

O conceito de derivada no Compêndio de Álgebra de José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo

The concept of derivative in the Algebra Textbook by José Sebastião e Silva and José da Silva Paulo

Circe Mary Silva da Silva 

Universidade Federal de Pelotas e Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
cmdynnikov@gmail.com

Resumo. Este artigo tem o objetivo de caracterizar a abordagem do conceito de derivada proposto no Compêndio de Álgebra para o 6º e 7º anos dos Liceus, à época, em Portugal pelos autores José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo. Para tal foi realizado um estudo que teve como objetivo analisar o livro didático (em suas edições de 1956 a 1974), o caderno escolar de Mária Almeida – considerados como elementos estruturantes da cultura escolar – com base na teoria dos três mundos de David Tall. A metodologia qualitativa seguiu os seguintes passos: busca das fontes (livros e cadernos escolares), organização das fontes, seleção das unidades significantes e interpretação dos dados. Concluí que não houve alterações da abordagem do conceito de derivada de 1956 a 1974 e que esta pode ser entendida como corpórea, mesclada com simbólica-formal, na linguagem de Tall.
Palavras-Chave: cálculo diferencial; história do ensino; livro didático.

Abstract. This article aims to characterize the approach of the concept of derivative proposed in the Algebra Textbook for the high school, in Portugal at the time, by the authors José Sebastião e Silva and José da Silva Paulo. In this study, we focus on the textbook (in its editions from 1956 to 1974) and Mária Almeida's school notebook, considered as structuring elements of the school culture, and David Tall's theory of the three worlds. The qualitative methodology followed the following steps: search for sources (books and school notebooks), organization of sources, selection of significant units and interpretation of data. I concluded that there were no changes in the approach to the concept of derivative from 1956 to 1974 and that it can be understood as embodied mixed with symbolic and formal, in the language of Tall.

Keywords: differential calculus; history of teaching; textbook.

Contexto

Trago do passado esse personagem singular – José Sebastião e Silva (1914-1972) – para dialogar sobre o ensino do Cálculo Diferencial (CD), embora o passado não lhe conceda um



lugar, já que continua presente, pois suas ideias ainda possuem potencial para contribuir com reflexões e ações para o atual ensino da matemática.

José Sebastião e Silva doutorou-se em matemática, em 1949, na Faculdade de Ciências de Lisboa. Por suas investigações em Análise Funcional, abriu linhas de pesquisa que continuam a ser exploradas em muitos países. Por mais de 20 anos foi diretor do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. Suas contribuições foram na teoria dos espaços localmente convexos e teoria da distribuição (Ferreira, Guerreiro e Oliveira, 1999). Como educador de matemática desempenhou papel fundamental na atualização do ensino da disciplina, que iniciou em 1963.

José Duarte da Silva Paulo (1905-1976) foi professor de Matemática do ensino liceal e co-autor de livros didáticos para esta disciplina. Em 1940, colaborou na criação da revista *Gazeta de Matemática*, da qual foi um dos editores e o responsável pela secção 'Matemáticas Elementares'. Participou ativamente na Reforma da Matemática Moderna, em Portugal, sendo, em 1964, encarregado da regência de turmas de experiência piloto para atualização do ensino da Matemática.

Em 1951, na *Gazeta de Matemática*, Sebastião e Silva manifestava-se em prol do ensino do cálculo infinitesimal no ensino secundário, excluído em 1936 e retomado com a reforma de 1948. Ele ponderava, em suas argumentações, que “quando se não faz a sementeira – o que se pode colher?” (Silva, 1951, p. 1). Entendia que o primeiro contato com as bases do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) deveria acontecer ainda no ensino secundário, onde seria proporcionada ao aluno uma primeira aproximação do assunto e o aprendizado incipiente dessas bases. Segundo ele, as ideias fundamentais do cálculo infinitesimal (CI) residem nos conceitos de função e limite. Neste artigo, o autor antecipa a proposta didática que apresentou no livro de álgebra para os liceus, qual seja, partir do conceito de infinitésimo, por este ser mais fácil do que aquele de limite, seguindo-se o conceito de limite de sucessão e, finalmente, o de limite de função. Defendia ainda que a definição de Heine para limite, sendo mais natural, é preferível àquela de Cauchy/Weierstrass, com o conhecido “jogo” de ε e δ , que desnorteia os alunos. Postulava que o uso da definição formal, necessária à demonstração de certos teoremas, só seria necessária no ensino superior. Entretanto, toda essa preparação da análise não faria sentido se não fosse seguida das aplicações de derivadas.

Sebastião e Silva acreditava que o conceito de derivada deveria ser introduzido vinculado ao conceito de velocidade, quase que como um retorno a uma das motivações de sua criação.

Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física — é um erro grave de pedagogia. Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante dum corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espírito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo (Silva, 1951, p. 4).

A elementarização do CI – isto é, a sua inserção no ensino secundário como um saber escolar e não apenas prerrogativa do ensino universitário – começou a ocorrer em muitos

países na primeira metade do século XX. Ainda sem autonomia, os princípios básicos do CI apareceram junto à Álgebra, inicialmente, nos programas de ensino e na maioria dos livros escolares. Na França, isso não foi diferente: em 1905, os conceitos básicos de CI foram inseridos na Álgebra das classes segunda e primeira, ou seja, nos anos finais do ensino secundário. Entretanto, em 1982, na reforma dos programas de matemática, esses saberes foram transferidos à análise pois, segundo Artigue (2011, p. 18), “o colapso da álgebra das estruturas, o desaparecimento dos elementos da teoria dos conjuntos, que não é contrabalançado pela introdução de novos campos, oferece ao ensino da análise um espaço para se desdobrar”¹. Um espaço foi aberto para a análise no ensino elementar da matemática, antes dominado pela geometria.

Segundo Almeida e Matos (2014), em Portugal, no pós-guerra, ocorreram muitas mudanças curriculares nos liceus. Em 1947, Fernando Andrade Pires Lima foi o responsável por uma reforma nos liceus. Em decorrência desta, o CI foi reintroduzido na disciplina de álgebra e os programas de matemática de 1948 detalhavam o que deveria ser ensinado. No início da década de 1950, os livros únicos deveriam ser usados em todos os liceus. A escolha de tal livro, realizada mediante concurso, era atribuição de um comitê de professores de matemática do ensino secundário. A política de adoção do livro único era uma atribuição do Estado, cumprida pelo professor. Assim, o primeiro livro de Álgebra para o 3º ciclo liceal, selecionado, em 1950, para um período de 5 anos, foi o *Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo*, de António Augusto Lopes. Em 1955, a aprovação foi para o livro de José Sebastião e Silva, escrito em parceria com José da Silva Paulo.

O objetivo do presente estudo é caracterizar a abordagem do conceito de derivada no *Compêndio de Álgebra* dos autores José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

As investigações a respeito da história do ensino do Cálculo, em Portugal, têm recebido algumas contribuições de pesquisadores como Aires (2006), Aires e Santiago (2011), entre outros. A pesquisa de Abreu (2011) avança em relação às anteriores, trazendo, numa perspectiva histórica e didática, o cálculo diferencial no ensino secundário em Portugal e abordando o conceito de derivada. Ela concluiu que Sebastião e Silva fez uso do método heurístico para introduzir o CD.

Alicerces da pesquisa

Os livros didáticos estão dirigidos aos alunos, entretanto, quem o recruta para a sala de aula é o professor. Livro didático e caderno escolar são elementos estruturantes da cultura escolar, estão presentes como as cadeiras enfileiradas na sala de aula, o quadro negro, verde ou branco, entre outros (Vidal, 2009). Um olhar aprofundado a esses elementos pode iluminar o conhecimento do passado, dos saberes ensinados, que se encontram presentes na sala de aula, incluindo os registros dos alunos.

A metodologia qualitativa seguiu os seguintes passos: busca das fontes (livros e cadernos escolares), organização das fontes, seleção das unidades significantes e interpretação dos dados. A dificuldade para encontrar tais produtos da cultura escolar não impediu que a escrita dessa história fosse realizada. Os cadernos de alunos que, em geral, são descartados, constituíram-se no primeiro e grande desafio, o qual foi superado com o auxílio de Mária Almeida², que os guardou em seu acervo particular e disponibilizou à autora.

No intuito de interpretar e historizar práticas culturais, o livro didático foi o foco central, no qual busquei identificar como os autores Silva e Paulo abordaram o conceito de derivada. O primeiro acesso foi a segunda edição de 1957, mas era importante lançar um olhar às demais edições, principalmente à primeira, para analisar se nelas se encontram alterações. Edições dos anos 1956, 1957, 1958, 1960, 1963, 1968, 1970, 1972, 1973, 1974, que podem ser encontradas na Biblioteca Nacional de Portugal (BNP) e em acervos particulares, fazem parte da coleta de dados.

Mais de vinte anos após o lançamento da primeira edição, os conteúdos de Cálculo, conforme apresentados no livro, continuaram a ser utilizados em sala de aula dos liceus, como mostram os cadernos da aluna Mária Almeida, de 1978, disponibilizados à autora³. Os cadernos dos alunos como registros de uma prática vivida em sala de aula foram tomados como exemplos do ensino do CD, o que permitiu constatar que o ensino de derivadas estava presente na disciplina escolar de matemática.

A teoria dos três mundos de David Tall (2013) possibilitou uma base teórico-metodológica para a análise dos dados coletados, no que se refere à abordagem do conceito de derivada. A ideia dos três mundos serviu como inspiração e base para escolhermos as categorias de abordagens apresentadas no Compêndio de Álgebra de 1956. Esta teoria contribui para uma teoria de aprendizagem matemática, ao propor que o pensamento matemático pode ser visto sob três aspectos: 1) mundo corpóreo (*embodied*), que é aquele relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, é um mundo de significado sensorial; 2) mundo simbólico, que é aquele relacionado às características dos objetos nas palavras tradicionais e familiares onde os cálculos podem ser feitos (ambos aritméticos e algébricos), e 3) mundo axiomático formal, que é aquele relacionado ao formalismo matemático dos conceitos.

Da matemática prática – formada por números, formas e espaço – o pensamento progride para uma matemática teórica – da álgebra e geometria euclidiana. “Enquanto a geometria se constrói através do aumento da sofisticação estrutural, o simbolismo se desenvolve por meio do controle operacional das operações incorporadas ao simbolismo manipulável que então tem propriedades estruturais que desenvolvem suas próprias formas de definição e prova” (Tall, 2013, p. 402-403). Finalmente, o terceiro mundo da matemática formal axiomática constrói um nível formal baseado na definição, teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais.

É no ensino secundário ou nos primeiros anos do ensino superior que os estudantes de matemática são apresentados às ideias do Cálculo. A abordagem tradicional é uma mistura de geometria, aritmética e álgebra; por exemplo, para encontrar a inclinação de uma função $y = f(x)$, de x para $x + h$ tal que, para a nova função $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, precisa-se calcular o limite quando h fica pequeno. Tall explica o quão problemático foi para Newton e Leibniz essa quantidade tornar-se arbitrariamente pequena.

Para Tall (2002), uma abordagem corpórea do Cálculo se concentra em ideias perceptivas fundamentais antes que seja introduzido qualquer tipo de simbolismo. No ensino, não começamos com as ideias formais de limites, mas com ideias intuitivas de representações gráficas de funções. Ele exemplifica: “[...] a inclinação de um gráfico tempo-distância é uma velocidade, e a inclinação de um gráfico tempo-velocidade é uma aceleração, então nos concentramos nos sentidos incorporados de distância, velocidade e aceleração, em vez da matemática subjacente mais simples em que cada uma é obtida da anterior como a inclinação de seu gráfico” (Tall, 2002, p. 12).

A partir dessa apresentação, escolhi uma categorização a priori para a análise do *Compêndio de Álgebra*, a saber: corpórea, simbólica e formal. Como a categoria corpórea ou intuitiva estava muito presente nas ideias de Sebastião e Silva, desde 1951, decidi incluir sua concepção a respeito deste conceito com destaque. Nesse ano, ele publicou na *Gazeta de Matemática* sua defesa em prol do CI no ensino secundário.

Intuição segundo Sebastião e Silva

Poeticamente, em 1951, Sebastião e Silva, ao referir-se aos conceitos do CI no ensino secundário, destacou o papel da intuição na construção do conhecimento matemático:

As grandes ideias criadoras são sempre assim: o seu efeito sobre a mente juvenil é comparável ao do ar forte da montanha, que primeiro entontece, mas depois estimula e avigora. Dá-se o choque inicial — e logo depois começa a lenta, subterrânea germinação de ideias que só o tempo e a sã pedagogia podem levar a bom termo. Há que semear com antecedência as intuições primeiras para que a colheita se possa fazer no momento oportuno (Silva, 1951, p. 1).

Prosegue defendendo a ideia fundamental para o sucesso do ensino da matemática – conciliar o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade. Para ele, assim como para Poincaré, a matemática não é só lógica, é um “produto humano” e, assim sendo, está associada às necessidades do homem, e à sua existência na terra.

Em muitos textos de Sebastião e Silva, a importância da intuição no desenvolvimento do pensamento matemático é ressaltada. No *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática*, ele salienta: “Não esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica” e ainda: “Normalmente o aluno só pode tomar consciência da neces-

sidade de certo grau de rigor, depois de ter compreendido os assuntos em primeira aproximação ou de modo intuitivo” (Silva, 1975, p. 11). Autores como Bourlet (1907) e Felix Klein (1908) compartilhavam esse ponto de vista e, em seus livros, observavam tais preceitos. Aliás, Bourlet é um dos autores citados nas indicações bibliográficas de Silva & Paulo (1957). Bourlet (1907) apresenta o diagrama do movimento dos caminhos de ferro, considerando a partida de um trem de Paris para Bordeaux a fim de mostrar de maneira intuitiva como um problema real pode ser expresso por uma função que mostra a variação de velocidade dos trens rápidos e expressa em função do tempo.

Uma primeira crítica positiva ao *Compêndio de Álgebra* apareceu na Gazeta de Matemática em 1958. O professor de matemática Barros (1958) destacou a clareza da introdução do conceito de derivada e as relações da derivada com a cinemática, assunto da física do 6.º ano. Elogiou, também, as considerações de ordem intuitiva.

Um ensino com bases intuitivas foi defendido por Sebastião e Silva em muitas ocasiões: em 1957, por exemplo, ele dizia que o ensino da matemática deveria “[...] assentar numa base intuitiva, concreta, heurística. [...] sobretudo, o de levar o aluno a reelaborar, espontânea e progressivamente, os esquemas lógicos [...] até à sua fase mais racional e abstrata, para depois, inversamente, aprender a utilizá-los nas suas aplicações concretas” (Silva & Paulo, 1957, p. 31).

O ensino da matemática moderna e outras inovações tinham sua importância, mas o autor sempre foi cauteloso com os excessos. Nada de formalismos esvaziantes, as inovações devem ser realizadas, “[...] com extrema prudência e com o mais fino toque pedagógico se não quisermos criar nos estudantes uma repulsa invencível para a matemática ou levá-los à aquisição de um formalismo vazio, completamente esterilizante” (Silva, 1962, p. 25-26).

Para ele, o ensino deveria estar assente em diferentes níveis: em um primeiro, de base intuitiva; em um segundo nível, no qual a lógica começaria a ser desenvolvida e em um terceiro, aquele das ideias abstratas, ou seja, da formalização. O esquema da figura 1 procura dar uma ideia aproximada do que Sebastião e Silva propunha.

Abordagem da derivada

Os programas de álgebra para o 6.º e 7.º anos dos liceus, em 1948, trazem a seguinte ordenação dos conteúdos **para o 6.º ano**: variável e função; infinitamente grandes, infinitésimos, limites, operações com limites; continuidade de uma função; propriedades dos polinômios; operações algébricas; indeterminação; equações do 1.º grau, sistemas de equações; **para o 7.º ano**: análise combinatória; números complexos; equação do 2.º grau, equação biquadrada; equações irracionais; trinômio do 2.º grau; inequações problemas do 1.º e 2.º graus; o problema das tangentes e o das velocidades; **noção de derivada de uma**

função num ponto; função derivada; derivadas das funções algébricas e das funções circulares diretas; derivada da função de função.

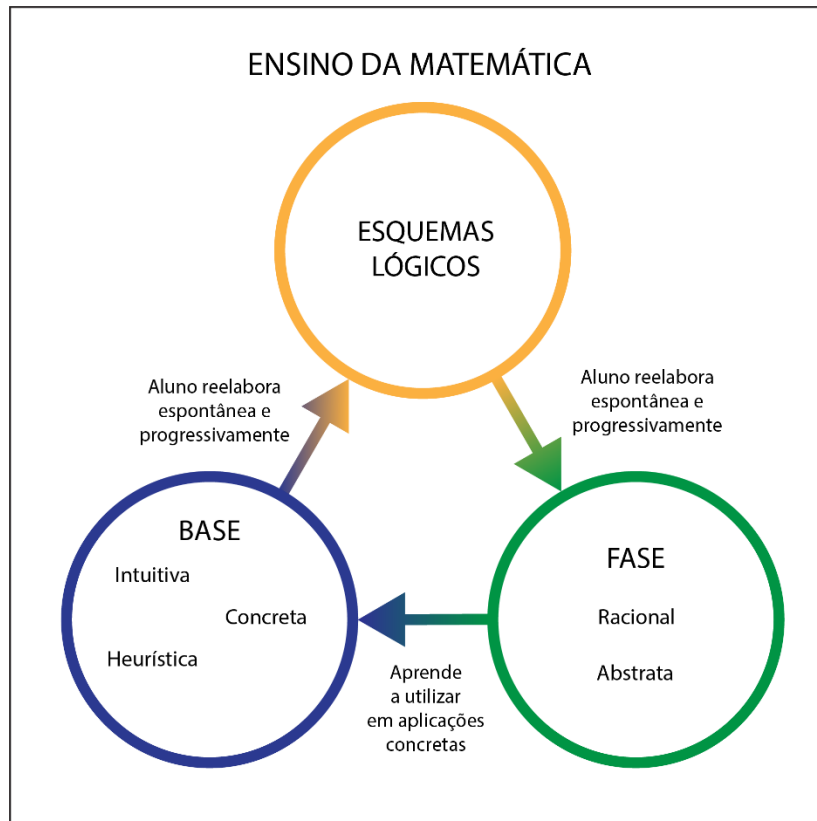


Figura 1. Níveis de aquisição dos conceitos

Não demoraram a surgir críticas a tal ordenação. A professora Maria Teodora Alves⁴ (1952, p. 24) criticou, na *Gazeta de Matemática*, os programas dizendo que no 7^o ano, “[...] surge desgarrado o conceito de derivada, perdido entre duas rubricas; problemas do 1^o e 2^o graus; discussão e fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos”, conteúdo da Trigonometria. Sua crítica era procedente. Por outro lado, os dois autores (Silva e Paulo), talvez por compartilharem das mesmas críticas, separaram a álgebra do 6^o e 7^o anos em dois volumes, deixando as derivadas no 6^o ano, dentro de uma sequência lógica: 1) evolução do conceito de número; 2) números complexos; 3) funções reais de variável real; 4) limites e sucessões; 5) limites de funções de uma variável; 6) funções contínuas; 7) derivadas; 8) polinômios numa variável; 9) frações algébricas.

A primeira edição do *Compêndio de Álgebra* ocorreu em 1956. O conceito de derivada seguiu a seguinte ordenação: função, limite, continuidade e derivada.

Para os autores, sem as aplicações da derivada, sem as suas concretizações, os alunos receberiam esse novo conceito como uma pura abstração, o que dificultaria a sua aprendizagem. O conceito de derivada é apresentado num extenso texto. Segundo os autores, ao olharmos um gráfico, o que primeiro desperta nossa atenção é a variação da sua curva. Por

essa razão os autores trazem uma exemplificação da variação de temperatura num intervalo de tempo. Um gráfico acompanha o texto (Figura 2).

A discussão gira em torno da interpretação do gráfico, em que são salientados os momentos de maior ou menor declive da curva. Um apelo à intuição transparece novamente: “Esta intuição que temos da maior ou menor rapidez com que, num dado fenómeno, uma grandeza varia com outra, é traduzida pelo conceito de derivada – um dos mais importantes de toda a matemática, pura e aplicada” (Silva & Paulo, 1957, p. 168).

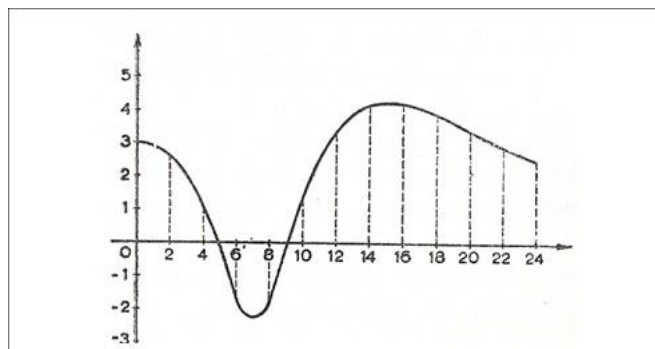


Figura 2. Variação de temperatura em função do tempo
Fonte: Silva & Paulo (1957, p. 168)

Na primeira edição de 1956, há uma explicação sobre o conceito de velocidade acompanhada de um exemplo; todavia esta foi excluída das edições posteriores. O problema trata da rapidez de trens: considerando que a distância de Lisboa ao Porto é de 330 km, supondo que a duração de uma viagem de carro foi de 5h12min, a divisão do número de quilómetros pelas horas despendidas dá 63,4 km/h aproximadamente. Seguem com a discussão, trazendo um gráfico e deduzindo que a velocidade verdadeira do movimento no instante t , representada por v , é dada por $v = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$.

O segundo exemplo, que permanece nas edições posteriores, é o do declive de uma reta e vem acompanhado de dois gráficos. Nesse exemplo, os autores definem declive ou coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos $A(x_1, x_2)$ e $B(y_1, y_2)$, o qual é dado pela razão $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Os declives são exemplificados por meio das equações de duas retas: $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$, mostrando que a primeira tem declive positivo e a segunda, negativo. Complementam, dizendo que, se uma reta “rodar” sobre si mesma, com um dos seus pontos tendendo para a posição vertical, o seu declive será infinito; assim uma reta paralela ao eixo dos y terá declive ∞ .

Esta ideia motivadora dos primeiros matemáticos que iniciaram o CD não era geralmente apresentada nos livros didáticos, conforme Myers (1992, p. 6), que constata: “[...] os livros didáticos são vistos como o fim do desenvolvimento de um facto, não como o início do desenvolvimento de um cientista”. Os longos diálogos que Silva e Paulo apresentam fogem a esta tradicional apresentação, por isso é interessante analisá-los.

Após ter explicado intuitivamente o conceito de declive, eles introduzem o conceito de tangente. Um gráfico auxilia na explicação (Figura 3). As várias retas que passam pelo ponto P_0 , insinuam um movimento difícil de ser desenhado, pois à época não estavam ainda disponíveis os softwares dinâmicos.

A noção de tangente é dada com o auxílio de uma representação geométrica, que a partir de uma curva qualquer C , que é representada pela função $y = f(x)$, tomando dois pontos P e P_0 , onde as coordenadas de P e P_0 são, respectivamente, (x, y) e (x_0, y_0) , já que a função é contínua, quando $x \rightarrow x_0$ a variável y tende para y_0 . Então o ponto P tende para P_0 .

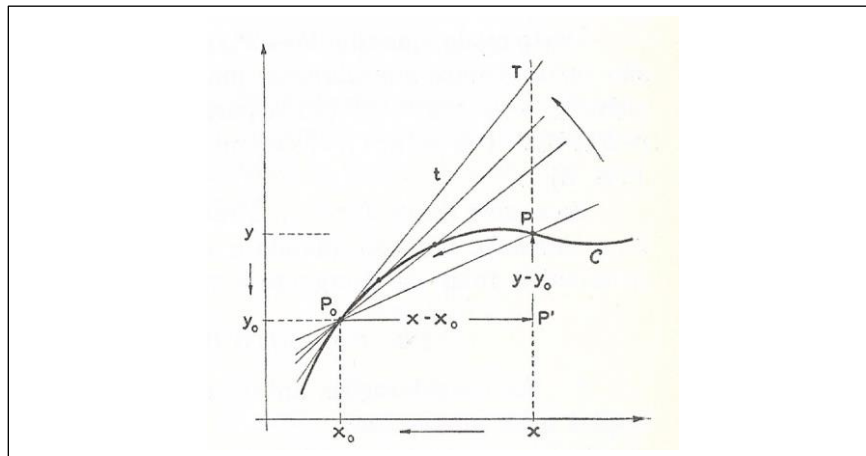


Figura 3. Tangente a uma curva
Fonte: Silva & Paulo (1957, p. 171)

Assim o declive da reta tangente PP_0 será $d = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, para $x \neq x_0$. Se $x \rightarrow x_0$, a variável d , função de x , tenderá a um limite finito. Logo,

$$d_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A reta t , que passa pelo ponto P_0 e tem declive d_0 , é chamada de tangente à curva nesse ponto. A conclusão apresentada é: “Quando o ponto móvel P tende para o ponto fixo P_0 , a secante P_0P tende para uma posição limite, t , que é a tangente à curva no ponto P_0 . O declive da curva no ponto P_0 é o declive da tangente à curva nesse ponto” (Silva & Paulo, 1957, p. 171).

Por meio dessas duas problematizações, que refletem o significado mecânico e geométrico, o solo foi germinado: o conceito geral de derivada, mais abstrato, será introduzido não como algo misterioso, mas com um significado que foi previamente motivado por suas aplicações.

É necessário, porém, sair do mundo sensorial ou corpóreo, conforme Tall (2013), e ingressar em considerações mais abstratas. Para tal, ele introduziu a noção de razão incremental de uma função $f(x)$ entre um ponto x_0 e x como sendo $\frac{k}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, onde h é o incremento dado a x e k o incremento de $f(x)$.

A partir daí, os alicerces estão prontos para apresentar a definição de derivada de uma função num ponto. “Definição: Chama-se **derivada da função** $f(x)$ em x_0 , e representa-se por $f'(x_0)$, o limite da razão incremental de $f(x)$ entre x_0 e x , quando x tende para x_0 (se esse limite existir). Em fórmula: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}$ ” (Silva & Paulo, 1957, p. 173). Quando a razão incremental não tem limite, nesse caso, $f(x)$ não tem derivada no ponto x_0 . A seguir, mostram exemplos numéricos de como calcular a derivada num ponto. O primeiro exemplo é o da função $f(x) = x^2$, na página 173.

A sequência de abordagem do conceito de derivada é aquela sugerida no esquema da figura 1; assim pode-se dizer que é uma abordagem que mescla corpóreo, simbólico e formal, na intersecção dos três círculos, como representado na figura 4.

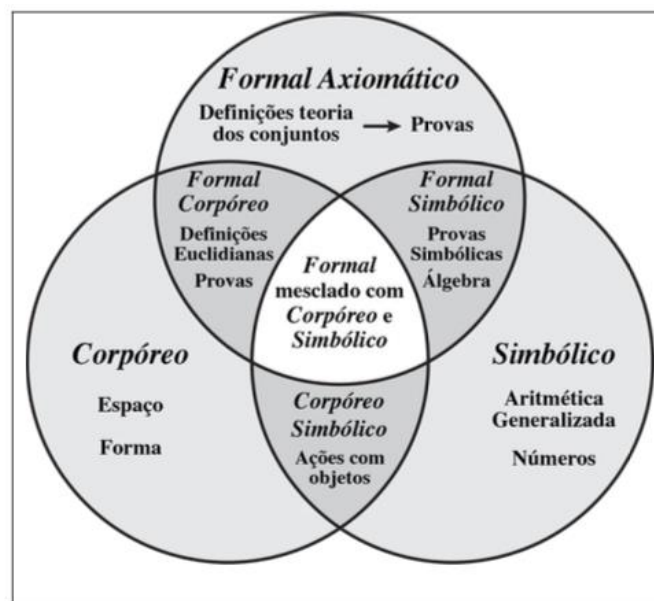


Figura 4. Categorias mescladas
Fonte: Silva (2023, p. 6)

Um diálogo com os cadernos

Os cadernos escolares são um produto da cultura escolar (Viñao, 2008). O caderno é um objeto-fonte capaz de revelar mais sobre as práticas educativas do que os livros. Ele é um testemunho, um registro mais próximo do que se fazia em sala de aula, uma vez que é produzido no contexto escolar, diferentemente do livro, que é um objeto produzido fora da escola, mas introduzido nela como um recurso didático.

O caderno, assim como o livro didático, é um outro elemento estruturante que integra o ensino e aprendizagem em sala de aula. Ele diz respeito àquilo que foi, de facto, ministrado na escola. Benito (2010) reflete sobre a cultura material, na qual inclui os cadernos escolares, dizendo que se pode aprender a partir deles acerca de coisas que se produzem na

escola. Nos acervos públicos e particulares encontram-se cadernos, que são registros pessoais de alunos que deixaram para a posteridade os seus testemunhos escritos.

Escolhi algumas páginas do caderno, as que considere representativas da introdução do conceito de derivada no *Compêndio de Álgebra* de Silva e Paulo (1974), assim como páginas do *Compêndio de Matemática* do coletivo de três autores, Garcia, Anjos e Ruivo (1976), que foram utilizadas no ensino secundário após o livro de Silva e Paulo.

A figura 5 mostra como foi introduzido o conceito de derivada, no caderno de Almeida (1978), o qual começa com a representação do declive de uma reta. As notas do caderno introduzem a derivada lateral conforme Garcia, Anjos e Ruivo (1976) e apresentam a derivada num ponto, conforme Silva & Paulo (1974, p. 217-218).

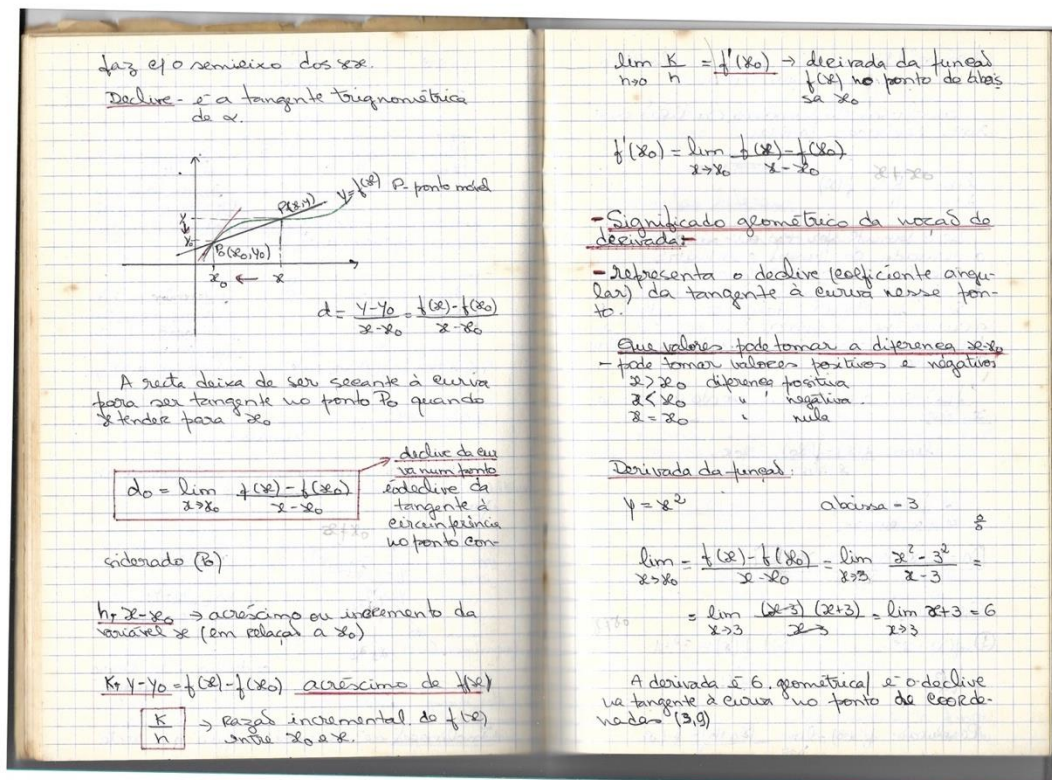


Figura 5. Extrato do caderno de Mária Almeida 21/4/1978 – derivada num ponto
Fonte: Acervo pessoal de Mária Almeida

Uma primeira confrontação entre o caderno e o livro fornece-nos informações valiosas sobre o uso das ideias de Silva e Paulo em sala de aula, segundo dão conta as anotações feitas no caderno. A representação da noção de tangente, que aparece na página à esquerda do caderno (figura 5), é muito semelhante ao que é mostrado na figura 3, inclusive com os mesmos símbolos. A identificação da reta tangente como a derivada segue, no caderno, a mesma ordenação que os autores usaram nas páginas 217 e 218 do livro, inclusive o mesmo exemplo de achar a derivada de $y = x^2$ no ponto $x = 3$ (no livro à direita e à esquerda no caderno) na figura 6.

<p>EXEMPLO: Calcular a derivada da função x^2 no ponto 3, se essa derivada existe.</p> <p>Tem-se neste caso $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$ e, portanto,</p> $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (\text{para } x \neq 3),$ <p>donde</p> $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$ <p>Será pois 6 a derivada de x^2 no ponto 3. É claro que o mesmo processo se aplica a esta função em qualquer ponto x_0:</p> $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \quad (\text{para } x \neq x_0).$ <p>donde</p> $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0.$ <p>Também podemos tomar para variável independente o acréscimo $h = x - x_0$, pondo $x = x_0 + h$. Será então:</p> $k = x^2 - x_0^2 = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2$ $\frac{k}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \quad (\text{para } h \neq 0).$ <p>donde finalmente</p> $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = 2x_0.$ <p>Estas duas maneiras de proceder são usadas, tanto uma como outra, no cálculo de derivadas a partir da definição. Porém, no § 3, serão deduzidas, com raciocínios análogos, algumas regras que, na prática, permitem achar rapidamente as derivadas de uma imensa variedade de funções.</p>	<p><u>Exercícios</u></p> <p>① $f(x) = x^2$ ② $f(x) = 3^2 + 1$</p> <p>$f'(3) = ?$ $f'(1) = ?$</p> <p>Resolva: $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$</p> <hr/> <p>$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$</p> <p>$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = 6$</p>
--	---

Figura 6. Extratos do livro (Silva & Paulo, 1974) e caderno de Mária Almeida de 1978
 Fonte: Acervo particular de Mária Cristina Ribeiro Correia de Almeida

O depoimento da autora do caderno é esclarecedor: “A professora usava um caderno próprio, de capa preta. Às vezes a partir dele escrevia no quadro, outra vezes ditava. Mas o livro recomendado era o *Compêndio de Matemática*”.

O livro de Silva e Paulo foi recomendado como livro-texto até 1968, conforme consta na capa deste. Em 1973, novos programas de matemática foram aprovados para o Curso Complementar. Os novos manuais escolares apoiaram-se fortemente em Sebastião e Silva, por exemplo, o *Compêndio de Matemática* do coletivo de autores Maria Madalena Garcia, Alfredo Osório dos Anjos e António Fernando Ruivo (1973, 1974 e 1975). Segundo Teixeira (2010, p. 325- 326), estes livros “[...] foram os sucessores pedagógicos e científicos directos dos manuais de Sebastião e Silva”.

Dowling (1998) afirma que os livros didáticos incorporam uma diversidade de configurações não matemáticas, como a sequência de tarefas. Realmente, o caderno de Mária Almeida traz a teoria, com ilustrações, exemplos resolvidos e, na sequência, uma lista de exercícios.

A análise do caderno mostra que, além do *Compêndio de Álgebra*, outro livro foi utilizado, talvez por trazer assuntos não abordados por Silva e Paulo – como uma complementação de assuntos que Silva e Paulo não abordaram, como aqueles sobre derivadas laterais e também por conter outros exercícios (figura 7).

Os exercícios que aparecem na figura 7, à esquerda, são do livro do coletivo de três autores e, à direita, o que está no caderno, indicando a página de onde eles foram extraídos.

2. Calcular, se existir, a derivada no ponto de abscissa 2, da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Tem-se:

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3 + 4h + h^2}{h} = -\infty$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 8 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 - 4h - h^2}{h} = +\infty$$

Não tem, pois, derivada.
Façamos a interpretação geométrica.

Quando a derivada é infinita, a reta em relação ao referencial cartesiano é vertical (paralela ao eixo do y)

As semitangentes estão no prolongamento uma da outra.

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ -x^2 + 8 & x > 2 \end{cases}$

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4 + 4h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3 + 4h + h^2}{h} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 8 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h + 3}{h} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+)$ Não existe derivada no ponto de abscissa 2

Figura 7. Extrato do Compêndio de Matemática (1976) e caderno de Mária Almeida (1978)
Fonte: Acervo pessoal de Mária Cristina Ribeiro Correia de Almeida

Conclusões

Para Sebastião e Silva (1951), o ensino deveria estar assentado em diferentes níveis: um primeiro, de base intuitiva, concreta e heurística; um segundo nível no qual a lógica começaria a ser desenvolvida e um terceiro no qual predominam as ideias abstratas, ou seja, o nível da formalização. Esse entendimento, incorporado no *Compêndio de Álgebra* de 1956, também está presente nos três mundos de Tall: um mundo corpóreo, um mundo simbólico e um mundo axiomático formalizado.

A abordagem do conceito de derivada no *Compêndio de Álgebra* dos dois autores apresenta-se inalterada nas diferentes edições de 1956 até 1974. Segue, basicamente, uma proposta defendida por Sebastião e Silva, em 1951, de introduzir o conceito de derivada intuitivamente, não esquecendo a sua dupla origem, que foi motivada por considerações geométricas (aquela da tangente a uma curva) e mecânica (como Newton formulou a derivada aplicada à velocidade).

Entretanto, não se pode ficar apenas restrito ao empirismo: aos poucos, o simbolismo deve ser introduzido até que se chegue a uma definição formalizada de derivada, na qual o conceito de limite é a base da definição. Considerando o referencial teórico de Tall, a abordagem de derivada pode ser entendida como corpórea, mesclada com simbólica e formal. O *Compêndio de Álgebra* foi utilizado nos liceus, uma vez que por muitos anos foi o livro único e ainda pela comprovação de suas ideias nos cadernos escolares. O livro *Compêndio de Matemática*, de Garcia, Anjos e Ruivo (1976) foi também utilizado, conforme mostra o

caderno da aluna, de 1978. Entretanto, a parte introdutória do conceito de derivada, conforme feita por Silva e Paulo, parece ter sido preferida àquela do coletivo de autores de 1976, que está mais sucinta. Entretanto, estes autores incluíram os conceitos de derivadas laterais e exercícios adicionais àqueles do livro de Silva e Paulo. O matemático e professor de matemática José Sebastião e Silva, com o seu coautor professor José da Silva Paulo, realizaram um “laço” entre uma matemática mais formal e uma matemática a ser ensinada, o que demonstra uma sensibilidade e preocupação com a aprendizagem dos jovens portugueses. A abordagem de um conceito abstrato – derivada – cuja compreensão está muito associada à maneira como o professor o apresenta pela primeira vez, mostra a abordagem dos dois autores para o ensino secundário nas décadas de 1950 a 1970 nos liceus portugueses.

Notas

¹ De plus, l’effondrement de l’algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, qui n’est pas contrebalancée par l’introduction de nouveaux champs, offrent à l’enseignement de l’Analyse un espace où se déployer. Sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement.

² Usei, na presente pesquisa, o acervo particular de António José de Almeida.

³ À época ela assinava como Mária Cristina Ribeiro Correia.

⁴ Maria Teodora Baptista Alves (1913-?) licenciou-se em ciências matemáticas em 1937, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Foi professora do ensino secundário em Portugal. Com um número elevado de publicações, entre 1946 e 1957, a professora não viveu no anonimato, foi “uma professora reformadora, com uma visão modernista sobre os objectivos do ensino liceal [...]” (Gouveia, 2023, p. 13).

Referências

- Abreu, M. D. O. H. G. (2011). *Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva: Cálculo Diferencial*. (Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática). Universidade de Aveiro.
- Aires, A. P. (2006). *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX*. (Tese de doutoramento). Universidade de Salamanca.
- Aires, A. P., & Santiago, A. E. (2011). As primeiras aplicações das derivadas nos manuais escolares do Ensino Secundário. In J. M. Matos, & M. Saraiva (Eds.), *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, (pp. 47–58). UIED, Universidade Nova de Lisboa. <https://www.ued.fct.unl.pt/sites/www.ued.fct.unl.pt/files/Livros%20UIED/Actas-CIHEM%20ordenado.pdf>
- Almeida, A. J., & Matos, J. M. (2014). *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)*. UIED e APM.
- Almeida, M. C. R. C. (1978). *Caderno de Matemática manuscrito*. Acervo pessoal da autora.
- Alves, M. T. (1952). O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal. *Gazeta de Matemática*, 51, 7–9.
- Artigue, M. (2011). Les questions de développement curriculaire à travers un exemple: l’enseignement de l’analyse en France au lycée depuis le début du XXème siècle. *Quadrante*, 20(1), 7–29. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22861>
- Barros, L. (1958). Crítica de livros. *Gazeta de Matemática*, 71, 44–46.
- Bourlet, C. (1907). *Précis d’Algèbre*. Librairie Hachette.
- Dowling, P. (1998). *The Sociology of Mathematics Education: mathematical myths/pedagogical texts*. The Falmer Press.

- Ferreira, J. C., Guerreiro, J. S., & Oliveira, J. S. (1999). Nota biográfica. In J. S. Silva, *Textos Didáticos* (pp. 3-5). Fundação Calouste Gulbenkian.
- Garcia, M. M., Anjos, A. O., & Ruivo, A. F. (1976). *Compêndio de Matemática. 2º ano, curso complementar*. Empresa Literária Fluminense.
- Gouveia, M. C. (2023). O brilho enigmático de Maria Teodora Baptista Alves. *REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 43, e2023025. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023028.id496>
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teubner.
- Klein, F. (2009). *Matemática Elementar de um ponto de vista superior*. (Vol. 1, Aritmética). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.
- Meyers, G. (1992). Textbooks and the sociology of scientific knowledge. *English for Specific Purposes*, 11(1), 3–17.
- Silva, C. M. S. (2023). Limites: Uma breve passagem nos livros brasileiros do ensino secundário. *Acervo: Boletim do centro de documentação do GHEMAT-SP*, 5, 1–25.
- Silva, J. S. (1951). A análise infinitesimal e o ensino secundário. *Gazeta de Matemática*, 49, 1–4.
- Silva, J. S. (1962). Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire. *Gazeta de Matemática*, 88, 25–26.
- Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (1º vol.). Edição GEP.
- Silva, J. S., & Paulo, J. S. (1957). *Compêndio de Álgebra*. (3º ciclo dos liceus, v. 1, 6º ano). (2ª Ed.). Livraria Popular de Francisco Franco.
- Silva, J. S., & Paulo, J. S. (1974). *Compêndio de Álgebra*. (3º ciclo dos liceus, v.1, 6º ano). (2ª Ed.). Livraria Popular de Francisco Franco.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 495–511). Macmillan.
- Tall, D. (2002). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in Mathematics. In L. M. Carvalho, & L. C. Guimarães (Orgs.), *História e Tecnologia no Ensino de Matemática* (pp. 1–28). IME-UERJ.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>
- Teixeira, A. (2010). Os manuais escolares de Matemática nos liceus portugueses (1947-1974). *Cadernos de História da Educação*, 9(2), 309–328. <https://seer.ufu.br/index.php/che/article/view/11448/6726>
- Vidal, D. (2009). No interior da sala de aula: ensaio sobre cultura e prática escolar. *Currículo sem fronteiras*, 9(1), 25–41. <http://www.Currículosemfronteiras.org/vol9iss1articles/2-vidal.pdf>
- Viñao, A. (2008). Os cadernos escolares como fonte histórica: aspectos metodológicos e historiográficos. In A. C. Mignot (Org.), *Cadernos à vista: escola, memória e cultura*. EDUERJ.