Aprendizagem de limites e continuidade em funções de uma variável real: um olhar para os obstáculos epistemológicos

Learning limits and continuity in functions of a real variable: a look at epistemological obstacles

João Santos
Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco
Brasil
jvictorol14@gmail.com

Naralina Oliveira
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Brasil
naralina.viana@ufpe.br

Marcílio Santos
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Brasil
marcilio.santos@ufpe.br

Resumo. Este artigo se refere a um estudo de conclusão de curso, que trata sobre os obstáculos epistemológicos revelados na aprendizagem de limites e continuidade de funções de uma variável real. Observamos, na perspetiva de Rezende (2003), Bachelard (1996) e Brousseau (1983), que algumas dualidades essenciais presentes no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral podem estar relacionadas com a resistência de um conhecimento anterior, podendo ocasionar erros ou interpretações inadequadas. Portanto, buscou-se responder ao seguinte problema: De que forma os obstáculos epistemológicos relacionados a dualidades são manifestados na aprendizagem de limites e continuidade de funções por discentes da Universidade Federal de Pernambuco do curso de Licenciatura em Matemática? Teve como principal objetivo analisar tais obstáculos epistemológicos, relacionando-os às dualidades essenciais. Para isso, adotamos como instrumento de pesquisa um questionário composto por 6 perguntas abertas referentes à noção de limite e continuidade. Com isso, foi possível verificar que os estudantes manifestaram alguns equívocos ocasionados por obstáculos epistemológicos ligados a limite e continuidade de funções. Essas dificuldades estiveram relacionadas principalmente com dualidade variabilidade-permanência e com a dualidade local-global, sendo também observadas as dualidades discreto-contínuo e finito-infinito. Concluímos,

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 33(1) 72-96
https://doi.org/10.48489/quadrante.33083
Recebido: outubro 2023 / Aceite: julho 2024

então, que o modo como os referidos conhecimentos são construídos pode gerar entraves manifestados pelos estudantes.
Palavras-chave: obstáculos epistemológicos; limites e continuidade; licenciatura em matemática; dualidades essenciais.

Abstract. This article refers to a study conducted as part of a graduation thesis, addressing the epistemological obstacles revealed in learning limits and continuity of functions of a real variable. We observe, from the perspectives of Rezende (2003), Bachelard (1996), and Brousseau (1983), that some essential dualities present in the development of Differential and Integral Calculus might be related to the resistance of prior knowledge, leading to errors or inappropriate interpretations. Therefore, it sought to answer the following question: In what way are epistemological obstacles related to dualities manifested in the learning of limits and continuity of functions by students at Universidade Federal de Pernambuco in the Mathematics Education degree? Its main objective is to analyse these epistemological obstacles, relating them to essential dualities. To achieve this, we employed a research instrument consisting of 6 open-ended questions related to the concept of limits and continuity. Through this, it was possible to observe that students exhibited certain misconceptions caused by epistemological obstacles associated with limits and continuity of functions. These difficulties were primarily linked to the duality of variability-permanence and the duality of local-global nature. Additionally, the discrete-continuous and finite-infinite dualities were also observed. We conclude, therefore, that the way in which these concepts are constructed can create hindrances manifested by the students.
Keywords: epistemological obstacles; limits and continuity; mathematics education degree; essential dualities.

Introdução

Estudar Cálculo Diferencial e Integral é um marco vivenciado por estudantes de alguns cursos de graduação. De repente, nos deparamos com uma variável que "se movimenta" numa curva se aproximando de um ponto com uma diferença "tão pequena quanto se queira", precisamos calcular a taxa de variação instantânea de uma variável em relação a outra, ou ainda, calcular áreas de figuras planas não muito familiares – "a área sob a curva". É razoável admitir que essa nova visão das funções na Matemática seja um tanto intimidante para os estudantes.

Em verdade, a introdução ao Cálculo[1] é um momento inicial para entender a Matemática com um olhar investigativo, explorando as funções de maneira até então não conhecida. Nos cursos de formação de professores de Matemática, o Cálculo pode oferecer subsídios teóricos para a explicação de conceitos e procedimentos da Matemática do ensino básico. Na estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é o primeiro componente associado às ideias do Cálculo, tendo por objetivo:

> Fazer o estudo qualitativo de funções reais, estudando limite, derivada e integral de funções, dando destaque a aplicações em outras áreas da ciência e sempre que

> possível relacionar a disciplina com assuntos vistos no ensino médio, como por exemplo análise de gráfico e cálculo de áreas de figuras planas. (Universidade Federal de Pernambuco, 2016, p. 45)

Assim, essa disciplina inicial pretende, ao fazer o estudo qualitativo das funções reais de variável real, possibilitar ao discente relacionar as noções de Cálculo com os conteúdos de Matemática da educação básica. Soma-se a isso a importância de compreender, a partir dessas noções, os fenômenos de aplicação em outras áreas da ciência.

É importante ressaltar, por outro lado, que para muitos alunos a experiência de estudar Cálculo não é algo positivo. Tal fenômeno pode ser constatado pelos baixos índices de proficiência nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, revelando uma existência de uma cultura de reprovação, como afirmam Oliveira e Raad (2012):

> Apesar da existência de bons livros didáticos, de boas práticas pedagógicas, de diferentes iniciativas no sentido de diminuir o insucesso dos estudantes em Cálculo: oferecimento de monitorias, revisão de conteúdos de Matemática básica, diminuição do rigor e valorização de aspectos intuitivos e aplicativos, ainda assim a reprovação persiste, permanece como um problema crônico, uma verdadeira tradição. (p. 135)

Acreditamos que essa tradição do insucesso no estudo do Cálculo pode estar relacionada a fatores além dos didáticos ou psicológicos, conforme aponta Rezende (2003). Questionando os artifícios empregados no ensino de Cálculo, o autor defende que

> O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de “infinito”, de “infinitésimos”, de “variáveis”, do que com “fatoração de polinômios”, “relações trigonométricas”, “cálculos algébricos”, etc. É bem verdade que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais, etc), mas é exatamente aí que se coloca a nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? Quando se fala de “falta de base”, de que “base” se está falando? (p. 36)

No Brasil, o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) acontece de forma trianual e constitui um acervo influente de pesquisas em Educação Matemática no país. Analisando os Anais da última década do ENEM, constatamos que não há um eixo específico direcionado ao debate de obstáculos epistemológicos, considerando sua abordagem teórica específica. Contudo, podemos verificar que as pesquisas envolvendo as disciplinas de Cálculo têm apresentado notoriedade em diversos fóruns da Educação Matemática. Assim, tomando como referência todos os eixos do ENEM, agrupamos estes em quatro categorias observando as semelhanças de abordagem nas áreas temáticas. Tais categorias estão explicitadas na Tabela 1, seguinte.

Tabela 1. Quantidade de trabalhos cujo tema envolve Cálculo Diferencial e Integral na última década do ENEM por categoria

Ano	Ensino-aprendizagem de Matemática	Currículo	Alternativas Metodológicas e/ou avaliativas	Recursos tecnológicos e didáticos
2013	6	3	3	5
2016	13	1	2	6
2019	9	-	1	7
2022	2	-	1	-

Utilizamos, dentro dessas categorias, uma busca rápida nos títulos e resumos, dispondo de palavras-chave como "Cálculo", "Limite", "Função" e "Continuidade". Com a leitura na íntegra dos trabalhos encontrados em cada categoria, percebemos que o enfoque das discussões tem sido o processo de ensino-aprendizagem e a utilização de recursos tecnológicos e didáticos. Todavia, notamos a ausência de debates centralizados nos obstáculos epistemológicos presentes na aprendizagem de Cálculo e, especificamente, na aprendizagem de limites e continuidade de funções. Diante disso, acentuamos a importância da pesquisa destes obstáculos na academia, em vista da importância significativa da reflexão sobre os conflitos gerados no processo de aprendizagem desse ramo da Matemática.

De uma forma geral, os obstáculos epistemológicos na Educação Matemática podem ser entendidos como uma resistência originada por um conhecimento anterior que em contextos diversos do qual ele foi estabelecido pode se revelar inadequado ou errôneo (Brousseau, 1983). Esses obstáculos, no âmbito do Cálculo, podem ser percebidos na presença de conflitos entre perspetivas na significação dos conceitos, explicitados pelo que Rezende (2003) denominou de dualidades essenciais.

Isto posto, traçamos como o problema desta pesquisa: De que forma os obstáculos epistemológicos relacionados com dualidades são manifestados na aprendizagem de limites e continuidade de funções de uma variável real por discentes da Universidade Federal de Pernambuco do curso de Licenciatura em Matemática?

Especificamente, buscamos identificar as dificuldades dos estudantes oriundas de obstáculos epistemológicos envolvendo limites e continuidade de funções de uma variável real. Além disso, procuramos identificar a relação entre as dificuldades manifestadas pelos estudantes e as dualidades essenciais no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo.

Obstáculos epistemológicos na Educação Matemática

Em contextos gerais, define-se um obstáculo como "o que obsta ou impede; estorvo; impedimento"[2]. A expressão epistemologia, por sua vez, significa um "ramo da filosofia que se ocupa dos problemas que se relacionam com o conhecimento humano, refletindo sobre sua natureza e validade"[3]. As definições anteriores portam um significado que, ao se transpor para o contexto científico, revelam um campo de estudo que enriquece os debates sobre a construção do conhecimento.

A convergência entre esses termos pode ser entendida inicialmente através do que Gaston Bachelard definiu como obstáculos epistemológicos:

> [...] é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1996, p. 17)

Essas contribuições iniciais tiveram grande influência na reflexão sobre a construção do pensamento científico e, no campo da Educação Matemática, a conceitualização dos obstáculos epistemológicos fez surgir diversas pesquisas procurando explicar a causa de dificuldades até então não exploradas sob essa perspetiva.

Diante destas contribuições, assumimos que o obstáculo epistemológico se manifesta como uma resistência de um conhecimento anterior, induzindo interpretações errôneas ou inadequadas dos estudantes frente a um novo conceito. Além disso, obstáculos desse tipo podem estar associados com a história do desenvolvimento da Matemática e a tarefa de superá-los enseja uma análise que permita tratar distintamente as dificuldades que por eles são geradas.

Considerações sobre a noção de limite e continuidade

Na história do Cálculo, a noção de limite permaneceu por muito tempo indefinida e, com o desenvolvimento deste conceito, a derivada e a integral passaram a ser definidas em termos de limite (Moraes, 2013).

Para discutir os conceitos fundamentais de Cálculo, é essencial referenciar uma obra central na área para garantir a confluência de ideias. Assim, apresentamos três definições cruciais para nossas discussões, que são consistentemente abordadas em diversas referências acadêmicas de Cálculo. Recomendamos o livro de James Stewart (2006) para um aprofundamento detalhado e exemplos ilustrativos.

1. Limite de uma função: O limite de uma função $f(x)$ conforme x se aproxima de um ponto a é definido como L, expresso por $\lim_{x \to a} f\,(x) = L$, se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Esta definição é fundamental para entender o comportamento das funções perto de pontos específicos.

2. Continuidade local: Uma função $f(x)$ é considerada contínua em um ponto a se o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é igual ao valor definido para a função em a, ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Note que se a função não está definida em a não podemos falar em descontinuidade neste ponto). Isso implica que a função não possui descontinuidades pontuais, garantindo uma transição suave no ponto a.
3. Continuidade global: Uma função $f(x)$ é dita contínua em um intervalo I se for contínua em cada ponto dentro desse intervalo. A continuidade global assegura que a função mantém seu comportamento suave e conectado através de todo o intervalo sem interrupções ou descontinuidades.

Assim, a partir da introdução do limite no Cálculo, obstáculos puderam ser notados quanto à abordagem de temas relacionados à continuidade e ao infinito, conforme Bell (1948, citado por Moraes, 2013). Um deles é caracterizar o limite como algo inalcançável, partindo da ideia de que a função se move em direção a um ponto, mas sem necessariamente o atingir. Cornu (1983, citado por Messias & Brandemberg, 2018) aponta que essa conceção pode levar a interpretações equivocadas, fazendo com que a aproximação seja enfatizada apenas no eixo das abscisas, sem considerar o valor limite no eixo das ordenadas. Segundo Messias e Brandemberg (2018), os estudantes podem considerar que o valor do limite será sempre igual ao valor da função no ponto, fator este influenciado por uma prática excessiva do cálculo de limites de funções polinomiais, pelo método da substituição direta.

Cornu (1991, citado por Domingos, 2003) verifica que conceções anteriores do conceito de limite são formadas antes mesmo do ensino formal. Nesse sentido, como pontua Celestino (2008), por muito tempo se entendeu que o limite não poderia ser atingido. O autor destaca ainda o obstáculo epistemológico relacionado com as noções de "infinitamente pequeno" e "infinitamente grande", o qual é ainda muito presente na construção da noção de limite.

No que concerne ao conceito de continuidade, Messias e Brandemberg (2015) discutem as imagens conceituais sobre a relação entre o limite e a continuidade de uma função, realçando que, no ponto de vista do aluno, a função tem seu limite em um ponto a depender da continuidade naquela região. Em outra pesquisa referente ao conceito de continuidade Messias e Brandemberg (2018), com base em algumas considerações teóricas, afirmam que o fato de uma função ser definida por partes implica numa conceção no aluno de descontinuidade, sendo esse pensamento incentivado pela presença de assíntotas nos gráficos das funções.

Dualidades essenciais presentes no processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

Os obstáculos epistemológicos que são originados em conceitos de Cálculo, conforme aponta Rezende (2003), predizem algumas dificuldades encontradas pelos estudantes. O pesquisador realizou, em sua tese de doutorado, um mapeamento das dificuldades de natureza epistemológica, evidenciando os macroespaços das dualidades essenciais previstas na aprendizagem do Cálculo. Esses macroespaços "não são estanques e nem constituem fronteiras bem-definidas, ao contrário, eles se entrelaçam e se inter-relacionam plenamente, sem hierarquia de valores ou graus de subordinação" (Rezende, 2003, p. 398). Discutimos neste capítulo contribuições da literatura acerca dessas dualidades, quais sejam: discreto-contínuo, variabilidade-permanência, finito-infinito e local-global.

Dualidade discreto-contínuo

Numa perspetiva histórica, a dualidade discreto-contínuo pode ser inicialmente percebida no debate sobre o problema histórico da medida de grandezas geométricas, sendo estas intuitivamente contínuas, mas tratadas através de procedimentos aritméticos discretos (Rezende, 2003).

No âmbito do Cálculo, Brolezzi (1999) afirma que

> [...] as ideias iniciais do Cálculo tiveram sua origem nas tentativas de compreensão da relação entre o discreto e o contínuo, já desde a visão estática grega, quebrada em parte pela descoberta pitagórica dos incomensuráveis, que deram a largada na corrida em busca de definições satisfatórias de número e infinito. A distinção entre o Repouso e o Movimento fará parte dessa busca. A consideração do movimento, fonte de inquietação no tempo de Zeno, acabou por abrir caminho a uma nova forma de abordar a relação entre o discreto e o contínuo, permitindo a criação do Cálculo Diferencial e Integral. (p. 41)

Numa conceção pedagógica, Rezende (2003) afirma que um distanciamento entre o discreto e o contínuo ocorre desde os níveis mais elementares da educação. Ao mencionar o caso do tratamento aritmético dado às dízimas periódicas e o caráter nebuloso dado aos números irracionais, o autor destaca:

> [...] a dízima periódica, uma denominação aritmética para as séries geométricas, é camuflada e "resolvida" aritmeticamente. E, com esta camuflagem, as séries são relegadas a um segundo plano no ensino básico de matemática. E, desse modo, torna-se inevitável o hiato entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e sua representação geométrica (contínua). Nesse sentido, seriam interessantes que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. [...] O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades da significação deste conceito, ao passo que, com esta representação, alguns elementos essenciais do pensamento "diferencial" – como a noção intuitiva de limite e as séries – já pudessem ser iniciadas. (p. 330-331)

Nesse sentido, existe uma lacuna presente na relação entre o discreto e o contínuo no que concerne às representações de certos conceitos matemáticos. A preferência por uma abordagem em detrimento de outra prevalece ao longo das etapas de escolarização, o que provavelmente pode conduzir a significações equivocadas pelos alunos.

Por sua vez, Zuffi e Pacca (2009), em uma análise sobre a linguagem dos professores do ensino médio na conceitualização das funções, mostram que a relação discreto-contínuo abordada é confusa: "Os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos "discretizados", sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos" (p. 22).

Com relação ao ensino de Cálculo, a noção de continuidade é estabelecida em termos de função, sendo ela definida localmente através da noção de limite. Quando essa noção é estendida para todos os pontos do domínio, o conceito de continuidade é globalizado, no entanto, não oferece muito sentido para os estudantes. Assim, o professor recorre à intuição geométrica, mostrando que a função é contínua quando não tem "saltos" ou "buracos" (Rezende, 2003). Por outro lado, Gutiérrez-Fallas e Henriques (2017) observam que as conceções que os alunos têm sobre continuidade de uma função deixam de ter sentido na ausência da representação gráfica, os conduzindo a apresentar dificuldades quando a função é definida algebricamente.

Outro caso de uma dualidade discreto-contínuo pode ser percebido no uso indiferenciado do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para tratar as integrais, como diz Rezende (2003). Segundo o autor, o estudo das integrais é uma oportunidade de introduzir a interface entre o discreto e o contínuo. Essa interface pode ser percebida nas tentativas de calcular áreas de regiões planas curvilíneas, com aproximações sucessivas, induzindo o conceito de integral. No entanto, tratar as integrais demasiadamente pelo TFC leva o aluno a perceber essa operação apenas como uma antiderivada, com um tratamento discreto, ignorando uma conceção contínua do processo.

Dualidade variabilidade-permanência

No processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, o tratamento das funções é o núcleo das definições, propriedades e resoluções de problemas discutidos na disciplina. A forma como a definição de função é estudada prognostica a atitude dos alunos frente à noção de variabilidade ou permanência de objetos matemáticos.

Rezende (2003) atesta que a maneira como o conceito de função é abordada no ensino fundamental e médio provoca desvios de natureza epistemológica no ensino de Cálculo:

> [...] a idéia de função é estabelecida pelos alunos, não no contexto da "variabilidade", mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis "x" e "y". O gráfico da função é, em geral, "plotado" através de uma tabela em que os valores "notáveis" são escolhidos pelo professor. A curvatura das curvas que

> compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo professor que tenta convencer o aluno, pelo acréscimo de mais pontos, ou mesmo através de um sofisticado programa computacional, que a única possibilidade é a dele – professor. (p. 344)

Logo, o tratamento estático dado às funções revela que o conhecimento sobre a variabilidade de grandezas fica em segundo plano. Como afirma Rezende (2003), essa ideia de função não está incorreta, pois inclusive é uma das formas como alguns teóricos a conceituam, mas esse caminho vai de encontro à história do Cálculo, constituindo um obstáculo epistemológico significativo à noção de interdependência entre quantidades variáveis.

Se não bastasse o tratamento dado às funções como uma correspondência estática durante a educação básica, no ensino superior essa abordagem perdura, provavelmente ocorrendo concomitante a um curso inicial de Cálculo, agora acrescida de uma formalidade característica dos cursos superiores de Matemática. Silva e Rezende (1999) apontam que é na relação entre conjuntos ou na correspondência entre seus elementos que reside, preferencialmente, a conceitualização das funções no ensino superior: "É a idéia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento f(x) de outro conjunto B, segundo uma relação definida de A em B. Esta interpretação é estática e tem um caráter mais formal que as demais" (p. 32).

Considerando que essa conceitualização, e apenas esta, seja feita num momento em que se pretende preparar os alunos para adentrar em conceitos de limites e derivadas, tal processo pode fixar o olhar dos alunos para o Cálculo sob um viés algébrico. Esse viés é reforçado nos conceitos de derivada e integral definida.

> Com efeito, com o descolamento da dualidade discreto/contínuo do conceito de integral, estimulado principalmente pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, o ato de integrar é identificado pelo aluno ao ato de encontrar a antiderivada da função do integrando. [...] Já no que toca ao conceito de derivada o problema é muito mais sério. [...] Interpretá-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza [...]. (Rezende, 2003, p. 350)

Logo, caracterizar a integral meramente como uma antiderivada, ou impor à derivada uma interpretação unicamente geométrica – "o coeficiente angular da reta tangente" – lançando mão de uma exaustiva apresentação de técnicas de derivação e integração, talvez explique porque lidar com atividades envolvendo um sentido aplicado dos conceitos, por exemplo, parece ser uma tarefa árdua para muitos alunos de Cálculo.

Dualidade finito-infinito

A noção de infinito não é uma construção de fácil assimilação. Perguntas sobre o quão grande é o universo, ou como podemos contar grandes quantidades, são indícios da discussão sobre a dualidade finito-infinito. Na Matemática, o infinito se revela em diversos momentos, seja no conceito de retas e planos, ou nas noções de limites e séries.

Em verdade, o conceito de infinito se manifesta como um obstáculo na Matemática, tendo sua conceitualização passado por mudanças e ruturas. Siqueira e Lorin (2020) relatam que, numa visão histórica, as primeiras discussões sobre o infinito mostram que o termo teve um significado de algo potencial, isto é, "uma ideia de infinito que não tem fim, e que servia exclusivamente como um qualificador de uma ação" (p. 556). O conceito potencial do infinito, contudo, não é estendido totalmente ao conceito de infinito atual. Este é encarado como um objeto da matemática, como fez Bernhard Bolzano na sua introdução dos conjuntos, sendo Georg Cantor o responsável por consolidar a noção de infinito atual, constituindo critérios para diferenciar conjuntos infinitos conforme sua cardinalidade (Siqueira & Lorin, 2020).

Rock (2003), citado por Siqueira e Lorin (2020), revela que os obstáculos manifestados pelos alunos em relação à noção de infinito são reflexo dos obstáculos epistemológicos encontrados no desenvolvimento histórico do conceito. Sierpinska (1987, citado por Rezende, 2003), por exemplo, indica que nos estudantes predominam atitudes finitistas ou de infinito potencial.

Rezende (2003) aponta 4 níveis de significação da noção de infinito dado pelos alunos, relevando algumas semelhanças com a história da compreensão do termo, sendo eles: "infinito como algo que não tem fim; infinito como algo incontável; infinito como algo ilimitado; infinito como forma indeterminada" (p. 360).

Ademais, um caráter ingênuo com que os estudantes lidam com as operações infinitas é observado por Rezende (2003). Ao tratar sobre séries, por exemplo, surgem nos alunos sentimentos de estranheza e submissão às soluções e técnicas impostas:

> [...] esse sentimento de impotência por parte dos estudantes é fruto mais uma vez da formação matemática passiva que receberam. Obedecem aos "rituais consagrados" e às "convenções matemáticas" estabelecidas no processo pedagógico, aprendem a "jogar o jogo sintático" do ensino da matemática – se A então B – e ignoram o significado daquilo que fazem ou aprendem. (p. 364-365)

Já no que diz respeito ao tratamento das indeterminações matemáticas, Rezende (2003) percebe que os alunos transferem as propriedades conhecidas no "finito" para o cálculo dos limites.

> [...] pode-se perceber nas atitudes dos estudantes uma simplificação ingênua do cálculo dos limites. Não reconhecem as situações de indeterminação presentes em cada um dos limites e procuram traduzir e "resolver" as indeterminações através de uma espécie de álgebra do infinito. O interessante é que o infinito, que "não é nada", ou "é apenas um símbolo matemático", passa a se comportar agora como um número. (p. 366).

Portanto, podemos perceber que, na dualidade finito-infinito, soma-se à dificuldade de dar sentido ao conceito o fato de haver uma confusão na abordagem de operações que envolvem uma conceção de infinito. Não é de espantar essa atitude, considerando todo o questionamento histórico do que é o infinito – dentro e fora da Matemática.

Dualidade local-global

A dualidade local-global é um marco recente na história do Cálculo. Rezende (2003) afirma que essa dualidade não apareceu efetivamente na invenção do Cálculo, indicando que Newton e Leibniz, por exemplo, não faziam uma distinção entre o local e o global.

Sobre isso, o pesquisador apontou dois fatores que explicam essa ausência: "uma primeira relacionada ao bom comportamento das curvas frequentemente utilizadas nos cálculos de Newton" e "faltavam aos matemáticos dois conceitos fundamentais que pudessem vislumbrar a íntima relação da dualidade local/global com o Cálculo que acabavam de 'inventar': a noção de limite e o conceito de função" (Rezende, 2003, p. 376).

Sobre o conceito de função e sua relação com o trânsito local-global, Olimpio Júnior (2006), acerca da afirmação de que a definição formal de função é um tanto estéril como também abstrata, argumenta:

> [...] no contexto do Ensino Médio, o foco está localizado na exploração global das chamadas funções elementares. Como são inexistentes (ou são poucas) as singularidades nessas funções e o foco é global, uma exploração mais atenta aos componentes da definição de função não seria recomendável, até porque o tempo sequer é suficiente para que as próprias funções elementares sejam completamente exploradas. Além disso, questões de limite, continuidade e diferenciabilidade não são usualmente tratadas neste contexto. [...] se o foco sobre o conceito de função no Ensino Médio é global e os conceitos locais de limite, continuidade e diferenciabilidade não são ali estudados, qualquer exploração local do conceito tornar-se-á, de fato, estéril. (Olimpio Junior, 2006, p. 210-211)

No entanto, no contexto do Ensino Superior, os conceitos locais devem ser trabalhados, do contrário, prejudicaria o desenvolvimento do estudante (Olimpio Junior, 2006). No tocante a isso, Rezende (2003) explica ainda que a dificuldade em lidar com a dualidade local-global está associada à maneira como ocorre a passagem de uma perspetiva para outra, e isso acontece com destaque no estudo das derivadas.

> [...] pode-se dizer que a significação do conceito de derivada em um curso normal de Cálculo se estabelece em dois caminhos distintos: uma inicial, estabelecida no nível teórico pelo professor, que parte da definição local de derivada para estendê-la de forma "natural" para seu estado global; o outro, influenciado pelas técnicas de derivação, que realiza o caminho inverso. (p. 384)

O que se observa então é que além de uma abordagem ínfima ou inexistente de uma perspetiva local das funções na escolarização básica, existe um tratamento global para os principais resultados no ensino de Cálculo, associado ao uso imediato de técnicas de derivação, o que pode originar as dificuldades relativas à dualidade local-global.

Percurso metodológico

Em harmonia com Gil (2008) e considerando os objetivos do presente estudo, que é de identificar as dificuldades dos estudantes em limites e continuidade de funções, bem como relacionar as referidas dificuldades às dualidades segundo Rezende (2003), o percurso metodológico pode ser caracterizado do tipo exploratório e interpretativo. Quanto aos procedimentos, foi feito um estudo de campo, em que foi aplicado um questionário (contendo questões de Cálculo) aos estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, assumindo uma abordagem qualitativa.

Para corresponder aos objetivos especificados anteriormente, delimitamos como participantes da pesquisa os estudantes da Universidade Federal de Pernambuco do curso de Matemática-Licenciatura, matriculados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I do primeiro semestre letivo do ano de 2022. Nesta disciplina havia 43 estudantes matriculados, contudo no dia da aplicação do questionário, ao final da primeira unidade, apenas 28 participantes estavam presentes na aula. De forma a assegurar o anonimato, nos referimos aos discentes a partir do código C1, C2, ..., C28, de forma aleatória, sem qualquer relação lógica que possa os identificar.

A disciplina foi ministrada com uma abordagem no formato remoto, síncrono e via *Meet*, devido à pandemia da COVID-19, onde a docente utilizou o microfone e a câmara do seu celular para transmitir o desenvolvimento de todo o conteúdo por escrito e os áudios das explicações. No dia da coleta dos dados, na primeira parte da aula, a docente realizou uma revisão dos tópicos contemplados nas perguntas do questionário. O segundo momento compreendeu a aplicação do questionário com os estudantes presentes na aula, onde os estudantes resolveram as questões detalhadamente por escrito, tiraram foto e enviaram para o e-mail da professora. O instrumento de coleta de dados foi estruturado por um questionário composto por 6 questões abertas envolvendo a noção de limite e continuidade de funções de uma variável real.

Na primeira questão, exposta na Figura 1, solicitamos que o estudante expresse o significado da equação que contém o limite de uma função. A partir das respostas, esperamos identificar que dualidade pode estar presente no pensamento acerca do significado de limite de forma geral, sem necessariamente ser explícita uma função definida por uma lei de formação.

1- Explique com suas palavras o significado da equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

Figura 1. Questão 1 do questionário

Na segunda questão, exposta na Figura 2, solicitamos que o estudante calcule o limite, se o limite existir, de uma função algébrica. Nesta questão, objetivamos verificar como os discentes lidam com o limite de uma função que, recorrendo-se a uma substituição direta, resulta em uma indeterminação. Assim, pretendemos perceber que obstáculos podem estar sendo enfrentados na escolha por um método de resolução.

2- Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$, se o limite existir.

Figura 2. Questão 2 do questionário

Conforme a Figura 3, a terceira questão não é referente diretamente à noção de limite, mas com ela pretendemos observar quais são as possíveis dualidades relacionadas à dificuldade em expressar graficamente uma função por partes, uma vez que com este tipo de função é possível discutir a noção de continuidade.

3- Esboce o gráfico da função $\begin{cases} \frac{1}{x+2}, se\ x \neq -2 \\ 1, se\ x = -2 \end{cases}$

Figura 3. Questão 3 do questionário

Na quarta questão (Figura 4), é solicitado que os estudantes encontrem o limite de uma função na qual a variável x assume valores muito grandes. Visamos notar qual a atitude diante de operações envolvendo o infinito e, com efeito, que dualidades relacionadas com obstáculos na resolução da questão podem estar sendo manifestadas.

4- Encontre $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$

Figura 4. Questão 4 do questionário

Na quinta questão (Figura 5), a partir de uma função dada pela lei de formação e, explicitando o domínio, solicitamos que o discente discuta sobre a continuidade. O objetivo deste item é perceber que obstáculos os estudantes podem estar enfrentando diante de um viés local dado uma função real.

5- Seja $f\colon\ \mathbb{R}^+ - \{[0,1]\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$. f é contínua? Justifique.

Figura 5. Questão 5 do questionário

Por fim, na última questão (Figura 6), propomos identificar como se revelam as dualidades na discussão sobre continuidade a partir da função dada e do seu gráfico.

6- Abaixo encontra-se o gráfico da função $f(x) = \tan x$. O que podemos afirmar sobre a continuidade de f?

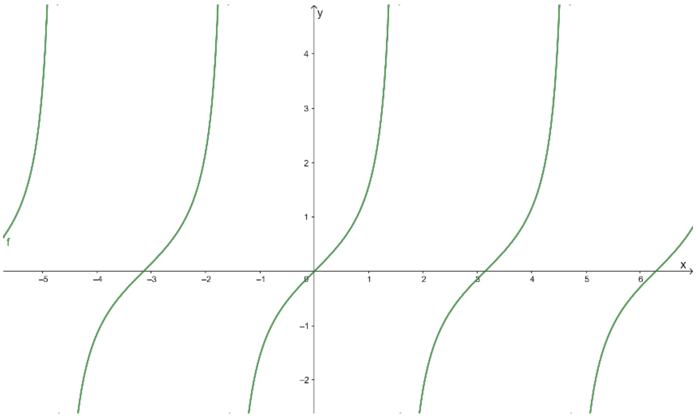


Figura 6. Questão 6 do questionário

Para realizar a análise das produções dos estudantes, buscamos em Cury (2007) direcionamentos sobre as respostas dos alunos na perspetiva da análise de erros. Segundo a autora:

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. (p. 60)

Após a etapa da coleta das resoluções da atividade, fizemos um levantamento quantitativo por questão, a fim de verificar a quantidade de respostas obtidas. Entre aqueles que conseguiram dar alguma resposta aos quesitos, procuramos identificar os caminhos percorridos até chegar à resposta final e os argumentos utilizados. A partir dos erros identificados foi localizado cada obstáculo epistemológico e sua relação com as dualidades discutidas por Rezende (2003).

A partir dessa perspetiva, nos interessa nesta pesquisa verificar a maneira como os estudantes se apropriaram do conhecimento matemático para responder aos questionamentos. Portanto, a partir da produção escrita dos participantes, dificuldades de aprendizagem foram reveladas e, dentro dos objetivos deste trabalho, associadas aos obstáculos que as originaram e às possíveis dualidades presentes no desenvolvimento do Cálculo.

Análise e discussão

Inicialmente, apresentamos o gráfico da Figura 7 com a quantidade de respostas obtidas entre os 28 participantes desta pesquisa por questão.

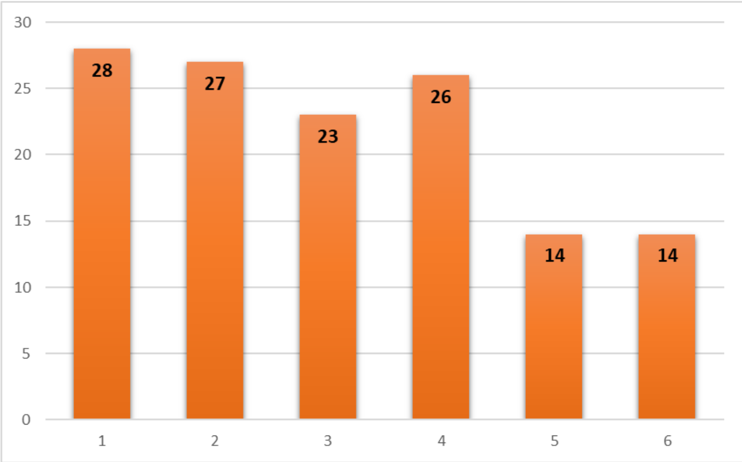


Figura 7. Gráfico com a quantidade de respostas obtidas por questão ($n = 28$)

As questões de 1 a 4 apresentaram alto índice de respostas produzidas, sendo a primeira questão respondida por 100% dos discentes. Por outro lado, as questões 5 e 6 tiveram as menores taxas de respostas obtidas, com apenas metade do número de participantes. Isso está relacionado, provavelmente, com a dificuldade em lidar com a função trigonométrica sob um ponto de vista diferente daquele experienciado na educação básica:

> As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos dá-se no estudo analítico da trigonometria, e uma delas é a não diferenciação que antes, no triângulo retângulo tinha um significado e agora apresenta outro foco. Evidencia-se exercícios mecânicos nas resoluções de equações e inequações com nenhuma contextualização, não familiarização com as fórmulas, dificuldade na interpretação de situações problemas, como também ênfase em atividades relacionadas a identidades trigonométricas (Nascimento, 2013, p. 4).

Some-se a isso o fato de haver uma abordagem local da função sob o ponto de vista de suas características intrínsecas, mas ignoradas nessa etapa de escolarização, como o estudo do domínio, imagem e paridade de funções, sobretudo as periódicas. A seguir, analisamos as respostas dadas por cada questão.

Análise da questão 1

Ao expressar a ideia sobre limite através da expressão dada, alguns estudantes manifestaram conceções relacionadas a uma perspetiva estática. Nas Figuras 8 e 9, apresentamos um recorte das respostas fornecidas pelos estudantes C2 e C16, nessa ordem.

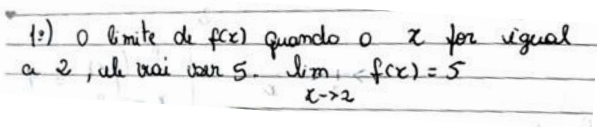


Figura 8. Resposta do estudante C2 à questão 1

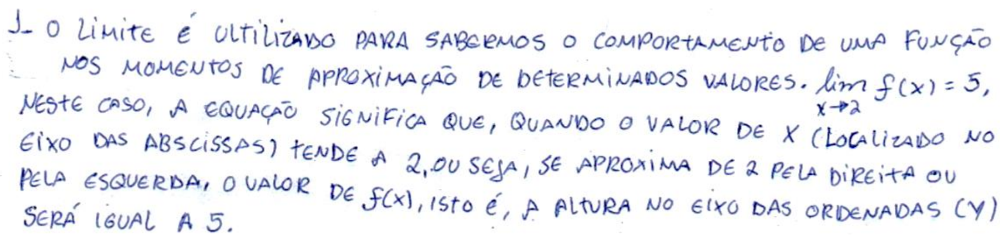


Figura 9. Resposta do estudante C16 à questão 1

Percebemos que o estudante C2 apresenta uma visão estática com relação aos eixos OX e OY. O estudante C16, por outro lado, deixa bem clara uma noção de proximidade com relação ao eixo OX, mas uma noção estática no eixo OY. O último estudante mostra ter mais proximidade com a perceção variacional, no entanto, ainda mostra distância para o conhecimento formal de limites. Acreditamos que essa conceção esteja relacionada a um obstáculo relacionado à dualidade variabilidade-permanência na noção de função, que em sua introdução é vista como uma correspondência estática entre os valores de x e y (Rezende, 2003).

Outros estudantes, como seja o exemplo de C1 (Figura 10), apenas interpretam a expressão em sua tradução literal:

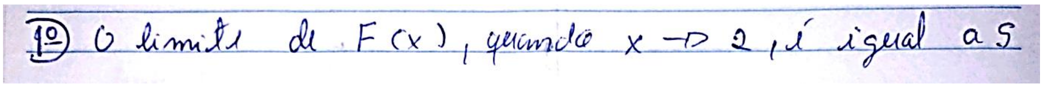


Figura 10. Resposta do estudante C1 à questão 1

Essa tradução literal parece-nos indicar a dificuldade do aluno em atribuir um significado para o limite. Acreditamos que, na tentativa de simplificar expressões polinomiais para poder aplicar a substituição direta do ponto de aproximação, a noção de limite pode ser confundida com a imagem da função naquele ponto.

Outras formas de se expressar para responder à primeira questão puderam ser notadas na análise das respostas dadas pelos estudantes. O participante C21 lançou mão da representação da gráfica (Figura 11) para apresentar a noção de limite, dando indícios de que tem uma compreensão mais abrangente, o que pode ser constatado pela presença de setas indicando aproximação dos pontos por ambos os lados, no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas:

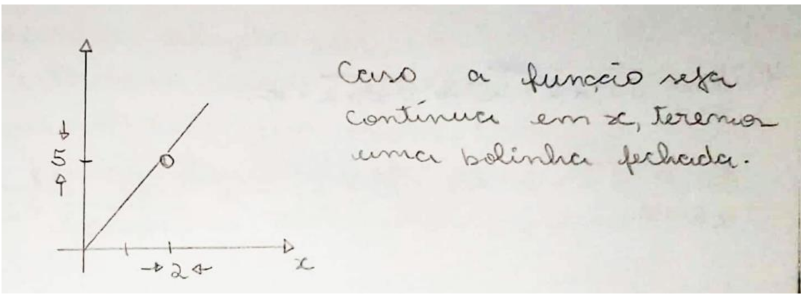
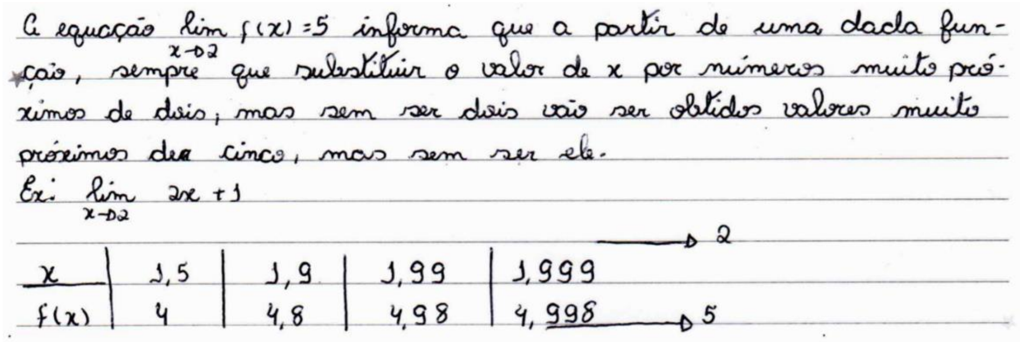


Figura 11. Resposta do estudante C21 à questão 1

É interessante notar que C21 leva em consideração o fato de que a função não está possivelmente definida em x=2, mas afirma que isso acontece caso a função seja contínua nesse ponto. Por sua vez, C26 (Figura 12) recorre à atribuição de valores muito próximos de 2, de forma a obter valores muito próximos de 5, demonstrando uma perceção dinâmica do conceito de limite:


A equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ informa que a partir de uma dada função, sempre que substituir o valor de x por números muito próximos de dois, mas sem ser dois vão ser obtidos valores muito próximos dea cinco, mas sem ser ele.

Ex: $\lim_{x \to 2} 2x + 1$

x	1,5	1,9	1,99	1,999 → 2
f(x)	4	4,8	4,98	4,998 → 5

Figura 12. Resposta do estudante C26 à questão 1

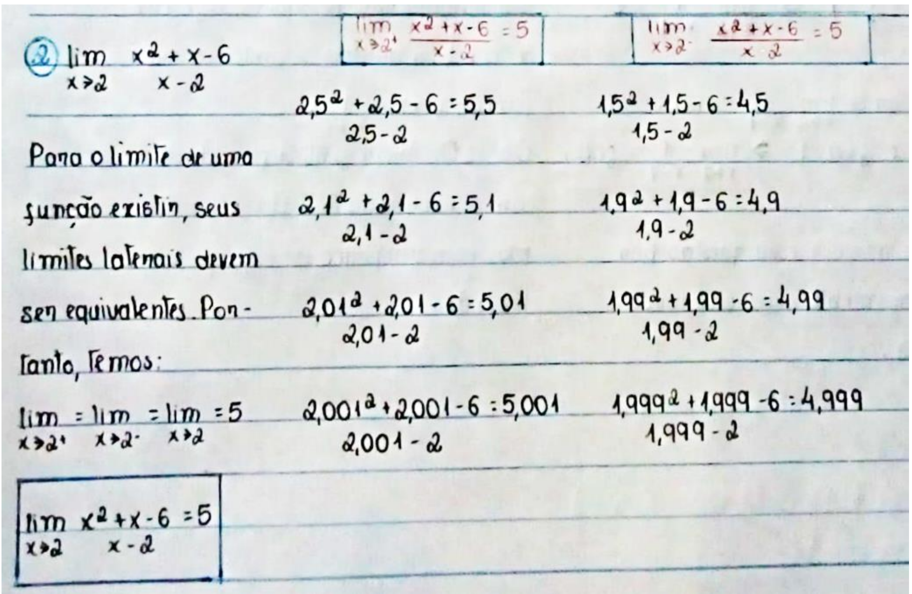
É de notar que o estudante considerou o limite em apenas um dos lados, com valores menores do que 2, sem nada afirmar sobre os valores muito próximos de 2, mas maiores do que 2. Chama-se atenção para o fato de que o participante enfatiza que os valores se aproximam, "sem ser dois", obtendo-se valores muito próximos de 5, "mas sem ser ele". Assim, deixa dúvidas se o limite pode ser atingido ou não, numa interpretação de que se o ponto de aproxima sempre, em conformidade com os resultados obtidos por Cornu (1981, citado por Celestino, 2008) e Messias & Brandemberg (2018).

O que se destaca nesta primeira questão é que, na maior parte, a dualidade variabilidade-permanência se manifesta quando os alunos se debruçam sobre a noção intuitiva de limite, em alguns casos demonstrando-se o limite como atribuição de um valor fixo, e não como o comportamento da função nas vizinhanças de um ponto dado, sendo certamente um vestígio da relação estática entre x e y descrita nas funções (Rezende, 2003).

Análise da questão 2

A segunda questão muito possivelmente é familiar aos participantes, fato este evidenciado pela alta taxa de respostas dadas que, em sua maioria, foram obtidas a partir da manipulação algébrica para "fugir" da indeterminação.

Destaca-se o caminho para encontrar o limite feito pelos participantes C13 (Figura 13) e C19 (Figura 14), que estimaram os valores para os quais $f(x)$ se aproximava, à medida que x se aproximava de 2.



$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5 \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$$

$$\frac{2{,}5^2+2{,}5-6}{2{,}5-2} = 5{,}5 \qquad \frac{1{,}5^2+1{,}5-6}{1{,}5-2} = 4{,}5$$

Para o limite de uma função existir, seus limites laterais devem ser equivalentes. Portanto, temos:

$$\frac{2{,}1^2+2{,}1-6}{2{,}1-2} = 5{,}1 \qquad \frac{1{,}9^2+1{,}9-6}{1{,}9-2} = 4{,}9$$

$$\frac{2{,}01^2+2{,}01-6}{2{,}01-2} = 5{,}01 \qquad \frac{1{,}99^2+1{,}99-6}{1{,}99-2} = 4{,}99$$

$$\frac{2{,}001^2+2{,}001-6}{2{,}001-2} = 5{,}001 \qquad \frac{1{,}999^2+1{,}999-6}{1{,}999-2} = 4{,}999$$

$$\lim_{x \to 2^+} = \lim_{x \to 2^-} = \lim_{x \to 2} = 5$$

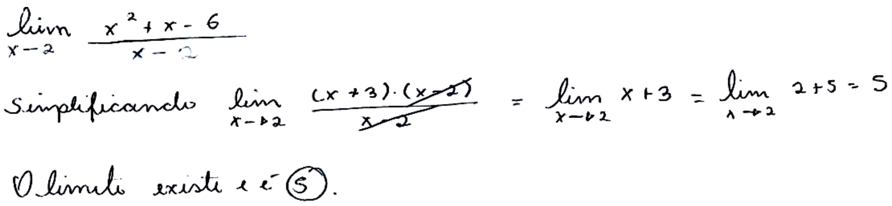
$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5}$$

Figura 13. Resposta do estudante C13 à questão 2

x	$\frac{x^2+x-6}{x-2}$	*Resultado*
1,99	$\frac{1{,}99^2+1{,}99-6}{1{,}99-2}$	4,99
2	$\frac{2^2+2-6}{2-2}$	$\nexists$
2,01	$\frac{2{,}01^2+2{,}01-6}{2{,}01-2}$	5,01

Figura 14. Resposta do estudante C19 à questão 2

É pertinente ressaltar que C13 e C19 também escolheram caminhos semelhantes para a primeira questão, utilizando aproximações. As demais respostas, em sua maioria corretas, foram obtidas através da fatoração de polinômios, como vemos na Figura 15.



$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$$

Simplificando $\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} x+3 = \lim_{x \to 2} 2+5 = 5$

O limite existe e é 5.

Figura 15. Resposta do estudante C3 à questão 2

Portanto, nesta questão, percebemos que grande parte dos estudantes conseguiu encontrar a resposta correta. Não identificamos diretamente um obstáculo e, com efeito, uma dualidade relacionada a este item, mas possivelmente o uso recorrente da substituição direta pode-se mostrar como um entrave ao significado de limite de uma função, como visto na questão 1.

No estudo do cálculo de limites, observamos que os alunos frequentemente adotam abordagens distintas que refletem diferentes aspetos da matemática. Uma abordagem popular é a algébrica, que se baseia no seguinte teorema: se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são iguais em todos os pontos de um intervalo aberto em torno de a, exceto possivelmente no próprio a, e ambos os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então esses limites são iguais. Este teorema é crucial ao simplificar expressões como $\lim_{x\to 2}(x^2+x-6)/(x-2)$ para $\lim_{x\to 2} x+3=5$, uma vez que a função original e a simplificada são idênticas em todos os pontos próximos de 2, exceto no próprio 2.

Por outro lado, a abordagem analítica se apoia no conceito de convergência de sequências: se x_n é uma sequência que converge para a e $f(x)$ tem limite L em a, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$. Esta forma de analisar foi observada nos alunos que substituíram uma sequência de valores próximos de 2 que permite inferir uma concepção mais dinâmica do que é um limite.

A combinação dessas abordagens fornece uma compreensão robusta dos limites, permitindo aos estudantes não apenas resolver problemas específicos, mas também apreciar as diversas maneiras pelas quais a matemática modela e resolve questões. É imperativo que os alunos sejam familiarizados com esses métodos para desenvolver uma perspetiva completa do Cálculo. Se por um lado a abordagem algébrica é mais prática e é o que normalmente se aprende nas disciplinas de Cálculo, a abordagem a partir de sequências é mais intuitiva na medida em que dá uma compreensão 'dinâmica' de estar se aproximando, simultaneamente, dos valores em OX e do limite. Para um aprofundamento teórico e prático desses conceitos, o livro "Curso de Análise" de Elon Lages Lima (2004) é recomendado.

Análise da questão 3

Na análise da terceira questão, percebemos a dificuldade dos estudantes em lidar graficamente com uma função definida por partes. Muitos recorrem à atribuição de pontos notáveis para o esboço do gráfico e, mesmo assim, encontram dificuldades para compreender o comportamento da função entre esses pontos. Observa-se essa situação nas Figuras 16, 17 e 18.

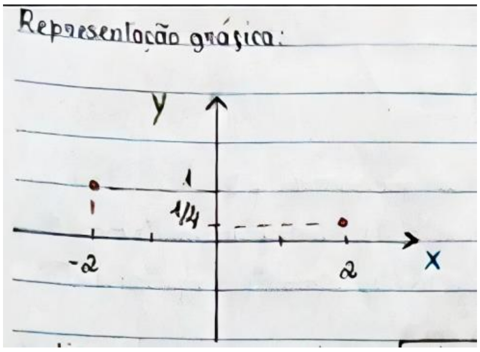


Figura 16. Resposta do estudante C13 à questão 3

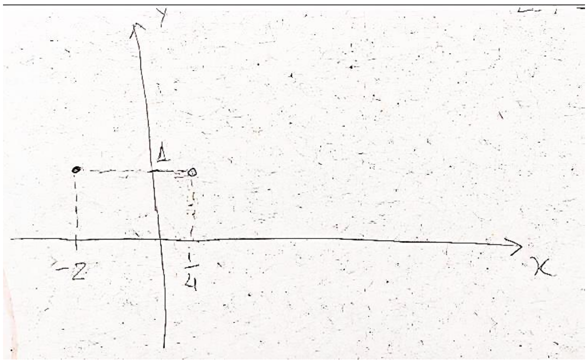


Figura 17. Resposta do estudante C18 à questão 3

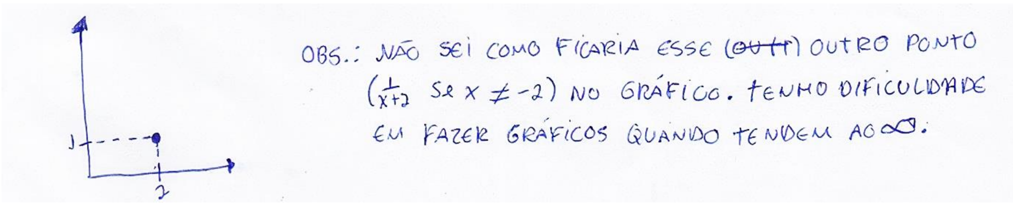


Figura 18. Resposta do estudante C16 à questão 3

Consoante a observação de Zuffi e Pacca (2008), a relação entre o discreto e o contínuo se mostra confusa, como é evidente na escolha dos pontos para o esboço do gráfico de C13, C18 e C16. Além disso, uma relação entre as dualidades discreto-contínuo e finito-infinito pode ser observada no comentário do estudante C16, quando o mesmo afirma que tem dificuldade para elaborar gráficos "quando tendem ao infinito" e aponta que não sabe como seria o gráfico em outro "ponto", ao se referir à parte da função definida como $1/(x+2)$ quando $x \neq 2$.

Análise da questão 4

Na quarta questão, notamos que grande parte da dificuldade dos estudantes foi lidar com limites envolvendo radicais. Sabendo que tanto $\sqrt{x^2+2}$ quanto x são grandes, quando x se torna grande, é necessário manipular algebricamente a função. Ainda assim, mesmo aqueles que demonstram certa familiaridade com manipulações algébricas, operam incorretamente com a noção de limites no infinito.

Nas Figuras 19 e 20, os estudantes C4 e C10, respetivamente, substituem a variável independente pelo infinito, num tratamento semelhante àquele dado aos números.

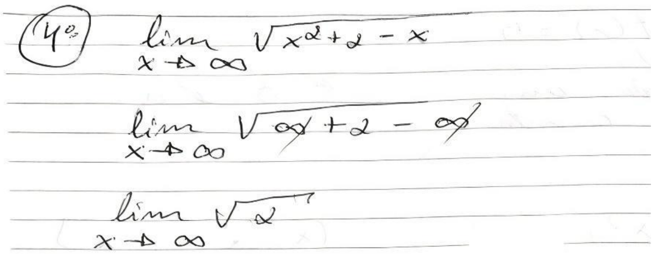


Figura 19. Resposta do estudante C4 à questão 4

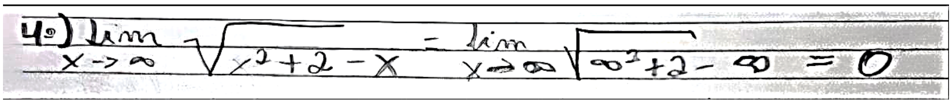
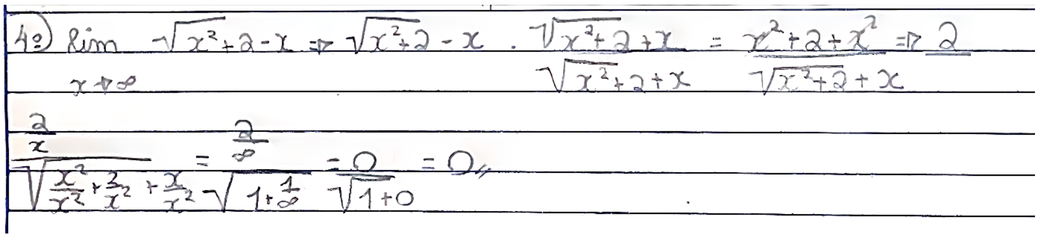

4º) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2} - x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{\infty^2+2} - \infty = 0$

Figura 20. Resposta do estudante C10 à questão 4

Caso similar ocorreu com o estudante C22 (Figura 21), que multiplicou o numerador e o denominador pelo conjugado radical, mas, ao fim do processo, substituiu o x pelo infinito:


4º) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2} - x \Rightarrow \sqrt{x^2+2} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} \Rightarrow 2$

$\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}+\frac{x}{x^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$

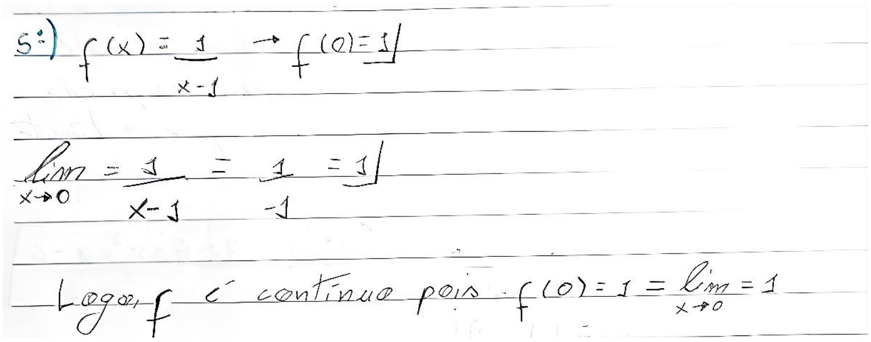
Figura 21. Resposta do estudante C22 à questão 4

Esse tratamento de resolver indeterminações, utilizando uma "álgebra do infinito", é discutido por Rezende (2003), quando este afirma ser a dualidade finito-infinito a origem de grandes obstáculos no Cálculo. Essa visão de Rezende fica clara, ao observarmos que os caminhos utilizados pelos estudantes nos limites no infinito foram análogos àqueles utilizados para resolver a segunda questão.

Análise da questão 5

A quinta questão gerou grande dificuldade entre os estudantes, devido à notação $f: R^{+-[0,1] \to R}$, que especificava o domínio da função fornecida. Entendemos que essa dificuldade tem origem na maneira como a função é apresentada, muitas vezes se utilizando de uma lei de formação, geralmente polinomial, que é contínua em todo o R. Uma função racional, por sua vez, é contínua em seu domínio.

Na Figura 22, destacamos a resposta do aluno C15 que, semelhante a outros participantes que responderam à questão, não compreendeu o domínio da função dada, ademais, concluindo que a mesma é contínua. Para isso, recorre à definição de continuidade, isto é, f é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, mas, ao mesmo tempo, utiliza um número fora do domínio de f.


5º) $f(x) = \frac{1}{x-1} \to f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = 1$

Logo, f é contínua pois $f(0) = 1 = \lim_{x \to 0} = 1$

Figura 22. Resposta do estudante C15 à questão 5

Assim, a dificuldade em interpretar a notação se revela como uma dificuldade conceitual. Não identificamos nesta questão indícios da dualidade local-global, ou de outra dualidade, descrita por Rezende (2003).

Análise da questão 6

Na última questão da pesquisa, também trabalhamos a noção de continuidade, desta vez utilizando uma representação gráfica da função $f(x) = tan(x)$, sem especificar o seu domínio. Como na questão 5, parte considerável dos participantes não conseguiu encontrar uma resposta. Entre aqueles que conseguiram, é perceptível que os estudantes discutiram a continuidade sem levar em consideração o domínio, com um olhar global sobre a função.

Na Tabela 2, trazemos um recorte de algumas respostas dadas na questão 6.

Tabela 2. Registro de respostas obtidas na questão 6

Estudante	Resposta
C4	*Analisando o gráfico, vejo que as linhas que cruzam o eixo x seguem uma sequência de 3 em 3 e são paralelas entre si.*
C10	*Não é contínua pois o gráfico está incompleto.*
C21	*Eu acho que f não é contínua em x porque não segue o padrão das outras funções.*
C24	*A partir desse gráfico podemos afirmar que a função não é contínua.*
C28	*A função f segue caminhos onde a função não existe, são chamados de assíntotas.*

O estudante C24 apenas afirma que a função não é contínua a partir da visualização do gráfico. Respostas semelhantes a essa foram encontradas em outros participantes, o que entendemos ser causado por um obstáculo relacionado à dualidade local-global (Rezende, 2003; Olimpio Junior, 2006). Já os estudantes C4, C10 e C21 têm interpretações semelhantes, e demonstram não conseguir identificar a continuidade em funções diferentes daquelas com comportamento gráfico “padrão”. Faz-se relevante observar a resposta dada por C28, o qual afirma que a função segue caminhos onde ela não está definida, sem nada afirmar sobre sua continuidade. Ao mencionar que esses caminhos são chamados de assíntotas, infere-se que o estudante tem consciência de que a função não está definida em certos pontos, o que poderia ser utilizado como argumento para discutir a continuidade de f.

Olimpio Junior (2006) enfatiza que esse tratamento global é um obstáculo epistemológico à noção de continuidade, surgindo então dificuldades em interpretar localmente as funções no Ensino Superior. Como pontua o autor, na etapa da educação básica, as funções discutidas são em sua maioria polinomiais, com um tratamento global por meio de representação gráfica.

Análise final

Como observado no Gráfico 1, o maior índice de respostas foi verificado nas questões 1, 2 e 4. Apesar de um alto número de respostas dadas, pudemos perceber alguns erros cometidos pelos estudantes ao se referirem ao limite de uma função. Na questão 2, esses erros em sua maioria são oriundos da dificuldade conceitual em simplificações de expressões algébricas. Alvarenga (2013), em seus estudos envolvendo expressões algébricas, ressalta que muitos destes erros são de natureza mecânica, cuja gênese está, não só mas também em processos algorítmicos.

Na questão 5, dificuldades conceituais puderam ser observadas, visto que grande parte dos estudantes não conseguiu afirmar nada sobre a continuidade da função, provavelmente por não terem conseguido interpretar a notação matemática apresentada. Silveira (2015) afirma, a este respeito, que a interpretação de textos matemáticos requer o conhecimento do vocabulário matemático que está diretamente relacionado ao nível de aprendizagem de conceitos.

As pesquisas de Tall e Vinner (1981) apontam que a imagem que os alunos têm do conceito de função nem sempre compreende a amplitude de sua definição formal, fato que pôde ser evidenciado na resolução das questões 1 e 4, onde os erros cometidos estão mais ligados a obstáculos ao conhecimento de função na perspetiva do Cálculo, a exemplo do tratamento estático dado às funções – dualidade variabilidade-permanência – e a noção de infinito fincada no olhar algébrico – dualidade finito-infinito.

O conhecimento anterior de temas como intervalos reais, conjuntos numéricos, relações e funções, obtido na educação básica, se mostra então resistente, figurando como um obstáculo à aprendizagem de limite e continuidade. Grande e Pires (2016) enfatizam que o referido obstáculo está relacionado com a forma como os estudantes aprenderam, se restringindo a manipulações técnicas, regras e algoritmos memorizáveis, sem necessariamente buscar diferentes tipos de representação para um mesmo objeto matemático. Isto foi percebido na resolução da questão 3 – a dificuldade em esboçar o gráfico de uma função definida por partes – bem como na questão 6, na qual a representação gráfica da função gerou entraves e erros cometidos nas respostas dos participantes desta pesquisa, o que aponta a manifestação da dualidade local-global.

Assim, pudemos constatar que existem obstáculos de natureza epistemológica à noção de Limite e Continuidade relacionados a algumas dualidades essenciais expostas por Rezende (2003). Essas dualidades nos permitiram observar que não apenas dificuldades "técnicas", como fatoração de polinômios, conhecimento de conjuntos, esboço de gráficos, entre outras, se fazem presentes na aprendizagem de Cálculo. A maneira como esses conhecimentos foram construídos também geram barreiras enfrentadas pelos discentes.

Considerações finais

Na reflexão sobre a aprendizagem de limites e continuidade no Cálculo devem ser levados em consideração fatores além daqueles relacionados à habilidade técnica de resolver limites de funções algébricas ou de identificar as condições necessárias para uma função ser contínua. Sobre a "falta de base" na aprendizagem de Cálculo, retomamos a indagação de Rezende (2003) mencionada nas considerações iniciais desta pesquisa: de que base se está falando?

Em verdade, pudemos verificar que é através de obstáculos epistemológicos que muitas dificuldades em aprender Cálculo se originam, e tais dificuldades podem estar relacionadas a dualidades. Isso não significa que apenas esse tipo de dificuldade está presente no processo de aprendizagem, mas expressões como "infinitésimos", "infinitamente grande", "se aproxima de" ou "contínua localmente", são ainda obscuras para os estudantes recém-ingressos em um curso de Matemática. Pudemos, então, obter respostas às nossas indagações colocadas no início da pesquisa, observadas na análise e discussão da atividade proposta aos estudantes.

Acreditamos que os resultados presentes neste trabalho contribuirão para a reflexão sobre o ensino de Cálculo por parte dos docentes, bem como pode servir como referência para os futuros professores de Matemática no que concerne a uma aprendizagem mais significativa do Cálculo. Pretendemos expandir nosso trabalho para outros temas como derivada, séries e integração, em momento oportuno. Portanto, como sugestão, outras pesquisas relacionadas aos obstáculos epistemológicos revelados na aprendizagem de Cálculo relacionados a dualidades podem ser realizadas, haja vista o rico campo de estudo que o Cálculo possibilita.

Notas

[1] Frequentemente utilizaremos o termo "Cálculo" para nos referirmos a Cálculo Diferencial e Integral.
[2]Dicionário Priberam Online de Português Contemporâneo. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/obstáculo. Acesso em: 01 jun. 2024.
[3]Dicionário Priberam Online de Português Contemporâneo. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/epistemologia. Acesso em: 01 jun. 2024.

Referências

Alvarenga, K. B. (2013). *O que dizem as pesquisas sobre inequações*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Contraponto.

Brolezzi, A. C. (1999). Raízes do cálculo na Grécia antiga. *Revista da pesquisa & pós-graduação*, *1*(1), 38–41. https://www.ime.usp.br/~brolezzi/publicacoes/grecia.pdf

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165–198. https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/

Celestino, M. R. (2008). *Concepções sobre limites: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior* (Tese de doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11336

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Autêntica.

Domingos, A. M. D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no início do superior* (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. https://run.unl.pt/bitstream/10362/78/1/domingos_2003.pdf

Gil, A. C. (2008). *Como elaborar projetos de pesquisa*. (4.ª ed.). Atlas.

Grande, A. L., & Pires, R. F. (2016). Obstáculos referentes às relações entre representação numérica sob três enfoques: aritmético, algébrico e geométrico. In L. Fonseca (Org.), *Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem*. Editora Livraria da Física.

Gutiérrez-Fallas, L. F. & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, *26*(1), 25–49. https://doi.org/10.48489/quadrante.22945

Lima, E. L. (2004). *Análise real*. IMPA.

Messias, M., & Brandemberg, J. (2015). Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. *Bolema*, *29*(53), 1224–1241. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a21

Messias, M., & Brandemberg, J. C. (2018). O que estudantes conhecem sobre limite e continuidade? – uma discussão sobre diferentes compreensões relacionadas a esses conceitos. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*. *15*(5), 6–18. https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i15.854

Moraes, M. S. F. (2013). *Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função e seu ensino e aprendizagem* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil. http://repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/8567/6/Dissertacao_EstudoImplicacoesObstaculos.pdf

Nascimento, M. A. (2013). *Ensino-aprendizagem de trigonometria: explorando e resolvendo problemas*. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba – Paraná, Brasil. https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/916_2025_ID.pdf

Olimpio Junior, A. (2006). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Brasil. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102077

Oliveira, M. C. A., & Raad, M. R. (2012). A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. *Boletim GEPEM*, *61*, 125–137. https://doi.org/10.69906/GEPEM.2176-2988.2012.260

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. (Tese de doutorado). Universidade de São Paulo, Brasil. http://flacso.org.br/files/2017/08/WANDERLEY_REZENDE.pdf

Silva, M. H. M., & Rezende, M. H. (1999). Análise histórica do conceito de função. *Caderno de Licenciatura em Matemática*, *2*(2), 29–33. https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/Anlise_Histrica_do_Conceito_de_Funo.pdf

Silveira, M. R. A. (2015). *Matemática, discurso e linguagens: contribuições para educação matemática*. Editora Livraria da Física.

Siqueira, F. K. S., & Lorin, J. H. (2020). Obstáculos epistemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso de matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *19*(9), 555–577. https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.555-577

Stewart, J. (2006). *Cálculo*. Pioneira Thomson Learning.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Universidade Federal de Pernambuco (Brasil). (2016). *Programa dos componentes curriculares por período.* https://www.ufpe.br/documents/39114/0/PPC+2016+-+ementas2.pdf/46094a98-ec5d-4142-98b7-ea972fc41570

Zuffi, E. M., & Pacca, J. L. A. (2009). Sobre funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio. *Zetetike*, *8*(2), 7–28. https://doi.org/10.20396/zet.v8i13-14.8646712