado da pesquisa sobre o valor e o rendimento de uma lata de tinta de 3,6 litros, os alunos concluíram que para a pintura da arquibancada, considerando somente a tinta, seria necessário um investimento de R\$140,12, conforme a síntese apresentada na Tabela 6.

Na comunicação dos resultados para os colegas, os integrantes do grupo reconheceram que para a pintura, além da tinta, era preciso considerar outros materiais, bem como a mão de obra. Além disso, desconsideraram fazer algum reparo anterior na arquibancada. Trata-se de uma abordagem simplificada do que seria necessário para reformar a arquibancada.

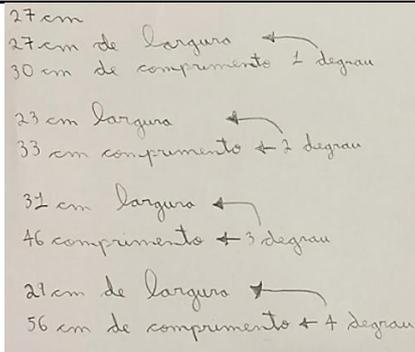
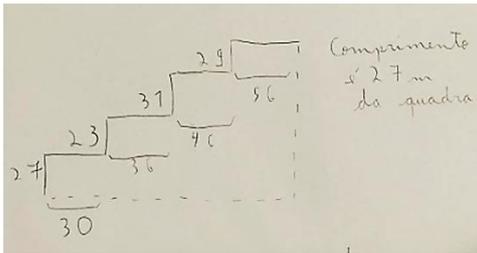
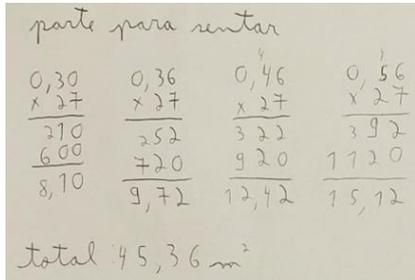
Evidências dos componentes da aprendizagem

A partir de uma situação que entendemos ser de interesse dos alunos, a professora sugeriu colocá-los em ação para resolver um problema – a reforma da quadra poliesportiva da escola. Com essa temática, a professora buscou “as conexões da Matemática com a realidade que nos envolve” (Carreira, 2010, p. 1). Os grupos, cada um responsável por um local a ser reformado da quadra, buscaram encaminhamentos para a obtenção de uma solução para o problema. As soluções, em certa medida, apresentaram simplificações de modo que um olhar para materiais específicos – cimento e tinta para a reforma do chão, telhas para a reforma do teto, tinta e tela para a reforma da lateral e tinta para pintura da arquibancada – demandou uma abordagem por cada um dos grupos.

De modo geral, a atividade mobilizou todos os alunos da turma do 8º ano durante cinco aulas de 50 minutos cada, além das conversas extra-classe possibilitadas pelo aplicativo WhatsApp. Porém, devido às interações entre os integrantes do grupo e também com a professora, algumas abordagens foram mais aprofundadas em detrimento de outras. Isso mostra que alguns grupos se envolveram com mais afinco no desenvolvimento da atividade do

que outros. Porém, há a considerar que, mesmo na abordagem simplista do grupo 4, revelaram-se tipos de aprendizagens em suas ações. O que podemos conjecturar é que esse grupo necessitaria de uma atenção maior por parte da professora para aprimorar o desenvolvimento da atividade de modelagem e apresentar resultados mais próximos do real.

Tabela 6. Síntese do desenvolvimento da atividade do Grupo 4 – Reforma da arquibancada

Componente da aprendizagem	Evidências nos dados coletados na pesquisa	Características evidenciadas
Comunicativa e Estratégica	 <p>27 cm 27 cm de largura ← 30 cm de comprimento ← 1 degrau</p> <p>23 cm largura ← 33 cm comprimento ← 2 degrau</p> <p>31 cm largura ← 46 comprimento ← 3 degrau</p> <p>27 cm de largura ← 56 cm de comprimento ← 4 degrau</p>	<p>Para abordar a largura e o comprimento, os alunos organizaram os dados, o que caracteriza a aprendizagem estratégica, quando procedimentos e estratégias se tornam importantes para a resolução do problema. A aprendizagem comunicativa fica evidente quando expressam as ideias matemáticas por meio de um esquema.</p>
Comunicativa e conceitual	 <p>Comprimeto de 27 m do quadra</p>	<p>Os alunos organizaram os dados coletados por meio de desenhos e esquemas, evidenciando as aprendizagens comunicativa e conceitual, ao justificar os conceitos construídos com as representações figurais. Os alunos fizeram o uso do WhatsApp para auxiliar na troca de informações.</p>
Algorítmica	 <p>parte para sentar</p> <p>0,30 0,36 0,46 0,56 x 27 x 27 x 27 x 27 ----- 210 252 322 392 600 720 920 1120 ----- 8,10 9,72 12,42 15,12</p> <p>total 45,36 m²</p>	<p>A aprendizagem algorítmica é evidenciada nos cálculos feitos para determinar a área dos degraus da arquibancada, quantidade de tinta e valor estimado para a reforma.</p>
Estratégica	 <p>Tinta Paredes Rende Muito... RS 140,12 Mercado Livre</p> <p>Tinta Acrílica Chega De Mof... RS 40,73 Tintas Virginia</p> <p>Tinta Pare RS 4 Merc</p>	<p>Para estimar o valor da pintura, considerando somente a tinta, os alunos fizeram uma busca em sites, o que evidencia a aprendizagem estratégica.</p>

A atividade de modelagem forneceu espaço para que os alunos interpretassem o problema e fizessem escolhas no seu processo de resolução (Bliss & Libertini, 2016). É de considerar que, em se tratando de uma atividade que havia sido previamente planejada pela professora, os encaminhamentos seguiram as fases do ciclo de modelagem e diante das

ações dos alunos, os componentes da aprendizagem – algorítmica, estratégica, conceitual, comunicativa e semiótica – foram evidenciados.

Na inteiração, as aprendizagens conceitual, estratégica e comunicativa foram evidenciadas por meio da tomada de decisão por parte dos integrantes do grupo, que tiveram de entrar em um consenso sobre o que iriam considerar na sua investigação, pesquisaram informações sobre tipos de materiais usados na construção de uma quadra, evidenciaram conceitos, principalmente sobre área e proporcionalidade, e estabeleceram estratégias de resolução de modo a chegar a uma solução para o problema. Os alunos, em grupo, decidiram e estabeleceram estratégias para coletar dados qualitativos e quantitativos, seja mediante o recurso a instrumentos de medida, usando uma medida não-convencional, fazendo estimativas de valores ou mesmo usando recursos tecnológicos. De modo geral, essas ações foram subsidiadas pela comunicação entre os integrantes do grupo, seja por conversas no ambiente escolar ou utilizando trocas de mensagens no grupo criado no aplicativo WhatsApp.

A estratégia de troca de ideias por meio do aplicativo se mostrou relevante, principalmente para alunos que faziam parte de um grupo em que os integrantes tinham pouca afinidade. Por meio das mensagens, a professora podia atender os alunos em tempo real, conforme produziam os dados distribuídos pela quadra.

Na matematização e resolução, a aprendizagem algorítmica se mostrou mais central, por meio da transformação de representações para a linguagem matemática e, com isso, a busca por uma estrutura matemática, um modelo, que solucionasse o problema. Esse fato corresponde à necessidade de os alunos, no decorrer da atividade, se ampararem no uso, na interpretação e na produção de representações. Assim, “as representações ocupam um papel importante no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática” (Almeida, Silva & Veronez, 2021, p. 23), conduzindo os alunos para a interpretação dos resultados obtidos.

Ao considerar a importância das representações, a aprendizagem semiótica, assim como assevera Pinilla (2010), se mostrou transversal às demais aprendizagens, seja para exprimir um conceito matemático ou mesmo melhorar a forma de produzir uma representação figural ou, ainda, apoiando a organização dos resultados de modo que outros pudessem compreender o que havia sido calculado.

De modo a ilustrar os diferentes tipos de aprendizagem proporcionados na atividade de modelagem analisada, organizamos um ciclo em que os componentes da aprendizagem foram evidenciados em cada fase (Figura 3). A indicação da aprendizagem semiótica é apresentada no topo da Figura 3 e se mostra transversal, pelo que utilizamos o recurso do contorno de todo o ciclo por uma linha vermelha para indicar sua presença em todas as fases em que os alunos lançaram mão de representações, seja para se comunicar com os colegas, seja para apresentar cálculos algorítmicos.

O uso dos diferentes recursos, principalmente os tecnológicos, subsidiado pela troca de informações via WhatsApp, permitiu maior comunicação entre os integrantes do grupo.

Além disso, o uso de instrumentos de medida, produzindo diversos tipos de signos, bem como o uso do próprio corpo para medir as dimensões da quadra, promoveu diferentes aprendizagens.

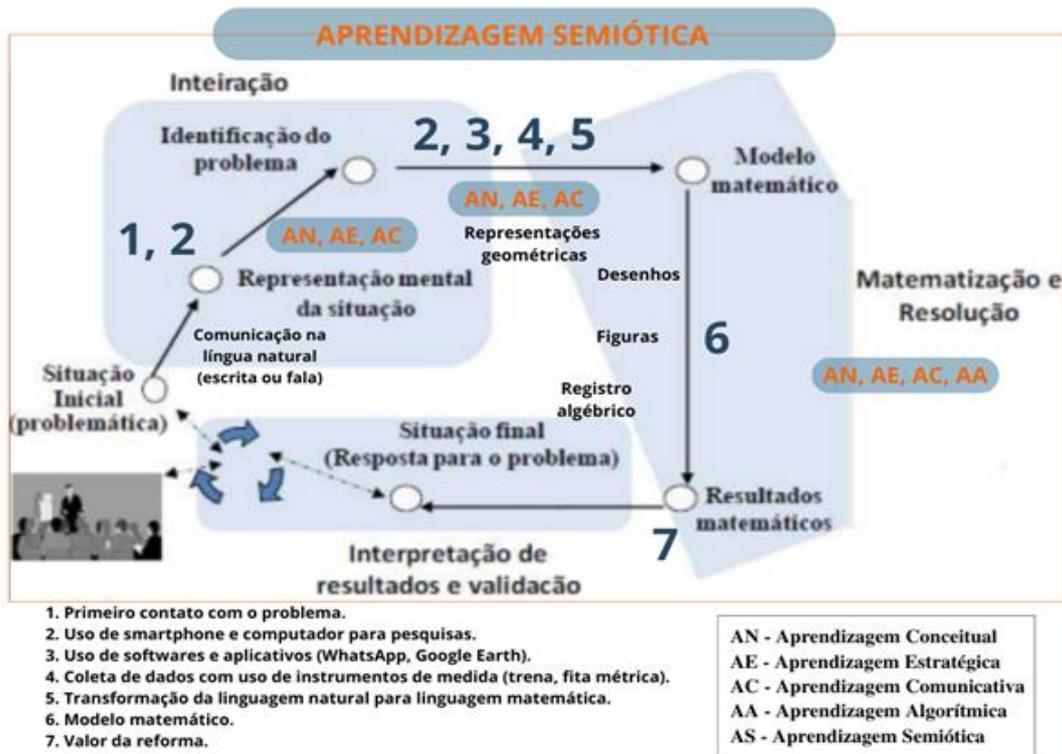


Figura 3. Componentes da aprendizagem nas fases de uma atividade de modelagem

Considerações finais

As atividades de modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desempenha na sociedade. Nem matemática nem modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade em que vivemos. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas antes que a modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica, pois “denota o processo de tradução, em ambas as direções, entre a matemática e o mundo extra-matemático” (Blum & Borromeo Ferri, 2016, p. 65).

Considerando que, ao dirigir atenção para a obtenção de evidências de aprendizagem em atividades de modelagem, se faz necessário “olhar para a atuação dos estudantes nessas atividades” (Almeida, Silva, & Borssoi, 2021, p. 124), centramos nosso olhar na ação de quatro grupos de alunos de uma turma do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada, que embora estivessem investigando a mesma temática – *Reforma da quadra* – se dirigiram para aspectos específicos da reforma: chão, teto, lateral e arquibancada.

Tomando como hipótese as caracterizações de cada componente da aprendizagem configuradas por Pinilla (2010), entendemos que as construções cognitivas de conceitos (aprendizagem conceitual) matemáticos e não-matemáticos puderam ser evidenciadas nos registros escritos, nos áudios e vídeos dos alunos no desenvolvimento da atividade; já as habilidades de executar operações, cálculos e esquematizar figuras (aprendizagem algorítmica) foram reveladas nos registros escritos; os processos utilizados pelos alunos para resolver um problema (aprendizagem estratégica), de modo geral, puderam ser evidenciados nos registros escritos, nas falas capturadas por áudios e nas imagens de ações dos alunos presentes em fotografias e vídeos; entendemos que a capacidade de exprimir ideias matemáticas de maneira visual e oral (aprendizagem comunicativa) foi evidenciada em fotografias, áudios e vídeos do desenvolvimento da atividade por cada um dos grupos.

As aprendizagens supracitadas, articuladas com as ações empreendidas pelos alunos e, em alguns momentos requeridas pela professora, foram evidenciadas nas fases do ciclo de modelagem. Concordamos com D'Amore et al. (2015, p. 168) em que a aprendizagem semiótica “possui um papel próprio e também uma ampla transversalidade”, visto que os alunos escolheram e produziram diferentes representações semióticas para apresentar soluções para os problemas em estudo.

Os resultados revelaram que o processo de modelagem envolve aprendizagem matemática inequívoca, visto que os componentes da aprendizagem puderam ser evidenciados ao longo do ciclo, além de que concepções equivocadas foram supridas com intervenções da professora e troca de ideias entre os alunos. Alguns dos componentes da aprendizagem, na atividade analisada, pareceram mais centrais em certas fases do ciclo, como a aprendizagem algorítmica nas fases de matematização e resolução, devido à necessidade da obtenção de uma solução matemática para o que estavam investigando.

As limitações relacionadas com a ausência de validação dos resultados obtidos pelos alunos se devem ao fato de a reforma não ter sido realizada, nem terem sido solicitados orçamentos para que esse possível investimento fosse realizado. Todavia, os alunos entenderam que os resultados obtidos eram estimados e perceberam que uma reforma dessa magnitude demandaria um amplo investimento da direção do colégio, o que constituiu também uma aprendizagem significativa.

Nota

¹ Uma quadra é uma área destinada à prática de vários esportes.

Referências

Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1), 19–30. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4>

- Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. (2021). Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(2), 1–27. <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n2a11>
- Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Borssoi, A. H. (2021). Um estudo sobre o potencial da experimentação em atividades de modelagem matemática no ensino superior. *Quadrante*, 30(2), 123–146. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23605>
- Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Veronez, M. D. (2021). *Elementos semióticos em atividades de modelagem matemática*. Livraria da Física.
- Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. Contexto.
- Bliss, K., & Libertini, J. (2006). What is Mathematical Modeling? In S. Garfunkel, & M. Montgomery (Eds.), *GAIMME: Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education*. COMAP, SIAM.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (Vol. 1, pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2016). Advancing the teaching of mathematical modeling: Research based concepts and examples. In C. R. Hirsh, & A. McDuffie. (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 55–77). NCTM.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Borromeo Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education* Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Carreira, S. (2010). Conexões no ensino da matemática. Editorial. *Educação e Matemática*, 110, 104.
- Carreira, S., & Baioa, M. (2011). Students' modelling routes in the context of object manipulation and experimentation in mathematics. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 211–220). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2>
- D'Amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. Livraria da Física.
- D'Amore, B., Pinilla, M. I. F., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de Semiótica: Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Livraria da Física.
- Duval, R. (1998). Un processus central dans le développement des apprentissages intellectuels: La coordination des registres de représentation sémiotique. *Entretiens de bichat, entretiens d'orthophonie* (pp. 81–91). Paris: Expansion Scientifique Française.
- Elfringhoff, M. S., & Schukajlow, S. (2021). O que torna um problema de modelação interessante? Fontes de interesse situacional em problemas de modelação. *Quadrante*, 30(1), 8–30. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23861>
- Galbraith, P. L. (2012). Models of Modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, 1(5), 3–16.
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. Perspectiva.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Pinilla, M. I. F. (2010). *Múltiplos aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Magistério.
- Pollak, H. O. (2015). The place of mathematical modelling in the system of mathematics education: Perspective and prospect. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 265–276). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8>
- Santaella, L. (2007). *Semiótica aplicada*. Thomson Learning.
- Schneider, L., Borromeo Ferri, R., & Ruzika, S. (2021). Sobre a influência do conhecimento acerca dos processos ideais-típicos de modelação nas rotas de modelação dos indivíduos. *Quadrante*, 30(2), 220–241. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23719>
- Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 315–326. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5>

- Trindade, S. L. (2023). *Análise Semiótica de componentes da aprendizagem em atividades de modelagem matemática no 8º ano do Ensino Fundamental* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina.
- Wenger, E. (2013). Uma teoria social da aprendizagem. In K. Illeris (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (pp. 246–257). Penso.