Inferencias y modelo condicional en el diálogo entre estudiantes sobre tareas matemáticas

Inferences and conditional model in the students' dialogue about mathematical tasks

Marcela Falsetti
Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mfalse@campus.ungs.edu.ar

Matias Maidana
Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
mmaidana@campus.ungs.edu.ar

Marisa Alvarez
Universidad Nacional de General Sarmiento
Argentina
malvarez@campus.ungs.edu.ar

Resumen. En este trabajo exploramos, con un estudio de caso, cómo se construyen los modelos mentales de los razonamientos condicionales (Modus Ponens, Modus Tollens y sus falacias asociadas) mediante significados que los estudiantes dan a los objetos y relaciones matemáticos de las premisas. Estas inferencias se presentan en tareas matemáticas planteadas en registros gráfico y coloquial. Se analiza el protocolo de una entrevista en profundidad realizada a estudiantes ingresantes a la universidad quienes elaboran consideraciones adicionales de sus producciones. Hemos tenido en cuenta la Teoría de Modelos Mentales (TMM) para el análisis desde una perspectiva semántica tanto de la información de las premisas como del esquema de razonamiento. Los resultados de este trabajo posibilitan pensar en condiciones de enseñanza para el razonamiento deductivo en clases de matemáticas incorporando aportes de la TMM a lo didáctico.

Palabras-clave: pensamiento lógico-matemático; método deductivo; matemáticas de ingreso universitario; modelo mental del condicional; estudio de casos.

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 32(1) 77-98
https://doi.org/10.48489/quadrante.30040
Recebido: março 2023 / Aceite: junho 2023

Abstract. In this paper we explore, with a case study, how mental models of conditional reasoning (Modus Ponens, Modus Tollens and their associated fallacies) are built through the meanings that students give to objects and mathematical relationships of the premises. These inferences are presented in mathematical tasks posed in graphic and colloquial registers. The protocol of an in-depth interview carried out with students entering the university who elaborate additional considerations of their productions is analyzed. We considered the Theory of Mental Models (TMM) for the analysis from a semantic perspective of both the information of the premises and the reasoning scheme. The results of this work make it possible to think about teaching conditions for deductive reasoning in mathematics classes, incorporating contributions from the MMT to the didactic.
Keywords: mathematical-logical thinking; deductive method; college mathematics; mental model of the conditional; case studies.

Introducción

La deducción es uno de los procesos constitutivos del conocimiento matemático (Maróstica, 1969) y atraviesa el desarrollo de competencias (Niss, 2013), en especial la de razonar matemáticamente, que incluye el seguimiento y el análisis de justificaciones y de afirmaciones, diferenciar un tipo de razonamiento lógico de uno heurístico, entender y producir discursos argumentativos para reforzar ideas y conjeturas o refutarlas, elaborar demostraciones matemáticas, entre otras. En este sentido, pretendemos aportar al problema metodológico de qué tipo de tareas matemáticas e intercambios sociales pueden favorecer la práctica deductiva, en particular con jóvenes ingresantes a la universidad. Presentamos un estudio exploratorio sobre cómo se manifiesta la inferencia deductiva condicional en estudiantes de esta población, observando mecanismos de razonamiento frente a tareas matemáticas, no demostrativas, con información sobre geometría, en las que se presentan las inferencias válidas: modus ponens (MP) (si p entonces q, p, por lo tanto q), y modus tollens (MT) (si p entonces q, no q, por lo tanto no p) y las inválidas: negación del antecedente (NA) (Si p entonces q, no p, por lo tanto no q) y afirmación del consecuente (AC) (Si p entonces q, q, por lo tanto p).

Como antecedentes de estudios de los procesos inferenciales deductivos de estudiantes universitarios, encontramos que en O'Brien (1973) se estudian estas cuatro formas lógicas, en el marco de un curso de lógica, mediante sentencias contextualizadas en asuntos cotidianos; en Attridge y Inglis (2013) y en Inglis y Simpson (2009) se analiza la relación entre el desempeño en la inferencia condicional y la formación matemática con un tratamiento descontextualizado de los razonamientos. En los trabajos mencionados se presentan los razonamientos completos, con sus conclusiones, y se pregunta sobre la necesariedad de las mismas, dando opciones, por ejemplo: "si", "no" o "no hay suficientes datos". Bronkhorst et al. (2021) reportan un análisis sobre discusiones de estudiantes para investigar cómo usan y aplican diferentes representaciones: icónicas, enactivas y simbólicas, en tareas sobre lógica con razonamientos silogísticos y condicionales, con contenidos no matemáticos, luego de haber realizado una intervención con ejemplos con énfasis en el pasaje entre estas representaciones. Los autores concluyeron en la utilidad de la representación icónica visual, como los diagramas de Venn.

Nuestro punto de vista es contextualizado con contenido geométrico, como el trabajo de Vargas y Stenning (2020) en el que los estudiantes universitarios además contaban con un curso introductorio de lógica, a diferencia de nuestro caso. Otra diferencia que señalar respecto de los antecedentes mencionados es que consideramos la presentación de la información con diferentes registros semióticos: verbal y gráfico (Duval, 1993) y solicitamos que se formule la conclusión necesaria o que se responda que no se puede asegurar una conclusión. En este sentido, tiene relación con el trabajo de Stylianides et al. (2004) en el que se estudia el funcionamiento de la regla de contraposición en registros simbólico y verbal.

Nuestro trabajo pretende incorporar elementos de la psicología de la deducción en la que existen dos grandes teorías: la de la lógica mental y la de los modelos mentales (Carreira et al., 2020). Adoptamos esta última, considerando que el razonamiento y el análisis de su validez se realiza mediante la asignación de significados del contenido de las premisas, su vinculación y mediante el significado del funcionamiento del esquema del condicional. La Teoría de los Modelos Mentales (TMM) (Johnson-Laird & Byrne, 1991, 2002; Johnson-Laird 1995, 2006; Stylianides & Stylianides, 2007) nos brinda elementos para elaborar tareas para la inferencia y analizar las respuestas frente ellas. Esta teoría sostiene que el individuo razona pensando en posibilidades de ocurrencia de lo presentado en las premisas y en modelos mentales de los significados de su información. Los modelos mentales de los objetos son representaciones del sujeto que subyacen a las imágenes, la verbalización y las acciones presentes en los enunciados. Cuando decimos objetos, nos referimos a conceptos y razonamientos, o sea que podemos hablar de modelo mental de un enunciado condicional o un enunciado disyuntivo, por ejemplo.

En este trabajo exploramos, mediante un estudio de caso, la evolución hacia la construcción del modelo explícito del condicional (Johnson-Laird & Byrne, 2002; García Madruga et al., 2002), por interpretación de la información de contenido matemático y en un ámbito de intercambio social entre pares. El caso se centró en una pareja de estudiantes universitarios y los datos fueron obtenidos por la aplicación de tests, realizados online, y una entrevista en profundidad. Analizamos los recursos puestos en juego en inferencias deductivas de individuos que han trabajado con las tareas de los tests en registro gráfico o verbal.

Marco Teórico

Panizza (2005) y Johnson-Laird (2006) coinciden en que, si bien las inferencias deductivas válidas no producen nueva información, hacer explícita la contenida en las premisas, aislándola del resto, moviliza nuevos procesos cognitivos. En la práctica racional es importante el contexto para poner a prueba las conclusiones obtenidas (Panizza, 2005), reconocer eventualmente la contradicción y formular contraejemplos ya que "incluso sin entrenamiento en lógica, nos damos cuenta de que una inferencia no es correcta si podemos pensar un contraejemplo para ella" (Johnson-Laird, 2006, p. 5). Destacamos así la importancia de la construcción de enunciados que permitan rebatir argumentos. Sobre cómo razonamos deductivamente, Johnson-Laird, uno de los mayores exponentes de la Teoría de Modelos Mentales (TMM), sostiene que el individuo infiere deductivamente mediante modelos mentales:

> Un modelo mental es una representación del mundo que está postulada a subyacer el razonamiento humano; un modelo representa lo que es verdadero en por lo menos alguna posibilidad y en la medida de lo posible tiene una estructura icónica. Los modelos mentales son los resultados de la percepción y del entendimiento de una descripción. (Johnson-Laird, 2006, p. 428)

Con estructura icónica se refiere a la representación mental, en forma figurativa o esquemática, tanto de los objetos nombrados por las premisas como al tipo de razonamiento. Además, define inferencia válida, no por resultado de la tabla de verdad o por estructura descontextualizada de la secuencia de proposiciones y conectivos lógicos, de la siguiente manera:

> Una inferencia es válida si su conclusión vale en todas las posibilidades en que las premisas valen, y eso garantiza que la conclusión es verdadera dadas las premisas verdaderas. Es inválido si hay un contraejemplo - una posibilidad consistente con las premisas, pero no con la conclusión-. Si no existe contraejemplo en el sentido dicho arriba, entonces la inferencia es válida. Hemos hecho una deducción, no usando la forma lógica de las premisas, sino usando su contenido e imaginando posibilidades. (Johnson-Laird, 2006, p. 16)

Esto nos lleva a pensar que se razona en relación con un contenido y a la posibilidad de encontrar, o no, contraejemplos. Los siguientes principios que la TMM sostiene sobre el razonamiento han orientado tanto la confección de las tareas de los tests como el análisis de sus producciones:

a. El individuo razona intentando eliminar información, es decir, considera las posibilidades que le resultan plausibles y usualmente no razona sobre posibilidades en las que el antecedente es falso (Johnson-Laird et al., 1992).

b. Según Johnson-Laird (2006, p. 65) "la memoria de trabajo [...] es donde mantenemos cosas en la mente mientras trabajamos con ellas". Cuando un razonamiento incluye demasiada información o modelos de sus premisas en la memoria de trabajo, se dificulta obtener una conclusión.

c. El razonamiento deductivo se realiza mediante un proceso en estadios que tienen una secuencialidad flexible, pudiéndose retomar un estadio si no se logra concretar satisfactoriamente el proceso. Los estadios son: interpretación y representación inicial de las premisas, del esquema de funcionamiento y de su contenido; relación entre las premisas para elaborar un primer modelo que puede ser implícito; formulación de una conclusión informativa; validación y búsqueda de un modelo alternativo. La veracidad de la conclusión inicial transitoria obtenida en el proceso descripto depende de encontrar, o no, modelos alternativos que la refuten, consistentes con las premisas y que hagan falsa la conclusión obtenida. En caso de que no haya modelo alternativo, el razonamiento es considerado válido por el sujeto (Johnson-Laird, 2006; García Madruga et al., 2002).

d. La TMM enuncia también los principios de modulación semántica y pragmática (Johnson-Laird & Byrne, 2002) que se refieren a la facilitación o la obstaculización o al ajuste de la construcción del modelo explícito. Cuestiones semánticas son, por ejemplo, significados del antecedente y consecuente y los enlaces vinculantes entre ellos; las pragmáticas se refieren a la influencia en la deducción de los conocimientos y habilidades previos, las intenciones, las creencias, la situación y contexto en el que se razona.

En Matemáticas, las propiedades y teoremas se expresan centralmente como condicionales: "Si p entonces q", siendo p la proposición antecedente, que establece la condición, y q la proposición consecuente. Según la TMM, el antecedente p alude a un conjunto de posibilidades que la constatan, describe una situación, mientras que el consecuente q se interpreta en el contexto de esa situación (Johnson-Laird & Byrne, 2002). El modelo del condicional para $p \rightarrow q$ tiene los siguientes desarrollos de acuerdo con la capacidad de retención en la memoria de trabajo del individuo (García Madruga et al., 2002):

Modelo implícito del condicional:

$$\begin{array}{c} p \quad q \\ \ldots \end{array}$$

La yuxtaposición *"p q"*, de p y q, de la primera línea representa, en la bibliografía de la TMM, el modelo mental en el que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos, es decir que sea posible que acontezcan las situaciones o hechos que ambos, p y q, describen. En términos de la simbología lógica podría asimilarse a: $p \wedge q$.

La elipsis "..." de la segunda línea representa el modelo implícito en el que el sujeto distingue que hay diferencia entre el condicional y la conjunción. Da lugar a la posibilidad de que p sea falsa, o q lo sea, es decir que la negación de p o de q sea verdadera, pero no queda explícito si establece relación entre estas posibilidades o es que no las tiene en cuenta.

En otras ocasiones, el individuo explicita que el modelo, en el caso en que la negación $\neg p$ sea verdadera, es:

$$\begin{array}{cc} p & q \\ \neg p & \neg q \end{array}$$

que corresponde a un *bicondicional*.

Por último, el individuo que es capaz de retener en su memoria de trabajo situaciones en las que p y q sean verdaderas, o sus negaciones lo sean, construye el modelo explícito completo (fully explicit model).

Modelo explícito completo del condicional:

$$\begin{array}{cc} p & q \\ \neg p & q \\ \neg p & \neg q \end{array}$$

Representa que, si se da la situación descrita por p, se da también la descrita por q; si no se da la situación descrita por p puede suceder que la que describe q se dé o no.

Según la TMM, las inferencias válidas, MP y MT, y las inválidas, NA y AC, se predicen de acuerdo con el modelo que el individuo logra mentalizar (García Madruga et al., 2002). En MP, la situación de la proposición categórica p se encuentra en el primer modelo (primera línea) por lo que tanto en el modelo implícito como en el explícito, bicondicional o completo, se conduce a que, en ese contexto, se da la situación expresada en q; en MT, en el que la premisa categórica es $\neg q$, así que quien sólo llegó al modelo implícito puede que no sepa qué concluir o concluya erróneamente, mientras quien opera con el modelo del bicondicional o el explícito completo del condicional concluirá correctamente. Para NA y AC, dada la premisa categórica, se concluirá erróneamente la conclusión del razonamiento si no se llegó a consolidar el modelo explícito del condicional, donde "$\neg p \quad q$" refuta la conclusión en ambos casos (Johnson-Laird & Byrne, 2002, García Madruga et al., 2002).

Metodología

Adoptamos el estudio de caso porque permite acceder al fenómeno en profundidad. Shaw (1999) señala que el estudio de caso observa la realidad social como algo construido por personas, donde el investigador recolecta datos, lo que le permite acercarse a un fenómeno y ser capaz de descubrir, interpretar, comprender la perspectiva de los participantes y elaborar hipótesis. Se pretende recabar información sobre cómo se evidencian los estadios del razonamiento deductivo según la TMM y se construye el modelo explícito del condicional en un contexto de tratamiento directo del contenido involucrado.

Descripción del contexto de los actores

El ámbito de trabajo fue la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) en la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Allí se dictó el curso de ingreso de matemáticas al cual asistían los dos entrevistados. El curso era de noventa horas, basado en un manual de estudio (Carnelli et al., 2018), sin contenidos específicos de lógica. Al momento de la entrevista los temas del curso eran de geometría elemental y sobre ellos versan las tareas específicas asignadas por formulario online.

Para obtener datos se aplicaron test con tareas específicas y una posterior entrevista clínica, presencial, realizada en un ámbito distinto del aula y por investigadores que no eran los profesores de la clase. La entrevista es, en este caso, un modo adecuado para obtener datos para identificar y explicar fenómenos intelectuales, cuando los individuos están conectados a la situación problema y para diagnosticar su competencia en el razonamiento deductivo (Ginsburg, 1981).

El entrevistador, integrante del equipo de investigación, cuidó que no se pierda el intercambio entre los entrevistados para que no sea una mera descripción de lo que cada uno hizo y habilitar así la discusión cuando había discrepancias. La técnica de la entrevista fue la de "consideraciones adicionales" sobre el trabajo previo personal e individual, en base a las tareas presentadas (Zazkis & Hassan, 1998). Estas tareas se habían administrado a todos los estudiantes cursantes, enseguida después de haber visto los temas afines en clase. En cada curso, se conformaron aleatoriamente dos grupos: uno de los grupos realizó las tareas planteadas con registro predominantemente gráfico mientras que el otro con registro coloquial. El contenido en ambos fue el mismo y se trató que los planteos fueran similares en nivel de dificultad. La entrevista se realizó a dos estudiantes al mismo tiempo que realizaron la tarea en distintos registros. Los entrevistados fueron informantes clave, invitados a propuesta de sus profesores, por su actitud interesada en las tareas escritas. Designamos M y A a los entrevistados. Al momento de la entrevista, M tenía 18 años, había finalizado recientemente la escuela secundaria en una institución de gestión privada. El estudiante A, de 20 años, era egresado de una secundaria técnica de gestión estatal. Ninguno tenía formación específica en Lógica. Ambos eran ingresantes a la universidad, inscritos en la carrera de licenciatura en sistemas informáticos y cursaron con distintas profesoras. M resolvió las tareas en registro gráfico y A en registro coloquial[1].

Las tareas de los tests

La primera tarea fue propedéutica y hubo orientaciones del profesor de cada curso para el manejo de los formularios. La segunda, fue realizada en la clase, a la semana siguiente, y los alumnos la respondieron sin intervenciones del profesor.

Para orientar a los estudiantes a que pasen por el estadio de formulación (ver principio c)), se les propuso que enuncien conclusiones y no solamente las evalúen. Formular una conclusión es más difícil que señalar la opción válida o indicar si la conclusión deriva directamente o no de las premisas (García Madruga et al., 2002) y es más acorde a lo que se solicita en una clase. Para disminuir la dificultad de razonar al sobrecargar la memoria de trabajo (principio b)), optamos por tareas cerradas y específicas para la inferencia deductiva, basadas en interpretar información. Los dos registros diferentes se presentaron para ver las interpretaciones semánticas y, posteriormente en la entrevista, los recursos pragmáticos puestos en juego. Para ilustrar, mostramos por completo la tarea 1 en los registros gráfico y verbal. De la tarea 2, mostramos las consignas principales.

Tarea 1. Propiedad de las diagonales del cuadrado

Registro gráfico. Responder en forma individual explicando lo más que puedas y justificando tu respuesta.

(a) Observar la siguiente secuencia gráfica referida a una propiedad geométrica válida que tiene que ver con la figura.

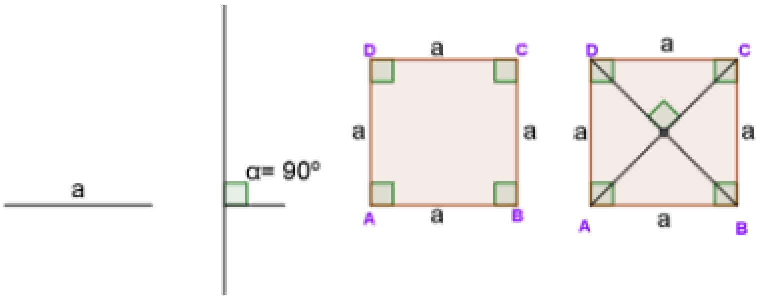

Figura 1. Secuencia gráfica Test 1

(a.1) ¿Qué cuadrilátero se presenta? Dar la mayor precisión posible. Enunciar la propiedad sugerida en la secuencia y en la figura final.

(a.2) Enunciar el antecedente de la propiedad del ítem anterior.

(a.3) Enunciar el consecuente de la propiedad.

(a.4) Enunciar la propiedad de manera implicativa: si [antecedente] entonces [consecuente].

(b) Los ítems siguientes se refieren a la propiedad enunciada en el ítem (a.4).

Observa la siguiente figura y responde.

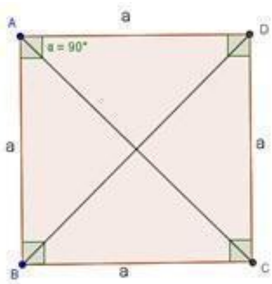

Figura 2. Figura correspondiente al ítem b.1

(b.1) Según la propiedad enunciada en (a.4), ¿se puede asegurar algo sobre un cuadrilátero como el de la figura? (que no esté explicitado gráficamente) Explicar brevemente.

(b.2) Según la propiedad enunciada en (a.4), ¿se puede asegurar algo si un cuadrilátero no es como el de la figura? Explicar brevemente.

(b.3) Observar la figura.

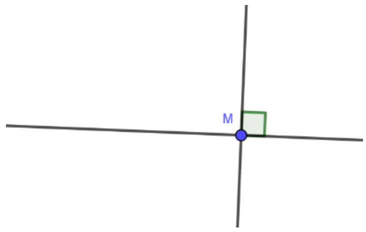

Figura 3. Figura correspondiente al ítem b.3

Si las diagonales de un cuadrilátero estuvieran incluidas en estas rectas y dichas diagonales se intersecan en el punto M indicado, responder la pregunta siguiente:

(b.3) ¿Se puede asegurar algo sobre el cuadrilátero? Explicar brevemente. Tener en cuenta la propiedad enunciada en (a.4).

(b.4) Observar la figura.

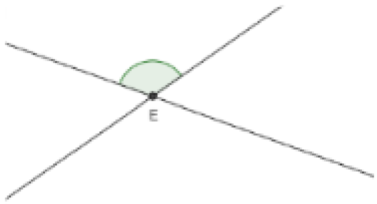

Figura 4. Figura correspondiente al ítem b.4

Si las diagonales de un cuadrilátero estuvieran incluidas en estas rectas y dichas diagonales se intersecan en el punto E indicado, responder la pregunta siguiente:

(b.4) ¿Se puede asegurar algo sobre el cuadrilátero? Explicar brevemente. Tener en cuenta la propiedad enunciada en (a.4).

(c) Los ítems siguientes se refieren al enunciado recíproco de la propiedad del ítem (a.4)

(c.1) Dar el enunciado recíproco de la propiedad (a.4).

(c.2) El enunciado recíproco, ¿es verdadero o es falso? Explicar por qué el enunciado recíproco es verdadero (o falso, según corresponda).

La secuencialidad de izquierda a derecha busca presentar al cuadrado, como condición inicial, y que en esa figura sus diagonales son perpendiculares, como conclusión. En la clase se había introducido, con otros ejemplos del manual, las estructuras de los condicionales, el rol que juegan el antecedente y el consecuente, el enunciado del recíproco de una sentencia condicional. Desde las consignas (a.1) a (a.4) se declara que es una propiedad, o sea que vale para todo cuadrado, aunque sólo se represente uno, y se busca que se enuncie como condicional (principio c)). Los ítems (b.1) a (b.4) aluden a las inferencias básicas; preguntar si "se puede asegurar algo" es el modo más apropiado que encontramos para que consideren todas las posibilidades (ver principio a) y se enuncie una conclusión de la cual se pueda decir que se deriva directamente o no. En el caso de NA, es posible que respondan que no se puede asegurar nada porque no tienen ninguna idea o porque tienen idea de que tanto la negación del consecuente como su afirmación son posibles, por eso solicitamos que expliquen para saber si están, o no, más cerca del modelo explícito del condicional; lo mismo sucede con AC.

El ítem (b.1) muestra el cuadrado y sus diagonales y, en comparación con la figura de (a), falta ver qué sucede con la perpendicularidad de sus diagonales. El estatus de propiedad de lo obtenido en (a) debería permitir asegurar la perpendicularidad de las diagonales y responder a un modus ponens (MP). El (b.2) niega el antecedente (NA). No dimos representación gráfica para este ítem porque si se representa un cuadrilátero no cuadrado habría que mostrar casos en que posiblemente las diagonales sean perpendiculares (romboide, por ejemplo) y otros en que no, y eso induciría la respuesta. El (b.3) apunta a la afirmación del consecuente (A.C) y el (b.4) al modus tollens (MT). La sección (c) es para trabajar con la recíproca de la propiedad y su valor de verdad. Incluimos esto porque podría ayudarles a revisar los ítems anteriores. En esta propuesta se busca llegar a la interpretación de las premisas y de la relación entre ellas a través de gráficos.

Tarea 1. Propiedad de las diagonales del cuadrado

Registro coloquial

(a) Considerar la siguiente propiedad matemática válida: "Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares."

(a.1) ¿A qué tipo de cuadrilátero hace referencia la propiedad?

(a.2) Enunciar el antecedente de la propiedad dada.

(a.3) Enunciar el consecuente de la propiedad dada.

(a.4) Enunciar la propiedad de manera implicativa: si [antecedente] entonces [consecuente]

(b) Los ítems siguientes se refieren a la propiedad enunciada en el ítem (a.4)

(b.1) Según la propiedad enunciada en (a.4) ¿Se puede asegurar algo si sabes que una figura es un cuadrado? Explicar brevemente.

(b.2) Según la propiedad enunciada en (a.4) ¿Se puede asegurar algo si sabes que una figura no es un cuadrado? Explicar brevemente.

(b.3) Según la propiedad enunciada en (a.4) ¿Se puede asegurar algo de una figura de cuatro lados si sabes que sus diagonales son perpendiculares? Explicar brevemente.

(b.4) Según la propiedad enunciada en (a.4) ¿Se puede asegurar algo de una figura si sabes que sus diagonales no son perpendiculares? Explicar brevemente.

(c) Los ítems siguientes se refieren al enunciado recíproco de la propiedad del ítem (a.4)

(c.1) Dar el enunciado recíproco de la propiedad (a.4).

(c.2) El enunciado recíproco, ¿es verdadero o es falso? Explicar por qué el enunciado recíproco es verdadero (o falso, según corresponda).

En la Tarea 2, las consignas de los ítems son similares a la Tarea 1, con otro contenido. Sólo mostramos aquí la información e implicación iniciales en cada caso.

Tarea 2. Condición sobre lados de un triángulo rectángulo

Registro gráfico

En este caso se decidió que ambos tuvieran un enunciado coloquial y al del registro gráfico además se le agregó un dibujo. Las preguntas posteriores dan lugar a las cuatro inferencias básicas.

(a) El gráfico hace referencia a la siguiente propiedad: "Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces uno de los lados es mayor que los otros dos."

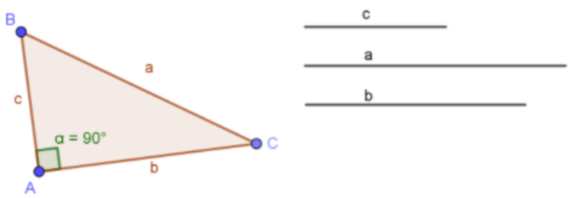

Figura 5. Figura del ítem a.1) del test gráfico

Tarea 2. Condición sobre lados de un triángulo rectángulo

Registro coloquial

(a) Se tiene la siguiente propiedad: "Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces uno de los lados es mayor que los otros dos."

Análisis del protocolo de la entrevista

Las fuentes sobre las que se basa el análisis son las respuestas de los formularios y el audio de la entrevista (no se poseen los dibujos realizados durante la entrevista).

E (entrevistador): [...] Vamos a la Tarea 1. [...] Centralmente es un debate entre ustedes con poca intervención nuestra.

M: La (a) dice, considerando la siguiente propiedad matemática, “las diagonales de un cuadrado son perpendiculares”.

E: Tienen el registro gráfico uno y verbal el otro. Para A tiene “las diagonales de un cuadrado son perpendiculares” y a vos [M] tenés mostrado en un gráfico un cuadrado con las diagonales perpendiculares. Las preguntas son las mismas.

A: La primera pregunta dice “¿A qué tipo de cuadrilátero hace referencia la propiedad?” Yo simplemente puse “cuadrado''.

M: Yo puse rectángulo o cuadrado. No sólo cuadrado.

A: Yo lo simplifique más.
E: Tienen respuestas diferentes.
M: Si, si, un cuadrado es un rectángulo, pero con todos los lados iguales.

En el intercambio, la respuesta de A modifica la respuesta inicial de M que afirma que la figura podría ser un rectángulo o un cuadrado. Cabe destacar que, en su respuesta escrita, M no había incluido la disyunción “o” por lo que se podía interpretar que se refería a un tipo de rectángulo. En lo que sigue, M restringe sus respuestas al cuadrado. Vemos aquí que los procesos de control individual sobre un conocimiento se pueden ver afectados cuando el sujeto tiene intercambios con pares, lo que correspondería a una modulación pragmática (principio d)).

M: La siguiente es: “Enunciar la propiedad sugerida en la secuencia y en la figura final” y puse las diagonales de un rectángulo cuadrado son perpendiculares.
A: A mí en la [pregunta] 2 me dice el antecedente de la propiedad dada y yo puse “Si hay un cuadrado”, es el antecedente y el consecuente sería “sus diagonales son perpendiculares”
M: Yo puse “Si un cuadrilátero es un rectángulo cuadrado” y en el consecuente “entonces sus diagonales son perpendiculares”
E: ¿Cuál sería la propiedad formulada?
M: Si un cuadrilátero es un rectángulo cuadrado entonces sus diagonales son perpendiculares.
A: Sí, si un cuadrilátero es cuadrado entonces sus diagonales son perpendiculares. Entonces pasamos al b).

En la presentación inicial de la propiedad, no es evidente el antecedente y el consecuente. M y A se encuentran en el estadio de interpretación y representación inicial de las premisas (principio c), identificando correctamente antecedente y consecuente y acercándose a la formulación sintáctica del condicional.

A: “Según la propiedad enunciada en [ítem] a.4, ¿Puede asegurar algo si se sabe que la figura es un cuadrado? Explicar brevemente”. Yo en ese caso puse: Las diagonales son perpendiculares porque en el punto donde se cruzan forman ángulos de 90 grados.
M: Yo puse “sus diagonales son perpendiculares ya que el antecedente es cumplido, se cumple el consecuente”. Supongo que en ese caso yo procedí a justificar porque mi respuesta es correcta y vos simplemente describiste la situación. ¿Se podría decir que falta justificar a lo mejor?

M reconoce los componentes lógicos de un condicional y analiza su validez en términos que, en una implicación verdadera, a un antecedente verdadero corresponde un consecuente verdadero, lo que daría cuenta del primer renglón del modelo explícito de una implicación: “$p \quad q$”. En el MP, A describe qué es ser perpendicular en términos del ángulo que forman los lados lo cual no es necesario en la inferencia como bien se lo indica M cuando le señala “vos simplemente describiste la situación”; la discusión permite visibilizar los procesos intermedios de razonamiento (Panizza, 2005). Aquí se observa un ejemplo de modulación pragmática (principio d): para A, la validez se sostiene en su conocimiento de que los ángulos formados deben medir 90°. M, en cambio, deduce, según un modelo que trasciende el dato particular y visible de lo gráfico.

A: Como la propiedad lo dice, que tiene diagonales perpendiculares y también puse por qué son perpendiculares, porque cuando se cruzan, forman ángulos de 90°. Nada más.

Vemos que los procesos de razonamiento no son independientes de los contenidos matemáticos que se ponen en juego (Panizza, 2005). A no alude al antecedente y no da explicación de por qué afirma que el ángulo es de 90°. A parece no comprender lo que M le señaló previamente.

M: La siguiente, ¿se puede asegurar algo si un cuadrilátero no es como el de la figura?

A: Yo no sé si lo aseguré, pero puse “si una figura no es un cuadrado puede que sus diagonales no sean perpendiculares, si es que tiene”.

M: Yo puse: no, la propiedad no es recíproca. No hay nada que pueda asegurar directamente solo con el dato de que no es un cuadrado porque hay cuadriláteros que no son cuadrados que tienen diagonales perpendiculares.

Tanto A como M notan que el modelo del condicional no se limita a la conjunción “$p \quad q$” y que la negación del antecedente habilita otras posibilidades. M pareciera comprender la diferencia entre la validez de una propiedad y la de su recíproca. Manifiesta cierta precisión en los términos con los que formula, dando cuenta de un nivel de lógica más avanzado que responde al estadio de formulación de una conclusión informativa (principio c), adelantando un posible caso que muestre la contradicción en la implicación $\neg p \rightarrow \neg q$ para estas premisas.

A: Pero recién dijiste que hay cuadriláteros que tienen diagonales perpendiculares que no son cuadrados.

M: Sí.

A: ¿Cómo cuáles? Yo me maté pensando.

M: Porque cuadrilátero es cualquier forma geométrica que tenga cuatro lados y cuatro vértices.

M: (Relata lo que parece ser un dibujo) “Sabemos que tiene las diagonales que son perpendiculares, entonces en vez de cortar en este punto, corto en este punto, y hago el cuadrilátero así, las diagonales seguirían siendo perpendiculares, un poco más corta ésta (se referiría a uno de los segmentos determinados sobre la diagonal), pero seguirían siendo perpendiculares.

A: Está bien.

M: Con eso ya podrías decir que hay infinitos.

Esta interacción es crucial, es la producción del contraejemplo. A había llegado al estadio de construir un modelo implícito, sabía que podía darse el caso en que $\neg p$ sea verdadera pero no pudo continuar con representaciones que mostraran qué sucede con q en ese caso. M logra construir cuadriláteros que no son necesariamente cuadrados, dice “hay infinitos” y que tienen diagonales perpendiculares, mostrando que el razonamiento $(p \rightarrow q \ \wedge \neg p) \therefore \neg q$ no siempre es válido. Tal como postula Johnson-Laird (2006), encontrar un contra-ejemplo le permite a M afirmar que la inferencia “si un cuadrilátero no es un cuadrado, entonces sus diagonales no son perpendiculares” no es válida. Posiblemente la tarea en registro gráfico haya favorecido que M encuentre más fácilmente contraejemplos.

A: (item) b.3, ¿podés asegurar algo de una figura de cuatro lados si se sabe que sus diagonales son perpendiculares? Yo puse: si una figura de cuatro lados tiene diagonales perpendiculares, entonces se trata de un cuadrado. Ahí ya diría error porque me acabás de comprobar que no necesariamente es un cuadrado.

M: No es recíproco, es decir si se cumple el antecedente, cosa que sabes que es un cuadrado entonces sabes que se cumple el consecuente, pero sabiendo que se cumple el consecuente no podés asegurar lo anterior. Yo respondí: no, ya que la propiedad no es recíproca no se puede asegurar con el dato de que el consecuente es cumplido.

A anticipa el error de su respuesta escrita a partir de haber entendido el contraejemplo anterior. Su modelo, que consistía en asimilar el condicional al bicondicional, se está modificando y él es capaz, con estos contenidos, de incluir la posibilidad: “$\neg p \quad q$” al modelo del condicional. M lo piensa en función de reciprocidad, para él el razonamiento $(p \rightarrow q \wedge q) \therefore p$, no es válido pues $q \rightarrow p$ no es verdadera en todos los casos. Por el diálogo, A entiende la necesidad de pensar en algún modelo alternativo para analizar la validez de un razonamiento.

A: Pasemos a la b.4. ¿Puedes asegurar algo de una figura si sabes que sus diagonales no son perpendiculares? Yo respondí: Si una figura no tiene diagonales perpendiculares entonces no es un cuadrado. Lo mismo.

M: Yo puse, puedo asegurar que no es un rectángulo cuadrado. Si el antecedente fuera cumplido, el consecuente también. Por lo tanto, si el consecuente no es cumplido, el antecedente tampoco. Aunque no es recíproca, si no se cumple el consecuente, podés estar completamente seguro de que el antecedente tampoco, si la propiedad es verdadera.

Asumimos que cuando M dice “aunque no es recíproca” en realidad quiere decir “aunque su recíproca no es verdadera”. Él dispone de relaciones lógicas y distingue la información relevante, trasciende el contenido, formula una conclusión (principio c) y es capaz de justificar por qué el rectángulo no es cuadrado, explicando la contradicción que se obtiene en el razonamiento $(p \rightarrow q \wedge \neg q) \therefore p$ ya que de $(p \rightarrow q \wedge \neg q) \wedge p$ se concluye q, y es contradictorio que sean verdaderas q y $\neg q$. En definitiva, da una explicación semántica del funcionamiento del modus tollens. En su escrito, A había concluido lo mismo, sin embargo no atinó a dar una explicación sobre eso.

M:	Para dar enunciado recíproco de la propiedad, yo puse, si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares entonces el cuadrilátero es un rectángulo cuadrado.
A:	Si una figura tiene diagonales perpendiculares, entonces es un cuadrado.
M:	Explicar si el enunciado recíproco es verdadero o falso según corresponda.
A:	Ahí me equivoqué también. Puse, verdadero porque no hay otra figura que cumpla con las condiciones que plantea la propiedad. Y ahí me contradecís.
M:	Puse: el enunciado recíproco es falso porque el rectángulo cuadrado no es el único cuadrilátero que tiene las diagonales perpendiculares.

En lo que A respondió por escrito y se confirmó mediante el intercambio, queda en evidencia uno de los principios señalados de la TMM sobre cómo razonamos: para el individuo la validez de un razonamiento se basa en no encontrar una posibilidad que lo contradiga. A entendió la "fuerza" del contraejemplo. M contesta adecuadamente en su escrito, pero no "muestra" en él un contraejemplo concreto, lo hizo cuando fue necesario convencer a A. Esto da cuenta de la importancia de la discusión entre pares para conocer la evolución de los participantes en su razonamiento.

A:	Tarea 2 dice, se tiene la siguiente propiedad, "Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces uno de sus lados es mayor que los otros dos" a.1, ¿A qué tipo de triángulo hace referencia la propiedad? Triángulo rectángulo.
M:	[Escribí] Lo mismo.
A:	Enunciar el antecedente de la propiedad dada. Si un triángulo tiene un ángulo recto, el consecuente sería, uno de los lados es mayor que los otros dos.
M:	Según la propiedad enunciada ¿puedes asegurar algo sobre los lados del triángulo? Yo puse, uno de los lados es mayor que los otros dos. Acá cuando respondí, no desarrollé. Debería haber desarrollado diciendo como el antecedente se cumple entonces el consecuente también se cumple.

M ya habiendo discutido con su par, incorpora términos y relaciones específicas que evidencian la modulación semántica de su razonamiento (principio d)

A:	Yo simplemente puse el lado opuesto al ángulo A es el mayor.
M:	Ese es conocimiento que tenés porque así funcionan los triángulos rectángulos, pero por la propiedad no podés deducir que el lado mayor es opuesto al ángulo de 90 grados, tampoco podés deducir que es mayor… no tiene nada que ver con la propiedad. La propiedad te dice "Si un triángulo tiene un ángulo recto, uno de los lados es mayor que los otros dos". Esa es la información que tenés.

A: Pero si es un triángulo rectángulo…. todos los triángulos rectángulos que dibujé me daban eso.
M: Si, eso lo sabés pero la propiedad no te lo dice. Vos usando sólo la propiedad no podés saber que el lado opuesto al ángulo recto es el mayor, porque la propiedad no lo enuncia. Simplemente dice que uno de los lados es mayor.

Un aspecto central en este diálogo es que el registro que utilizan no determina la forma de justificar; dado que M tiene un registro gráfico, podría haber hecho un desarrollo más acotado porque lo visualiza. Sin embargo no fue así, quedando la justificación de A sujeta al modelo construido sobre las premisas y a sus preconceptos sobre las propiedades de los triángulos rectángulos que se basan en la propiedad, no explicitada, que en todo triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado. Nuevamente se muestra que A razona en función de los modelos inductivos construidos: "todos los triángulos rectángulos que dibujé me daban eso". Por su parte, M busca trascender la información extra y sólo basarse en lo enunciado.

A: ¿Me lo podés explicar gráficamente? porque yo pienso en la hipotenusa.
M: Vos pensá que no sabés nada de matemática y te dan esta propiedad, vos lo único que sabes es que si un triángulo tiene un ángulo recto, uno de los tres lados es más grande que los otros dos. Es lo único que sabés. No sabés más nada que eso. Entonces usando la propiedad, porque acá te piden que uses la propiedad, no sabés dónde está posicionado el lado que es mayor.
A: Si, porque está hablando de los lados y no de los ángulos.
M: Si, esa información es verdad, pero la sabés por matemática, porque ya sabés cómo funcionan los triángulos rectángulos. Pero usando sólo la propiedad, diciendo que un profesor sólo te enseña la propiedad sin enseñarte cómo son los triángulos rectángulos en general, no podrías saber 100% que el lado mayor es el que es opuesto al ángulo de 90 grados.
A: Si, porque en realidad no estoy respondiendo a la pregunta.
A: Yo me estaba dando cuenta que usaba la propiedad porque acá dice, si un triángulo tiene un ángulo recto.
E: Vos decís que él usa más información.
M: En la propiedad no dice que es imposible que un ángulo recto sea adyacente al lado mayor. Es imposible pero no lo dice la propiedad.
E: Bueno, sigan…

Persisten las posiciones de ambos en sus modos de razonar. A insiste en apoyarse en los preconceptos y conocimientos extra en torno a la información de las premisas mientras que M trasciende el contenido, focalizándose en la información de las premisas y en la relación condicional entre ellas, más allá del contenido. M en su afán de persuadir al compañero también perfecciona sus reglas.

A: Si de un triángulo dado nos informan que uno de los lados es mayor que los otros dos, ¿puedes asegurar algo de las medidas de sus ángulos interiores? Sí, si se cumple con la propiedad debe tener un ángulo recto.

M: No, porque la propiedad no es recíproca. Porque el consecuente, [aún] cumpliéndose, no necesariamente indica que se cumpla el antecedente. Es lo que estaba tratando de decir, porque se pueden hacer triángulos que tengan lados mayores que los otros dos que no tienen un ángulo recto.
A: ¿Me mostrás cómo sería? (M dibuja un triángulo acorde a lo que quiere mostrar).
M: Entonces la propiedad al no ser recíproca no podés asegurar que al consecuente al ser cumplido, el antecedente también.
A: Si, es verdad. Viéndolo de esa manera ya la [pregunta] b.3 no la respondí porque no lo estaba pensando como él.
E: Algo pusiste.
A: Puse: no
E: ¿Cuál es la [pregunta] b.3?
A: De un triángulo dado, se informa que no tiene ángulo recto. Según la propiedad enunciada, ¿puedes asegurar algo sobre los lados del triángulo?
M: Yo puse, no, que el antecedente no se cumple, no significa que el consecuente tampoco. Lo mismo que antes: que no tenga un ángulo recto no significa que no tenga un lado que sea mayor que los otros dos.
E: Y vos cuando pusiste "no", ¿qué querías decir, que no lo sabías responder o que no se puede decir nada?
A: Que no podía asegurar nada. Es lo que quise explicar.
E: ¿Estás diciendo lo que dice él?
A: No, sobre lo mío. Y si lo ve del lado del antecedente y del consecuente es lo que dice él. Tiene sentido.
E: Vos decís que si no tiene un ángulo recto, qué pasa.
A: Si no tiene un ángulo recto, vendría ser que hay triángulos que no tienen ángulo recto, y aun así, uno de sus lados puede ser mayor.
M: Es interesante ahí porque en el anterior, en el b.2, pusiste que sí.
A: Por eso, me demostraste que estaba equivocado.
M: Ahí te contradijiste, en el b.2.
A: Si, por eso en el b.3 no escribí nada directamente. Como vi que respondí mal la b.2, acá me acabo de dar cuenta, ya eso se me fue de las manos en el b.3. Se ve que algo habré hecho mal. Ahora el b.4.

M da una justificación incorporando un lenguaje que trasciende el contexto geométrico, habla de antecedente, consecuente y de la operatividad entre ellos de acuerdo con el conector condicional y sitúa esta operatividad en el contexto, además sostiene sus afirmaciones relacionando el planteo del ítem con la no validez de la propiedad recíproca (principio d). Las justificaciones de M y la apertura de A sobre las respuestas hacen que A mire retrospectivamente sus respuestas anteriores.

M: Si de un triángulo dado, se informa que ninguno de los lados es mayor que los otros dos, según la propiedad enunciada, elegir la afirmación correcta. Te daba 3 opciones. Puse que, al no cumplirse el consecuente, sabes que el antecedente tampoco. Lo mismo que expliqué en la tarea anterior.
E: Y vos (hacia A) por qué decías que no tenía un ángulo de 90 grados
A: Lo había dibujado. Sería algo así, como que tiene todos los lados iguales.

Una vez más, A justifica en base a los modelos inducidos por sus dibujos y M por la estructura del condicional.

Finalmente, el entrevistador realiza un cierre de la discusión para confirmar qué se comprendió. A incorporó el papel del contraejemplo en los casos vistos y la entidad de este en la comprobación de la falsedad de una aseveración.

E:	La tarea es inusual a la que estamos acostumbrados, pero me interesa saber qué les pareció, si les da puntas para aprender, qué aprender…
A:	Está bueno porque, primero que nada, comparamos nuestros trabajos, y las cosas que yo no entendía él me las supo explicar bien, cuestión que yo solo no me había dado cuenta.
E:	¿Y de la tarea en sí? Si encontraron algo nuevo.
M:	Yo lo vi como un juego de lógica. No podría decir que aprendí algo nuevo, diría que no. Me pareció divertido porque uso la lógica para resolver problemas
E:	¿Cómo sabés que es lógica esto?
M:	Y, tenés reglas, y usando esas reglas tenes que llegar a la conclusión lógica para resolver problemas.
E:	¿Y alguna de esas reglas podrías describir cuál es? Un ejemplo.
M:	Para resolver problemas usamos propiedades. Las propiedades están compuestas por un consecuente y un antecedente. El antecedente describe algo que tiene que pasar y el consecuente describe qué pasa si pasa el antecedente. A partir de ahí te va dando propiedades y tenes que resolver problemas con esas propiedades
E:	¿Y esas reglas las conocías?
M:	Las deduje.
E:	¿Ahora o antes?
M:	A lo mejor no la pensás, porque son tan básicas, pero las deducís tratando de resolver el problema. Aparte de eso, yo resolví todo usando eso excepto las veces que tuve que probar que una propiedad era falsa, en ese caso usas más matemática y dibujar, y si es verdad. Ahí se podría decir que se aleja más de la lógica, porque lo hacés práctico de probar si es cierto y si no. Pero el resto se resolvía más o menos con lógica. Personalmente me divierte.

M explícita la operatividad del condicional y del contraejemplo cuando quiere probar que una afirmación es falsa. Además, es interesante su definición de que las actividades están enmarcadas en lógica, en tanto se aplican reglas y se concluye conforme a ellas.

E:	Y esas reglas que decís, ¿las usabas antes en otras actividades de matemática o ahora aparecieron?
M:	Estas serían las reglas para esto, como es el de propiedades. Cada juego tiene sus reglas.
E:	¿Y estas reglas son aplicables a otros contextos que no sean geométricos?
M:	Estas reglas serían para propiedades. Propiedades que tengan un antecedente y un consecuente. Es un juego.
E:	Vos no pensaste así [se refiere al compañero].
A:	Yo lo estoy viendo como una afirmación y preguntas para comprobarlo o refutarlo.

E: ¿Y en qué te basaste para esas cosas?
A: Porque en el Taller de Ciencias estamos viendo eso. Estamos viendo afirmaciones que son hipótesis, con diferentes datos y experimentos con gráficos. Es una afirmación o hipótesis entre comillas. Y diferentes preguntas que te lleven para comprobar o refutar.
E: Te basaste en algo más práctico.
A: Si, menos lógica.
E: La forma que lo pensó él [por M] resultó novedosa.
A: Tiene sentido si, pero jamás lo hubiese pensado de esa manera.
M: Me gustan mucho los juegos, juego bastante y de tanto jugarlo me acostumbré a pensarlas así. Se me hace más fácil y divertido, tratar de identificar cuáles son las reglas básicas y hacer todo lo posible dentro de esas reglas.

En este párrafo hay un reconocimiento metacognitivo sobre el modo en que cada uno encara la tarea de razonamiento. A destaca la importancia del intercambio con su par para generar contraejemplos que él no había podido encontrar y argumentos diferentes que le hicieron notar sus errores. Además, A reconoce que su forma de concluir es mediante la comprobación práctica, experimental o inductiva. Por otro lado, M, si bien afirma no haber aprendido nada nuevo, verbaliza un modelo del condicional, independiente del contenido, según reglas. M alega que su destreza en reconocer estas cuestiones se debe al ejercicio de juegos, donde hay reglas para actuar y llegar a conclusiones, mientras que A busca llegar a esas conclusiones por comprobación.

Conclusiones

Aunque con distintos registros y realizaciones diferentes, M y A tienen un intercambio parejo pues defienden sus posiciones y ninguno se supedita directamente a los argumentos del otro. Hay escucha de los argumentos, entendimiento de las definiciones involucradas, construcción de contraejemplos y esmero por construir un discurso persuasivo.

Desde el punto de vista cognitivo, este estudio de caso da cuenta de dos modalidades diferentes de construcción del modelo de inferencia condicional. Una de ellas, como en el caso de M, es recurrir al reconocimiento de un esquema lógico, haciendo funcionar el modelo explícito del condicional para obtener conclusiones, con capacidad de trabajar planos sintáctico y semántico, trascendiendo el contenido, y acudiendo, cuando es necesario, al pragmático para construir ejemplos y contraejemplos. La otra modalidad, la de A, es la de construir modelos interpretativos de las premisas y asegurar la validez, o no, en función de haber podido comprobar las premisas y respectivas conclusiones en base a sus conocimientos o creencias. Según lo analizado, en esta segunda modalidad, la construcción del modelo explícito del condicional resultaría más dificultosa y su evolución se ve favorecida por la tensión de tener que defender, contradecir y aceptar refutaciones frente a un par. Tal como señala Panizza (2015), se evidencia en este intercambio la importancia del interlocutor en la gestión de la discusión ya que razonar en el plano individual tiene limitaciones en los procesos de control. Los ajustes en el diálogo, en ambas modalidades, dan cuenta de la modulación pragmática en los razonamientos (principio d). En ambos estudiantes, la evolución en el aprendizaje se evidenció en la motivación para realizar la tarea y participar del diálogo, la autonomía para formular conclusiones y para solicitar o construir explicaciones, la capacidad de elaborar nuevas respuestas más adecuadas y de mejor uso de lenguaje específico. Además, se observó en M el desarrollo, explicitación y perfeccionamiento del discurso argumentativo y construcción de contraejemplos; en A, el asumir la importancia de los contraejemplos, observar la forma en que se construyen, controlar el condicional a un bicondicional y relacionar las premisas en lugar de limitarse a describir su contenido como forma de validar la conclusión. Estas competencias corresponden tanto a los estadios de razonamiento según la TMM (Johnson-Laird et al., 1992; García Madruga et al., 2002) y la construcción del modelo explícito del condicional, como a las competencias a desarrollar con la educación matemática (Niss, 2013). Los entrevistados no recurrieron espontáneamente a algún tipo de representación icónica (Bronkhorst et al., 2021), como los diagramas de Venn por ejemplo, para representar su pensamiento. Consideramos que recurrir a este tipo de representaciones requiere de una instrucción específica que trasciende la tarea matemática.

Respecto a las condiciones de enseñanza que habilitan competencias deductivas, a partir de este protocolo no podemos asegurar que el trabajo en un registro semiótico haya sido más favorable que en otro. Sí hay evidencia de que si la tarea es sobre un contenido cercano al individuo y focaliza sobre las inferencias básicas, se posibilita la resignificación de los objetos matemáticos y el pasaje por los distintos estadios del razonamiento (principio c) ya que se interpreta la información, se establecen relaciones entre las premisas superando la mera descripción de su contenidos, se formula una conclusión y se representan argumentaciones posibles para validar el razonamiento y progresar hacia el modelo explícito del condicional. Este progreso se ve favorecido por el diálogo sostenido entre pares, mediado por mínimas intervenciones del docente, una vez que ambos hayan completado la tarea por separado. Destacamos la importancia de la conversación entre pares como elemento de análisis (Bronkhorst et al, 2021).

Las tareas presentadas y la dinámica de intercambio entre pares fueron pensadas con el fin de mejorar la capacidad deductiva requerida en matemáticas, previendo el uso innecesario de la memoria de trabajo y ayudando a desarrollar estrategias para su manejo efectivo (Stylianides et al. 2004).

En consonancia con Carreira et al. (2020), consideramos que se deben brindar oportunidades en el aula para fomentar y reforzar el razonamiento deductivo, que sean específicas, planificadas y sostenidas en el tiempo. Nuestro trabajo da evidencia de una manera de hacer esto, mediante la “negociación” de significados en el contexto matemático, sin tener nociones formales y específicas de Lógica y sin limitarse a la actividad de la demostración matemática. Otro aporte que consideramos importante es haber incorporado la Teoría de los Modelos Mentales, que es una teoría de la psicología cognitiva, a una investigación en didáctica de la Matemática sobre la deducción, mostrando qué significa "razonar por modelos" y sumando saberes a los ya introducidos en otros trabajos precursores sobre el tema (Stylianides & Stylianides, 2007, Attridge & Inglis, 2013, Inglis & Simpson, 2009).

Nuestro trabajo futuro busca fortalecer esta investigación, reforzando nuestra hipótesis sobre la dinámica de enseñanza: tipo de tareas, recursos, interactividad, construcción de modelos alternativos, entre otros, y ampliar la experiencia a otros ámbitos, como la escuela secundaria, por ejemplo.

Nota

[1] El cuestionario completo online con las respuestas de M y A se encuentran en:
Test 1: https://drive.google.com/file/d/1aTr5iloVOFldc7AGmy_qbTRiAKNcw-f3/view?usp=sharing
Test2: https://drive.google.com/file/d/14_DfH2WK0VFqHfwmIgFLB5UHhJ-bNPGy/view?usp=sharing

Referencias

Attridge, N., & Inglis, M. (2013). Advanced mathematical study and the development of conditional reasoning skills. *PLoS ONE*, *8*(7), e69399. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0069399

Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C., & Goedhart, M. (2021). Student development in logical reasoning: Results of an intervention guiding students through different modes of visual and formal representation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *21*(2), 378–399. https://doi.org/10.1007/s42330-021-00148-4

Carnelli, G., Cesaratto, E., Falsetti, M., Formica, A., & Marino, T. (2018). Matemática en contexto. *Textos básicos Nro. 19*. Ediciones UNGS.

Carreira, S., Amado, N., & Jacinto, H. (2020). Venues for analytical reasoning problems: How children produce deductive reasoning. *Education Sciences*, *10*(6), Article 169. https://doi.org/10.3390/educsci10060169

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37–65.

García Madruga, J., Gutiérrez, F., Carriedo, N., Moreno, S., & Johnson-Laird, P. (2002). Mental Models in Deductive Reasoning. *The Spanish Journal of Psychology*, *5*(2), 125–140. https://doi.org/10.1017/S1138741600005904

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics*, *1*(3), 4–11. http://www.jstor.org/stable/40247721

Inglis, M., & Simpson, A. (2009). Conditional inference and advanced mathematical study: Further evidence. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 185–198. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9187-z

Johnson-Laird, P. N. (1995). Inference and mental models. In S. E. Newstead & J. S. B. T. Evans (Eds.), *Perspectives on thinking and reasoning: Essays in honour of Peter Wason* (pp. 115–146). Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. (2006). *How we reason*. Oxford University Press.

Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. J. (1991). *Deduction*. Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychological Review*, *19*(4), 646–678. http://doi.org/10.1037//0033-295X.109.4.646

Johnson-Laird, P., Byrne, R., & Shaeken, W. (1992). Propositional reasoning by model. *Psychological Review, 99*(3), 418–439. https://doi.org/10.1037/0033-295X.99.3.418

Maróstica, A. H. (1969). Elementos Lógicos de la Educación Matemática. *Tarea*, *2*, 97–106.

Niss, M. (2013). Competencies in mathematics education – potentials and challenges. What's the point? What's new? What do we gain? What are the pitfalls?. *Cuadernos*, *11*, 85-94.

O'Brien, T. (1973). Logical thinking in college students. *Educational Studies in Mathematics*, *5*, 71–79. https://doi.org/10.1007/BF00684689

Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer: Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos* (Vol. 4). Libros del Zorzal. Bs. As. Argentina.

Shaw, E. (1999). A guide to the qualitative research process: evidence from a small firm study. *Qualitative Market Research: An International Journal*, *2(*2), 59–70. https://doi.org/10.1108/13522759910269973

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). The mental models theory of deductive reasoning: Implications for proof instruction. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 665–674). ERME.

Stylianides, A., Stylianides, G., & Philipous, G. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 133–162. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017671.47700.0b

Vargas, F., & Stenning, K. (2020). Logical Reasoning beyond Classical Logic: An Illustration with Pythagoras Theorem. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1). Article em0547. https://doi.org/10.29333/iejme/5883

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429–439. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00006-1