Modelagem matemática como meio de integração do pensamento computacional na educação matemática

Mathematical modelling as a means of integrating computational thinking in mathematics education

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
lourdes@uel.br

Jeferson Takeo Padoan Seki
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Brasil
jefersontakeopadoanseki@hotmail.com

Resumo. Neste artigo discutimos a integração do pensamento computacional na Educação Matemática, considerando atividades de modelagem matemática como meio para a realização dessa integração, com o objetivo de investigar a seguinte questão: Como pode se desencadear pensamento computacional em atividades de modelagem matemática? A abordagem metodológica é qualitativa e lança mão da triangulação de dados com a finalidade de dar coerência e coesão aos resultados. A pesquisa ancora-se em fundamentos teóricos do pensamento computacional e da modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática e em uma pesquisa empírica realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática em dois cenários de investigação que diferem em objetivos e modos de fazer modelagem matemática. A reunião dos dados empíricos e da estrutura teórica permite caracterizar duas formas em que a modelagem matemática pode promover o desenvolvimento do pensamento computacional sendo estas caracterizadas como: meio de análise do fenômeno e meio de resolver problemas.

Palavras-chave: educação matemática; pensamento computacional; modelagem matemática; tecnologias digitais.

Abstract. In this paper, we discuss the integration of computational thinking in Mathematics Education, considering mathematical modelling activities to achieve this integration, with the aim of investigating the following question: How can computational thinking be triggered by mathematical modelling activities? The methodological approach is qualitative and uses data triangulation to give coherence and cohesion to the results. The research is based on theoretical foundations of computational thinking and mathematical modeling in the context of Mathematics Education and on

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 33(2) 267-291
https://doi.org/10.48489/quadrante.36900
Recebido: agosto 2024 / Aceite: dezembro 2024

empirical research carried out with students of from a Mathematics Degree in two different research scenarios, which differ in objectives and ways of doing mathematical modelling. The combination of empirical data and the theoretical framework allows us to characterize two ways in which mathematical modeling can promote the development of computational thinking: as a means of analyzing the phenomenon, and as a means of solving problems.
Keywords: mathematics education; computational thinking; mathematical modelling; digital technologies.

Introdução

As transformações da sociedade, influenciadas pelo desenvolvimento cada vez mais rápido e diversificado de tecnologias, requerem habilidades para o século XXI que dizem respeito a modos de pensar, de fazer, de agir e de resolver problemas. O pensamento computacional faz parte desse movimento e tem sido amplamente discutido no âmbito educacional, em pesquisas e em reformas curriculares de diferentes países (Almeida & Valente, 2019).

O termo *pensamento computacional* remete a Papert (1994) que o associa ao uso do computador na resolução de problemas para que as pessoas possam analisar e explicar problemas e suas soluções. A partir da publicação do artigo de Wing (2006), o termo ganha notoriedade internacional e passa a se constituir objeto de interesse de diversas comunidades de pesquisa. Segundo esta autora, o pensamento computacional envolve a resolução de problemas, projeção de sistemas e compreensão do comportamento humano por meio de conceitos e técnicas da ciência da computação. Em Wing (2011), o termo diz respeito a "[...] processos de pensamento envolvidos na formulação de problemas e suas soluções, de modo que estas sejam representadas em uma forma que possam ser efetivamente realizadas por um agente de processamento de informações" (Wing, 2011, p. 12).

Visando elaborar uma definição operacional do pensamento computacional para a Educação, a *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *American Computer Science Teachers Association* (CSTA), propõem que o pensamento computacional seja mediado por processos de resolução de problemas que incluem as seguintes características: formulação de problemas de modo que possibilite o uso do computador ou outras ferramentas que ajudem a resolvê-los; organização lógica e análise de dados; representação de dados por meio de abstrações, tais como modelos e simulações; automação de soluções por meio do pensamento algorítmico (uma sequência de etapas ordenadas); identificação, análise e implementação de possíveis soluções com objetivo de obter a mais eficiente e efetiva combinação de etapas e recursos; generalização e transferência de processos de resolução específicos para uma ampla variedade de problemas (ISTE/CSTA, 2011).

Considerado como habilidade fundamental para todos (Wing, 2006; ISTE/CSTA, 2011), que se associa não apenas ao modo de pensar de um cientista da computação, mas se articula e compartilha relações com a matemática, entre outras áreas do conhecimento, pesquisas têm sido realizadas com a finalidade de caracterizar o pensamento computacional e de saber como este pode ser promovido na Educação Matemática (Gadanidis et al., 2017; Navarro & Sousa, 2023; Weintrop et al., 2016). De acordo com essas pesquisas, de modo geral, entende-se que a integração do pensamento computacional na Educação Matemática proporciona novas abordagens para a resolução de problemas e pode se valer de modelos matemáticos na investigação de situações-problema vinculadas à realidade.

Conjectura-se que um possível meio para promover o desenvolvimento do pensamento computacional no âmbito da Educação Matemática é por meio de atividades de modelagem matemática, considerando que nesse tipo de atividade os estudantes são convidados a investigar uma situação da realidade e resolver problemas vinculados a essa situação por meio da construção e análise de modelos matemáticos (Ang, 2021; Villa-Ochoa et al., 2022; Kaminski, 2023). Nesse processo, aspectos do pensamento computacional, como abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, criação de um algoritmo, entre outros, podem ser mobilizados, com o uso de tecnologias digitais ou não.

Diante de tais considerações, neste artigo dirige-se a atenção para a seguinte questão de pesquisa: Como pode se desencadear pensamento computacional em atividades de modelagem matemática?

Pensamento computacional na Educação Matemática

Resolver problemas está no cerne da atividade matemática. Não é difícil identificar na matemática uma variedade de exemplos em que se recorre à construção de métodos, algoritmos e ao reconhecimento de padrões para resolver problemas internos ou externos à matemática, processos estes também reconhecidos no pensamento computacional. Segundo Gadanidis et al. (2017, p. 78), "existe uma conexão natural (e histórica) entre pensamento computacional e matemática, tanto em termos de estrutura lógica, quanto na habilidade de modelar e de investigar relações internas à matemática".

A partir da publicação de Wing (2006), desencadearam-se definições e caracterizações para o termo *pensamento computacional*, pensadas para diferentes finalidades e áreas do conhecimento. Dentre as dimensões que o pensamento computacional abrange e que são apresentadas na literatura por Shute et al. (2017), consideram-se, no presente artigo, as seguintes:

- Decomposição: Consiste em decompor um problema ou sistema complexo em outros problemas mais específicos e mais gerenciáveis.
- Abstração: É o processo de obter informações e levar em consideração aspectos que são relevantes para resolver o problema e desconsiderar aqueles que são irrelevantes. Para Shute et al. (2017), a abstração envolve três outros componentes: coleta

e análise dados; reconhecimento de padrões; construção de modelos ou simulações que representam como o sistema opera ou como poderá operar no futuro.

- Algoritmos: Visam projetar instruções lógicas e ordenadas para apresentar uma solução para um problema. As instruções podem ser executadas por um ser humano ou um computador. Existem quatro subcategorias: (a) design de algoritmo: criação de etapas ordenadas para resolver um problema; (b) paralelismo: realização de um certo número de etapas ao mesmo tempo; (c) eficiência: projetar o menor número de etapas para resolver um problema, eliminando aquelas que são redundantes ou desnecessárias; (d) automação: automatizar a execução do procedimento, quando necessário, para resolver problemas semelhantes.
- Depuração: Consiste em detectar e identificar erros e, em seguida, corrigi-los quando uma solução não funciona como deveria.
- Iteração: Visa repetir processos de design para refinar soluções, até que o resultado ideal seja alcançado.
- Generalização: Viabiliza transferir competências do pensamento computacional para uma ampla gama de situações/domínios para resolver problemas de forma eficaz e eficiente.

No âmbito educacional, Weintrop et al. (2016) apresentam uma taxonomia do pensamento computacional para o Ensino de Ciências e de Matemática, sugerindo quatro categorias desse pensamento na implementação em sala de aula (Tabela 1). Esta taxonomia revela que a integração do pensamento computacional não se restringe à atividade de programação, mas pode-se associar às práticas envolvidas no tratamento de dados, tais como a modelagem e a simulação, a resolução de problemas de modo computacional e o pensamento sistêmico.

Na mesma linha dessa taxonomia, Navarro e Sousa (2023), ao discutirem o pensamento computacional na Educação Matemática, defendem o pensamento computacional não de modo instrumental e utilitário, mas como uma "forma potencial de ampliar e desenvolver as capacidades de resolução de problemas, de interpretação da realidade e de expansão dos modos de ação dos alunos diante de seu contexto sociocultural, seja de maneira plugada (uso de TDIC) ou desplugada (não requer a utilização de TDIC)" (p. 83).

Tabela 1. Taxonomia do pensamento computacional no ensino de Ciências e Educação Matemática, adaptado de Weintrop et al. (2016) e Shute et al. (2017)

Categoria do pensamento computacional	**Práticas do pensamento computacional**	**Definição das práticas**
Práticas relativas aos dados	Coleta de dados	Coleta de dados usando múltiplas ferramentas computacionais
	Produção de dados	Produção de dados para sistemas grandes e complexos
	Manipulação de dados	Reorganização de dados de maneira significativa
	Análise de dados	Uso de ferramentas computacionais para análise de dados
	Visualização de dados	Comunicação e apresentação de dados de diferentes formas
Modelagem e simulação	Compreensão conceitual	Compreender conceitos usados na modelagem
	Teste de soluções	Resolver problemas mediante testes de hipóteses
	Avaliação de modelos	Avaliação da eficiência de modelos
	Design de modelos	Seleção de elementos essenciais para a construção de modelos
	Construção de modelos	Construção de novos modelos ou extensão de modelos existentes
Resolução computacional de problemas	Planejamento da resolução	Decomposição ou reformulação de problemas usando ferramentas computacionais
	Programação computacional	Uso de técnicas adequadas de programação
	Seleção de ferramentas	Avaliação de vantagens e desvantagens de ferramentas computacionais
	Avaliação da solução	Avaliação das soluções em relação ao problema proposto
	Generalização de soluções	Obtenção de soluções que possam ser estendidas para problema semelhantes
	Abstração	Identificação de elementos essenciais do problema
	Depuração	Identificação e correção de erros
Pensamento sistêmico	Investigação do sistema	Identificação das funções do sistema como um todo
	Compreensão de relações	Entendimento e operação com as inter-relações de elementos do sistema
	Pensamento em multicamadas	Pensar em múltiplas perpectivas e níveis
	Comunicação	Transmissão de informações de forma eficaz
	Gerenciamento do sistema	Definição do escopo do sistema e gerenciamento da sua completude

Segundo as autores, três nexos conceituais são estabelecidos na relação entre pensamento computacional e Educação Matemática: (i) Resolução de problemas, que envolve o uso de conceitos matemáticos, a elaboração de estratégias, a coleta de informações, além da análise e da intepretação; (ii) Pensamento algébrico, associado à busca de regularidades e ao uso de algoritmos, símbolos e reconhecimento de padrões, buscando a generalização;

(iii) Pensamento algorítmico, que está relacionado ao pensamento lógico e metódico, que se organiza em etapas, com a finalidade de resolver problemas ou determinadas tarefas. Com base nessa caracterização as autoras argumentam que para que os alunos possam desenvolver pensamento computacional, eles precisam, a partir de uma dada situação-problema, efetuar quatro movimentos:

> a) interpretar dados, classificando-os e ordenando-os para uma posterior análise e síntese; b) levantar e sistematizar hipóteses, utilizando diferentes linguagens e construindo modelos; c) buscar regularidades; d) apropriar-se de abstrações que se apresentam em alguns tipos de generalização (Navarro & Sousa, 2023, p. 102).

Assim, entende-se que a integração do pensamento computacional na Educação Matemática requer inserir os estudantes em práticas de resolução de problemas que envolvam situações-problema e que possam propiciar a coleta e a análise de dados, abstração, construção e análise de modelos, entre outros aspectos, por meio de um agente de informações.

Modelagem matemática como ênfase na resolução de problemas

A modelagem matemática pode ser entendida como a atividade humana que busca uma solução para uma situação-problema, que não é estritamente matemática, por meio da construção e análise de modelos matemáticos (Bassanezi, 2002; Meyer, 2020; Pollak, 2012, 2015). De acordo com Pollak (2012), o processo de modelagem matemática é caracterizado da seguinte forma:

> A situação real geralmente tem tantas facetas que você não pode levar tudo em consideração, então você decide quais aspectos são mais importantes e os mantém. Neste ponto, você tem uma versão idealizada da situação do mundo real, que pode ser traduzida em termos matemáticos. O que você tem agora? Um modelo matemático da questão idealizada. Você então aplica seus instintos e conhecimentos matemáticos ao modelo e obtém *insights*, exemplos, aproximações, teoremas e algoritmos interessantes. Você traduz tudo isso de volta para a situação do mundo real e espera ter uma teoria para a questão idealizada. Mas você precisa verificar: os resultados são práticos, as respostas razoáveis, as consequências aceitáveis? Se sim, ótimo! Se não, dê outra olhada nas escolhas que você fez no início e tente novamente (Pollak, 2012, p. 1).

Na Educação Matemática, diferentes perspetivas e abordagens da modelagem matemática podem orientar sua implementação em sala de aula (Kaiser & Sriraman, 2006; Blum, 2015; Galbraith, 2012). De modo geral, Galbraith (2012), a partir de Julie & Mudaly (2007), destaca duas abordagens genéricas para o uso da modelagem em sala de aula: modelagem como veículo e modelagem como conteúdo. Como veículo, o objetivo principal é o ensino e a aprendizagem da matemática curricular. Como conteúdo, a modelagem matemática é utilizada tando para a construção de modelos com foco na investigação de fenômenos, quanto para o desenvolvimento de competências e habilidades de modelagem matemática, fazendo uso de seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas.

Niss e Blum (2020), por sua vez, propõem duas razões gerais para o uso da modelagem matemática no ambiente escolar: *a matemática em prol da modelagem*, em que a matemática é um meio para desenvolver no estudante a competência de modelagem matemática a qual desempenha um papel importante na compreensão de situações da realidade e na resolução de problemas originados nessas situações; a *modelagem em prol da matemática*, em que a modelagem matemática é um meio para aprendizagem da matemática, seja promovendo motivação para seu estudo, atribuição de significados, compreensão e apreensão de conceitos, resultados, métodos e teorias matemáticas, seja como meio para desenvolver competências matemáticas.

No contexto da sala de aula entende-se a modelagem matemática como alternativa pedagógica cuja introdução nas aulas, segundo Almeida (2018), deve levar em conta que a matemática usada não pode ser previamente escolhida ou definida; ao invés disso, a matemática requerida emerge do problema e suas especificidades, podendo existir diferentes percepções de uma situação do mundo real e ser estabelecidos diferentes critérios para o que constitui uma solução aceitável. As atividades de modelagem matemática envolvem, assim, um conjunto de fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

Na inteiração, o modelador precisa inteirar-se da situação-problema, coletando dados e formulando um problema. Diante desse problema, ocorre a matematização, em que há a seleção de variáveis, simplificações e formulação de hipóteses, atribuindo uma roupagem matemática ao fenômeno, tornando-o passível de ser analisado matematicamente (Sousa & Tortola, 2021). Na resolução, constrói-se um modelo matemático para obter uma resposta matemática para o problema. Esse modelo matemático deve ser analisado, por meio da interpretação de resultados e validação e o uso de técnicas de avaliação, com a finalidade de verificar a razoabilidade dos resultados em relação à situação-problema e identificar a necessidade de modificações (Almeida, 2022; Almeida et al., 2021).

Para algumas finalidades, a literatura tem indicado que a análise de modelos pode ser considerada como uma abordagem para o ensino de matemática em diferentes níveis de escolaridade (Javaroni & Soares, 2012; Soares & Borba, 2014). Essa abordagem consiste, de acordo com Soares & Borba (2011, p. 231), no "estudo de um ou mais modelos matemáticos já existentes de um fenômeno, com enfoque na análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste comportamento, e o entendimento dos dados fornecidos pelo modelo com relação ao fenômeno".

Ao resolver problemas por meio da modelagem matemática, construindo ou analisando modelos, o uso de tecnologias digitais pode ser um contribuinte e pode atuar com diferentes funções. Para Greefrath et al. (2018) seis funções das tecnologias em atividades de modelagem podem ser caracterizadas: investigação, na compreensão da situação da realidade, na leitura e interpretação de dados prontos bem como na produção de dados; experimentação, para transformar situação real em um modelo geométrico ou numérico com a finalidade de formular e testar hipóteses e conjecturas acerca da situação da realidade; visualização, para observar e analisar aspectos importantes para a construção de modelos matemáticos ou para análise de resultados obtidos; simulação, na criação de uma analogia de uma situação real que pode ser usada para investigar uma operação ou um experimento com a ajuda de modelos matemáticos (Greefrath & Siller, 2017); na realização de cálculos numéricos ou algébricos que não podem ser obtidos pelos modeladores sem as tecnologias digitais em tempo apropriado; no controle de informações de entrada, visando determinar valores dos parâmetros e suas consequências para o fenômeno.

Entende-se que esses diferentes usos não são estanques e fragmentados, mas se interrelacionam no fazer modelagem matemática e podem caracterizar uma maneira específica de pensar para resolver problemas da realidade e analisar fenômenos de diferentes esferas. Conjetura-se que esse modo de pensar pode assumir características do pensamento computacional.

Problema de pesquisa e aspetos metodológicos

Levando em consideração, por um lado, os movimentos requeridos dos estudantes para desenvolver pensamento computacional e apontados por Navarro e Sousa (2023) bem como a taxonomia para esse tipo de pensamento identificada na literatura relativamente ao ensino de matemática e, por outro lado, as ações pertinentes ao desenvolvimento de atividades de atividades de modelagem matemática, o presente artigo se propõe a buscar uma interlocução entre estes dois elementos e investigar: como, em atividades de modelagem matemática, pode se desencadear pensamento computacional?

Procedimentos metodológicos

Para a investigação da ocorrência de pensamento computacional em atividades de modelagem matemática foi definido um percurso metodológico que inclui uma pesquisa empírica realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública no Brasil, considerando dois cenários de investigação: (i) a disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, no quarto ano do curso, com uma abordagem visando a resolução de problemas da realidade, por meio da construção de modelos matemáticos e o uso de tecnologias digitais; (ii) a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, no terceiro ano do curso, com uma abordagem voltada à análise de modelos previamente formulados, com o apoio de tecnologias digitais.

Nas duas disciplinas foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática e, para os interesses do presente artigo, é apresentada uma atividade em cada uma dessas disciplinas. Nas duas disciplinas foram coletados dados por meio de gravações em áudio e vídeo no decorrer do trabalho dos estudantes com a modelagem matemática. Além disso, os estudantes entregaram relatórios das atividades realizadas e o professor-pesquisador fez anotações em diário de campo no decorrer das aulas com modelagem. Participaram das aulas o professor-pesquisador e também a professora das duas disciplinas, autores do presente artigo.

A pesquisa caracteriza-se como qualitativa e interpretativa (Fiorentini & Lorenzato, 2006) e o processo analítico orienta-se por uma triangulação (Duarte, 2009; Santos et al., 2020) que abre a possibilidade de compreender a ocorrência do pensamento computacional a partir de realidades distintas. A triangulação de dados proporciona elucidar elementos dos cenários distintos de investigação relativos à modelagem matemática que, simultaneamente, proporcionam inferências sobre a ocorrência de pensamento computacional em atividades dessa natureza. A análise assim conduzida produz resultados que têm influências dos valores do próprio investigador e do enquadramento teórico utilizado.

Os cenários de investigação

Cenário de investigação 1

No primeiro cenário de investigação, um grupo de seis alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira, no contexto da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, desenvolveu uma atividade de modelagem com a temática *Análise da taxa de veículos por habitante na cidade.* A atividade foi desenvolvida ao final da disciplina, no ano de 2022, com os estudantes já familiarizados com atividades de modelagem matemática.

Motivados por notícias e pesquisas que informavam um alto crescimento da frota de veículos na região, os estudantes investigaram a relação entre a frota de veículos e a população na cidade de Londrina, em que residem, conforme o seguinte problema: *Em que ano a taxa de veículos por habitante na cidade será igual a 1?* Para resolver o problema, os estudantes coletaram dados acerca da frota de veículos e da população na cidade para o período entre os anos de 2001 e 2021 (Figura 1).

A partir de um olhar sobre as informações, os estudantes propuseram três resoluções distintas, que levam em conta diferentes hipóteses acerca do comportamento dos dados da frota de veículos e da população no decorrer do tempo. Para o estudo da variação da população nas três resoluções, o modelo matemático construído foi o modelo logístico de Verhulst, considerado um modelo clássico para dinâmicas populacionais e que assume que a população em um determinado meio tende a se estabilizar no decorrer do tempo. Esse modelo admite que há uma assíntota para a qual o valor da população converge. Para determinar essa assíntota os estudantes utilizaram o método de Ford-Walford[1] (Figura 2).

Atualmente estimar a frota veicular de uma cidade tem sido uma preocupação tanto dos engenheiros de trânsito quanto da própria população, que cada vez mais se encontra em congestionamentos devido à grande quantidade de veiculos nas ruas e avenidas.
Na cidade residente dos estudantes, segundo o Departamento Estadual de Trânsito (DETRAN-PR), o número de veiculos cresceu de 163.089 em 2001 para 399.143, em 2021, isto é, duplicou sua quantidade em 20 anos. Já a população da cidade, segundo o IBGE, cresceu em 125.999, nesse mesmo periodo.

n	Ano	Frota	População
0	2001	163.089	454.871
1	2002	168.817	460.909
2	2003	179.082	467.334
3	2004	189.967	480.822
4	2005	210.257	488.287
5	2006	220.637	495.696
6	2007	235.457	-
7	2008	251.349	505.184
...	...	...	...
19	2020	392.823	575.377
20	2021	399.143	580.087

Figura 1. Informações acerca do tema da atividade Frota de Veículos, conforme registros escritos do grupo

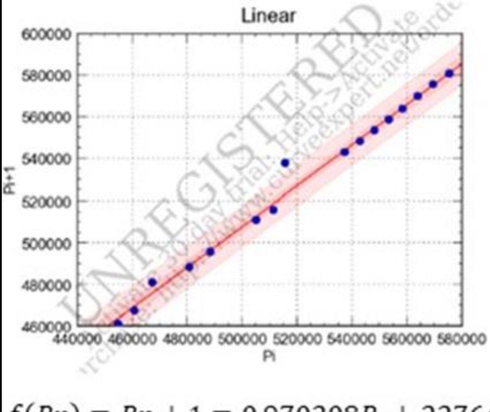
H: a variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente e a população de certa espécie, vivendo num determinado meio, atinge um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar a partir de um determinado tempo (modelo logistico de Verhulst).

P(t): população de Londrina/PR no decorrer do tempo t
t: tempo (em anos)

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dn} = kP\left(1 - \dfrac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad P(n) = \frac{L}{e^{kn}\left(\dfrac{L}{P_0} - 1\right) + 1}$$

Utilizando o método Ford-Walford para encontrar o valor da assíntota L

Ajuste linear aos pontos (P_n, P_{n+1})



$f(Pn) = Pn + 1 = 0{,}970208P_n + 22764{,}20$

L é ponto fixo da função f(Pn). Portanto, pode ser encontrado, fazendo-se

$$P_{n+1} \approx P_n \approx L$$
$$L = 0{,}970208L + 22764{,}20$$
$$L = 764.104{,}7694$$

Fazendo a interseção entre f(Pn) e a função identidade

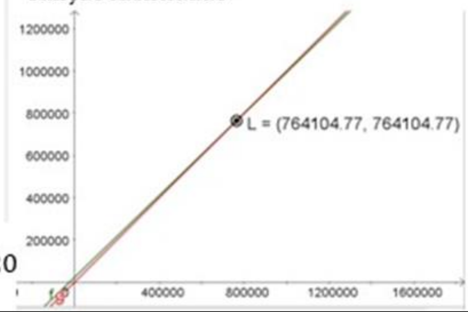


Figura 2. Construção do modelo matemático da população na cidade de Londrina e o uso do método Ford-Walford, conforme os registros escritos dos estudantes

Na primeira resolução, os estudantes consideram que a frota de veículos tende a se estabilizar no decorrer do tempo, mas não possui um ponto de inflexão aparente, construindo um modelo exponencial assintótico. Já na segunda resolução, os estudantes consideraram que a frota de veículos cresce indefinidamente segundo um comportamento exponencial. Na terceira resolução, por sua vez, calcularam a razão entre os dados observados da frota de veículos e os dados observados da população no decorrer do tempo, e ajustaram um modelo exponencial assintótico a essa razão, denominada de taxa de veículos por habitante (Figura 3).

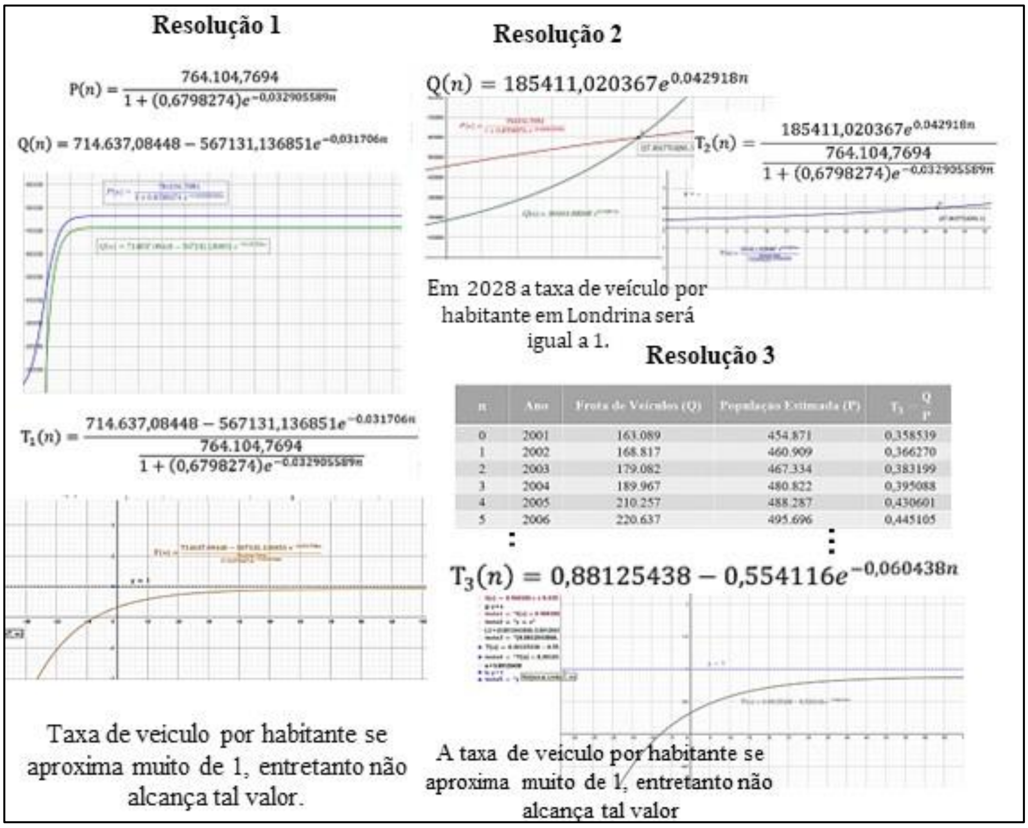


Figura 3. Parte das três resoluções realizadas pelos estudantes na atividade Frota de Veículos

Para validar os resultados os estudantes calcularam os erros relativos de cada modelo matemático obtido. Como conclusão, identificaram que a resolução 2 é a que possui maior erro percentual, enquanto a resolução 3 possui o menor erro percentual em comparação aos dados. Com isso, consideraram que os modelos assintóticos para a população e para a frota de veículos são mais adequados do que os modelos não assintóticos e, portanto, a taxa de veículos por habitante nunca será igual a 1.

Para complementar, os alunos retomaram o gráfico de dispersão acerca da razão entre a frota de veículos e a população (Q/P) e constataram que a taxa de crescimento dessa curva tende a diminuir a partir do ano de 2017, o que reforça a conclusão obtida a favor dos modelos assintóticos.

Cenário de investigação 2

O cenário 2 diz respeito ao desenvolvimento de uma atividade intitulada *Salto de Paraquedas* com estudantes da disciplina Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, do terceiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Nessa atividade, o tema foi proposto pelo professor aos estudantes e a abordagem escolhida for a análise de modelos, e um modelo matemático previamente construído foi apresentado aos alunos junto com o enunciado da atividade.

Os problemas propostos foram: Qual é comportamento da velocidade do paraquedista desde a saída da aeronave até ao pouso, para paraquedistas com diferentes massas? Qual é a velocidade do paraquedista em um instante qualquer do salto, para paraquedistas com diferentes massas (desde a saída da aeronave até ao pouso)?

Esses problemas deveriam ser resolvidos a partir da análise do modelo matemático da variação da velocidade do paraquedista durante o salto, apresentado pelo professor-pesquisador e que se estrutura em dois problemas de valor inicial (PVIs).

O PVI 1 refere-se à velocidade do paraquedista durante a queda-livre ($v_A(t)$), em m/s, no intervalo $[0, 60]$, uma vez que o paraquedas abre quando passados 60s do instante do salto. O PVI 2, por sua vez, diz respeito à velocidade do paraquedista após a abertura do paraquedas até o pouso ($v_B(t)$), em m/s, no intervalo $(60, 450]$ considerando que a duração da queda após a abertura do paraquedas é de, aproximadamente, 450 segundos.

$$PVI\ 1: \begin{cases} \dfrac{dv_A(t)}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{0{,}33628}{m}\ , em\ I_A = [0, 60] \\ v_A(0) = 0 \end{cases}$$

$$PVI\ 2: \begin{cases} \dfrac{dv_B(t)}{dt} = 9{,}8 - \dfrac{25{,}74}{m} . \left(v_B(t)\right)^2 , em\ I_B = (60, 450] \\ v_B(60) = v_A(60) \end{cases}$$

Utilizando o *software* GeoGebra, os estudantes construíram campos de direções para as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) envolvidas nos PVIs, com a finalidade de realizar uma análise qualitativa do modelo matemático, centrada no comportamento e nas propriedades das soluções e suas relações com o fenômeno em estudo, sem acesso, inicialmente, à solução analítica, como mostra a Figura 4.

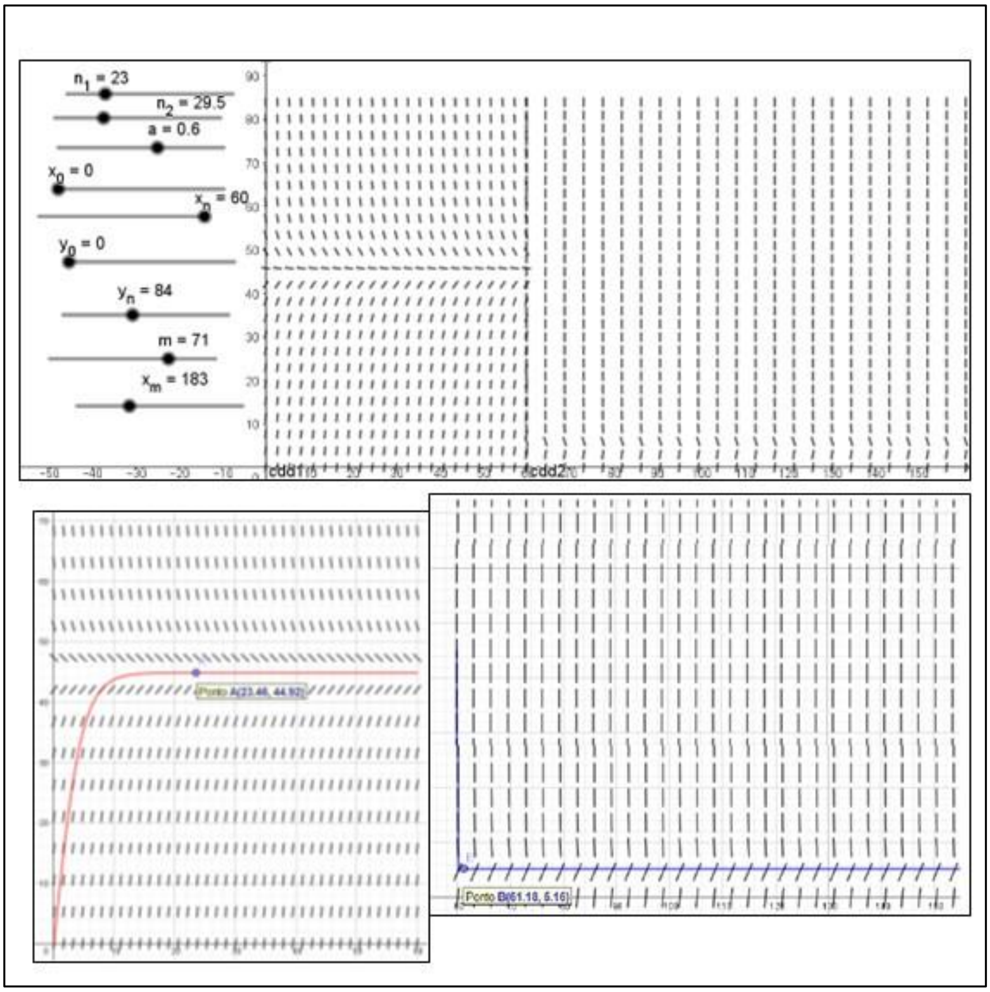


Figura 4. Campos de direções construídos pelos estudantes na atividade Salto de Paraquedas

Como conclusão dessa análise os estudantes registraram no relatório entregue relativo à atividade:

> Ao analisarmos qualitativamente o salto do paraquedista, verificamos que em $v_a(0)$ = 0 (o ponto inicial) é o momento em que ele salta. Após isso, conseguimos perceber que a partir de um certo ponto a velocidade estabiliza, logo, temos uma solução de equilíbrio. Já em $v_b(60) = v_a(60)$, que é o momento de abertura do paraquedas, a velocidade cai bruscamente e logo depois ela se estabiliza, onde temos outra solução de equilíbrio, até que o paraquedista chegue no solo a velocidade não possui mudanças. Observamos que a massa faz com que a velocidade varie [...]. Quanto maior a massa do paraquedista, maior a sua velocidade durante o salto e mais rápido ele cai. Analogamente, quanto menor sua massa, menor a velocidade durante o salto e ele chega no solo mais devagar (Relatório escrito pelos estudantes A1, A2, A3 e A4).

Outro aspecto a que os estudantes se dedicaram foi a velocidade terminal que paraquedistas de diferentes massas atingem no decorrer do salto, ou seja, a velocidade limite. Utilizando os campos de direção, os estudantes estimaram que a velocidade terminal durante a queda-livre para a massa igual a 70 kg varia entre 40 m/s e 50 m/s, enquanto para a massa igual 99 kg, a velocidade se estabiliza entre 50 m/s e 56 m/s. Após a abertura do paraquedas, a velocidade terminal estimada foi de 5 m/s para um paraquedista $m = 70\ kg$ e de 6 m/s para $m = 99\ kg$.

Para efeito de confirmação dessas estimativas, utilizando a condição de que na velocidade terminal, a variação da velocidade é nula, então a velocidade terminal pode ser obtida utilizando-se a seguinte expressão

$$v_t = \sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}$$

em que g é a aceleração da gravidade, m a massa do paraquedista, λ o coeficiente de arrasto e v_t a velocidade terminal. Calculando as velocidades terminais para $m = 70\ kg$ e para 99 kg, utilizando a expressão matemática concluíram que a velocidade terminal em queda-livre para $m = 70\ kg$ é de aproximadamente 45,17 m/s e com o paraquedas aberto a velocidade é de aproximadamente 5,16 m/s. Já para $m = 99\ kg$, os estudantes encontraram 53,71 m/s para a velocidade terminal em queda-livre e 6,14 m/s para a velocidade terminal com o paraquedas aberto.

Por fim, o professor resolveu analiticamente a EDO associada aos Problemas de Valor Inicial apresentado e forneceu os alunos a seguinte solução:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\frac{\left(C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t} - 1\right)}{\left(1 + C.e^{\frac{2.\sqrt{\frac{g.m}{\lambda}}.\lambda}{m}.t}\right)}$$

Em posse das informações fornecidas e utilizando de condições iniciais estimadas a partir da análise qualitativa do modelo matemático apresentado, os estudantes determinaram a função da velocidade do paraquedista em relação ao tempo. Como conclusão, eles argumentaram que a velocidade do paraquedista tem um crescimento exponencial assintótico na fase queda-livre, estabilizando sua velocidade na velocidade terminal 1. Ao abrir o paraquedas, a velocidade passa a ter um decrescimento exponencial assintótico, uma vez que a força de arrasto desacelera o movimento, estabilizando na velocidade de pouso. Além disso, quanto maior for a massa do paraquedista, maior será a velocidade atingida tanto para abrir o paraquedas quanto para o pouso.

O pensamento computacional nas atividades de modelagem matemática

As ações dos estudantes no desenvolvimento das atividades em cada um dos cenários, em conjunto com a fundamentação teórica que versa sobre a articulação entre o pensamento computacional e a modelagem matemática nos fornece elementos para caracterizar duas categorias relativas ao modo como se dá o pensamento computacional em atividades de modelagem matemática.

A primeira consiste no pensamento computacional como um meio para resolver problemas de situações da realidade. Nessa categoria, remete-se ao pensamento computacional como processo de pensamento envolvido na formulação e na resolução de problemas, mediante um agente de processamento de informações, seja ele um humano ou uma máquina, conforme definido por Wing (2011). Elementos para caracterização dessa categoria podem ser identificados na atividade da frota de veículos no cenário 1.

No cenário 1, na atividade frota de veículos a prática de dados associada ao pensamento computacional, como caracterizado por Weintrop et al. (2016), se fez presente desde o início até o final da atividade. Inicialmente, os estudantes *coletaram dados* a respeito da população e da frota de veículos na cidade, *manipularam os dados*, buscando reorganizá-los em planilhas e gráficos de dispersão para auxiliar na matematização e na formulação das estratégias de resolução. Durante o processo de construção dos modelos matemáticos, pode se perceber a *análise de dados*, em particular a partir do uso do *software* Curve Expert, e a *produção de dados*, para determinar a razão entre a frota de veículos e a população, que serviram de base para construção do modelo matemático na terceira resolução.

No processo de matematização, em que os estudantes formularam diferentes hipóteses acerca do fenômeno que desencadearam em três diferentes resoluções, é possível identificar a *decomposição* do fenômeno em três situações: (i) modelos assintóticos (a população e a frota tendem a se estabilizar com o passar do tempo); (ii) modelos monótonos ilimitados (a população se comporta da mesma forma como na Resolução 1, mas a frota de veículos cresce indefinidamente com o passar do tempo); (iii) modelo exponencial assintótico para a taxa $T=Q/P$ (a taxa de veículo por habitante tende a se estabilizar com o passar do tempo).

Ainda na matematização, percebe-se a *abstração*, na análise dos dados que dão subsídios para a construção dos modelos, bem como no reconhecimento de padrões, em particular acerca do comportamento da variação da população e variação da frota de veículos. A abstração está intimamente relacionada com a matematização em atividades de modelagem matemática, e se mostra no processo de identificar informações relevantes acerca do fenômeno, descartando aquelas desnecessárias (Pollak, 2012), bem como em associar mais matemática ao fenômeno do que lhe já havia sido associado, atribuindo uma roupagem matemática para o fenômeno, tornando possível de ser trabalhado matematicamente (Sousa & Tortola, 2021).

Isso se evidencia também no processo de estruturação matemática, traduzindo a hipótese em uma estrutura matemática, conforme os exemplos apresentados na Figura 5.

H: A variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente e a população de certa espécie, vivendo num determinado meio, atinge um limite máximo sustentável, isto é, a população tende a se estabilizar a partir de um determinado tempo (modelo logístico de Verhulst).	$\begin{cases} \frac{dP}{dn} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$ $P(t)$: a população de Londrina, Paraná, no decorrer do tempo t. t: o tempo em anos; n: uma variável auxiliar, tal que $n = t - 2001$,
H1: a taxa de variação da frota em relação ao tempo é proporcional a diferença entre a frota limite (assíntota) e a frota presente. A frota de veículos tende a se estabilizar com o passar do tempo, porém não possui um ponto de inflexão aparente (modelo exponencial assintótico).	$\frac{dQ}{dn} = k(L_1 - Q)$ $Q(t)$: a frota de veículos em Londrina/PR no decorrer do tempo t, n: uma variável auxiliar que expressa unidades de tempo. $n = t - 2001$.

Figura 5. Abstração na matematização da atividade Frota de Veículos conforme registros dos estudantes

Deste modo, a *abstração* na atividade Frota de Veículos ocorreu de acordo com os três componentes indicados por Shute et al. (2017), na análise dos dados, no reconhecimento de padrões e na construção de modelos matemáticos que representam o modo como a população e a frota de veículos se comportam e como se comportarão no futuro.

Na construção dos modelos matemáticos, os estudantes utilizaram o método de Ford-Walford para determinar o valor da assíntota do modelo matemático da população, da frota de veículos na resolução 1 e da taxa de veículo por habitante na resolução 3.

Para empregar esse método, os estudantes pensaram em uma série de etapas ordenadas envolvendo o uso de recursos computacionais, que pode ser ilustrado pelos seguintes passos: 1. Identificar se a sequência de dados (y_i) é monótona e limitada e, portanto, converge para um valor y^* considerado ponto de estabilidade; 2. Organizar os dados da sequência (y_i) e (y_{i+1}) em pares ordenados (y_i, y_{i+1}); 3. Ajustar uma função afim $f(y_i) = y_{i+1}$ aos dados (y_i, y_{i+1}) utilizando o software CurveExpert: 4. Determinar o ponto de interseção entre o gráfico da função identidade $y_{i+1} = y_i$ e da função $f(y_i) = y_{i+1}$, utilizando o software GeoGebra. Essa sequência de etapas se caracteriza como um algoritmo e evidencia o pensamento algorítmico. Na definição de Shute et al. (2017), percebe-se o *design* de um algoritmo, na criação de uma série de etapas, ao recorrer ao uso de ferramentas computacionais para otimizar o número de etapas no uso do método de Ford-Walford e na automação, uma vez que os mesmos procedimentos foram utilizados para determinar as assíntotas envolvidas nas outras resoluções da atividade.

A *depuração* se associa à validação e interpretação dos resultados, o que envolveu uma análise e interpretação dos erros dos modelos matemáticos obtidos e se faz constantemente na construção dos modelos matemáticos em possíveis erros matemáticos ou de uso das ferramentas computacionais que impedem chegar na solução esperada. Isso se fez presente em uma discussão dos alunos com a professora da disciplina, ao serem questionados sobre o uso do *software* Curve Expert para ajustar o modelo da população aos dados sem levar em conta procedimentos já utilizados para construir um modelo clássico para a população:

PR:	E qual modelo vocês usaram para estimar a população?
E16:	A gente fez o gráfico dos dois, da frota de veículos e da população e olhando os dados a gente pensou em três modelos principais: o linear, o exponencial e o de Verhulst né. Aí nossa ideia foi colocar no Curve para calcular o coeficiente de correlação entre eles e os dados.
PR:	Acho que assim, usar o Curve para ajustar não é muito legal né, porque já tem modelos clássicos né.
E16:	Mas ele tem o modelo logístico né, porque tem a assíntota.
PR:	Vocês podem calcular né, fazer a EDO e para determinar a assíntota vocês podem usar Ford-Walford. Depois vocês podem usar a opção que quiserem: ou utilizem a assíntota e coloquem ela na EDO de Verhulst ou vocês terminam a modelagem usando o método de Ford-Walford. Mas, para a população o clássico é o Verhulst, então vocês podem usar o método de Ford-Walford e depois estimar a população. E para os automóveis, não sei se tem o ponto de inflexão, então eu acho que vocês podem achar a assíntota e montar outro modelo assintótico.
PP:	É, acho que a frota não vai crescer infinitamente, também tem assíntota.

Esse diálogo fez os estudantes retomarem a resolução e voltarem ao processo, levando a refinar os resultados, evidenciando a *iteração* da modelagem. A *generalização,* por sua vez, pode se evidenciar na discussão acerca das limitações do modelo matemático e se ele é aplicável a outras regiões, por exemplo. No caso da atividade, os estudantes constataram que existem diversos fatores sociais e econômicos da região que podem afetar o crescimento populacional e da frota de veículos e, que a depender da situação, pode se optar por outra resolução diferente da considerada adequada para a cidade estudada.

A segunda categoria diz respeito ao pensamento computacional como um meio de análise de modelos matemáticos. Nessa categoria, é possível indicar o pensamento computacional como processo de pensamento na construção de simulações para compreender um determinado fenômeno, mediante a matemática e o uso de recursos computacionais. Elementos para caracterização dessa categoria, podem ser identificados no desenvolvimento da atividade Salto de Paraquedas no cenário 2.

No cenário 2, os estudantes foram convidados a resolver uma situação-problema tendo como ponto de partida um modelo matemático da taxa de variação da velocidade de um paraquedista durante o salto. Esse fenômeno foi *decomposto* em duas fases: 1. Queda-Livre; 2. Com o paraquedas aberto. Cada fase foi analisada separadamente e, em seguida, as duas foram consideradas como parte de um todo, evidenciando a *decomposição* do pensamento computacional.

Ao analisar modelos, principalmente quando se trata de equações diferenciais, não é difícil se deparar com equações sem solução analítica, sendo necessário, em práticas científicas ou educacionais, recorrer a ferramentas computacionais que possibilitem realizar uma análise qualitativa dessas soluções sem, entretanto, ter a solução analítica.

Na atividade Salto de Paraquedas, ainda que a Equação Diferencial Ordinária apresentada possua solução analítica, os alunos não possuíam ainda conhecimento acerca dos métodos de resolução. Desta forma, o uso do GeoGebra foi fundamental na construção dos campos de direção.

Analisar o comportamento da velocidade do paraquedista no decorrer do tempo por meio dos campos de direção exige um alto grau de *abstração* dos alunos, em conseguir perceber em um conjunto de vetores, possíveis curvas que podem indicar a solução do modelo. Em outras palavras, a *abstração* nessa atividade se dá no *reconhecimento de padrões* no campo de direções, conforme a definição de Shute et al. (2017). Padrões estes vinculados à direção dos vetores, como mostra a Figura 4.

O uso do software Geogebra aqui também revela uma prática vinculada ao pensamento computacional que é *resolver problemas computacionalmente* na taxonomia de Weintrop et al. (2016). Neste caso, o problema era: como analisar o comportamento da solução de uma EDO sem ter acesso a sua solução analítica. Isso exigiu dos estudantes conhecimento acerca da linguagem utilizada pelo software para realizar os comandos necessários para construção dos campos de direção: CampoDeDireções(<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>). Além de conhecimentos matemáticos para interpretar os campos de direção.

Nessa atividade, tanto a decomposição, a abstração e o reconhecimento de padrões, quanto o resolver problemas computacionalmente emergem da *simulação* das curvas da velocidade do paraquedista em relação ao tempo para diferentes massas, utilizando tanto o campo de direções quanto a solução analítica, conforme a Figura 6. Daí resultou uma compreensão conceitual tanto dos aspectos que influenciam o fenômeno como acerca das soluções de uma EDO, objeto de estudo da disciplina do cenário 2.

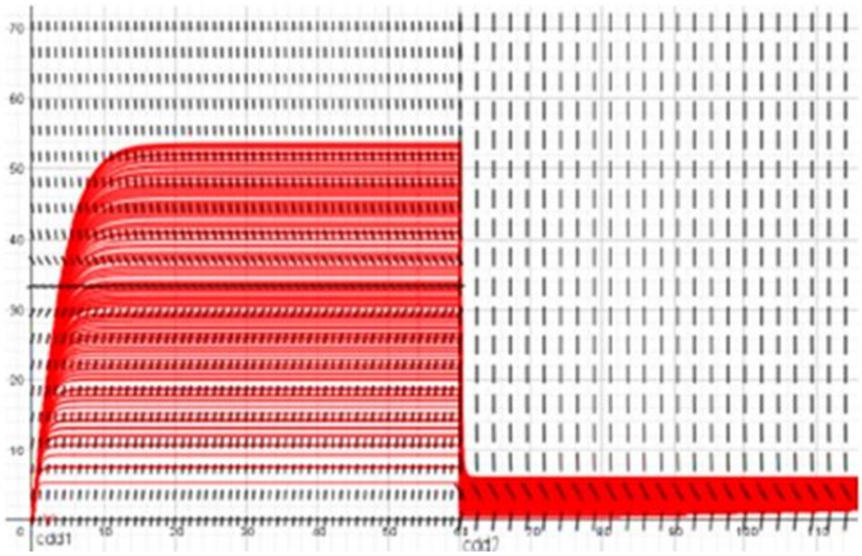


Figura 6. Simulação da curva da velocidade do paraquedista para diferentes massas, realizada pelos estudantes do cenário 2

A construção da simulação do comportamento do fenômeno por meio de campos de direções e curvas traçadas no GeoGebra envolveu o uso de um algoritmo para lidar com as ferramentas do *software* de maneira sequencial. Na atividade Salto de Paraquedas é possível perceber indícios acerca de como esse algoritmo foi pensado, conforme os diálogos entre estudantes e professor ao construírem as curvas e os campos de direções no GeoGebra, como mostra o excerto a seguir:

A14:	Como faço para colocar a seguinte informação no GeoGebra na 2ª EDO: Vb(60)=Va(60)?
A14:	Obrigada.
P:	Você já traçou a curva de Va(t)?
A14:	Sim.
P:	É só ir em ponto lá nas ferramentas na parte superior e clicar na curva gerada de Va, no GeoGebra o nome é provavelmente itn1. [...] Aí você arrasta o ponto até x=60 e acha o valor de v_a nesse ponto.
A14:	Eu encontrei o valor no ponto (60, v_a 60). Eu queria saber o seguinte, tem como vincular esse ponto na 2ª EDO, ou sempre preciso informar manual?
P:	Tem como vincular. Basta escrever em y inicial $y(B)$.

Neste diálogo, evidencia-se como o *algoritmo* mostra a *automação* de soluções para a situação-problema, corroborando com uma das formas do algoritmo ocorrer, conforme Shute et al. (2017) e ISTE/CSTA (2011). A automação se evidencia no cálculo da condição inicial do segundo PVI, a partir da solução do primeiro PVI de modo automatizado. De acordo com Ang (2021), nesse processo, a construção de um algoritmo para simulação de um fenômeno envolve a sistematização e a abstração das informações essenciais. De fato, nessa atividade, faz-se importante considerar, por exemplo, que as condições iniciais de cada PVI representam a velocidade de saída da aeronave no PVI 1 e a velocidade na abertura do Paraquedas no PVI 2, além de sistematizar o que se pode interpretar acerca do fenômeno a partir da simulação, conforme o diálogo a seguir:

P: Vamos reformular essa pergunta da seguinte forma: o que você aprendeu a respeito do fenômeno por meio dos resultados matemáticos?

A6: Então, deu para aprender a analisar alguns momentos principais do fenômeno, por exemplo, entender o que acontece quando as massas são diferentes, e entender que ocorre uma desaceleração grande quando se abre o paraquedas e suas velocidades de pouso.

A6: Assim dá para saber o valor das velocidades quando alguns fenômenos físicos acontecem, quando Fg=Frar [força de atração da gravidade se iguala a força de arrasto do ar], por exemplo.

A *depuração* ocorreu por meio de uma comparação da análise qualitativa e da análise da solução analítica, visando perceber possíveis equívocos obtidos na observação dos campos de direção, bem como erros matemáticos. Na *generalização*, os estudantes precisam perceber a influência de aspectos associados à força de arrasto e de atração de gravidade. No caso da atividade, o modelo matemático construído não leva em conta, por exemplo, forças que agem horizontalmente sobre o corpo do paraquedista, sendo, portanto, possível de ser utilizado em outras situações sob determinadas condições.

Nas duas categorias, é possível indicar dimensões do pensamento computacional classificadas por Shute et al. (2017) e práticas que vinculam essas dimensões apontadas por Weintrop et al. (2016). A decomposição, abstração, algoritmia, depuração e generalização são comuns ao desenvolvimento das duas atividades e se mostram articuladas tanto no pensamento computacional como meio para resolver problemas da situação da realidade, quanto como meio de análise de modelos matemáticos.

A *decomposição* se mostra na fragmentação do fenômeno em diferentes situações hipotéticas ou fases temporais e dependem das características do fenômeno em si, bem como das hipóteses e simplificações que subsidiam o modelo matemático. A *abstração*, por sua vez, se mostra quando os estudantes consideram as informações relevantes do fenômeno sob investigação e pode ocorrer de diferentes maneiras: na busca por uma estruturação matemática da situação-problema (atividade Frota de Veículos); na compreensão do fenômeno a partir da extração de informações do modelo matemático (atividade Salto de Paraquedas).

Na atividade da frota de veículos, a abstração decorreu do tratamento dos dados, do reconhecimento de padrões em um conjunto de dados coletados acerca do fenômeno e na construção do modelo matemático. A abstração se mostra fruto de um processo de idealização do fenômeno por meio da matemática, sendo parte do processo de matematização, conforme Almeida (2018) e Pollak (2012). Essa característica da abstração aponta para o uso da matemática em prol da modelagem (Niss & Blum, 2020).

Na atividade Salto de Paraquedas, por sua vez, a abstração se deu no reconhecimento de padrões em simulações construídas a partir do modelo matemático e na interpretação desses padrões à luz do fenômeno sob investigação. Como o ponto de partida da análise de modelos é o próprio modelo matemático (Javaroni & Soares, 2012; Soares & Borba, 2011), a abstração se dirige para a extração de informações implícitas no modelo matemático que podem auxiliar na compreensão do fenômeno, o que evidencia a modelagem em prol da matemática (Niss & Blum, 2020).

O *algoritmo* se evidencia na otimização de etapas para o uso de métodos matemáticos na construção do modelo matemático (atividade Frota de Veículos), bem como na forma de pensamento para construção de simulações, visando a automação de soluções (atividade Salto de Paraquedas). De acordo com Shute et al. (2017), o algoritmo pode se dar tanto na otimização de uma sequência de etapas, quanto na automação de um processo.

A *depuração* e a *generalização* são dimensões que emergem na avaliação do modelo matemático, ao identificar possíveis equívocos matemáticos e analisar as potencialidades e limitações do modelo matemático em relação ao fenômeno em estudo. Ambas dimensões se evidenciam no caráter iterativo da modelagem matemática, na interpretação de resultados, na validação do modelo matemático e no uso de técnicas de avaliação (Almeida, 2022; Almeida et al., 2021).

Essas dimensões comuns se desencadeiam a partir de diferentes ações nas atividades de modelagem matemática, que caracterizam a especificidade de cada categoria. Por um lado, no pensamento computacional como meio para resolver problemas da situação da realidade, observa-se a que a matematização cumpre um papel fundamental para desencadear o pensamento computacional, sendo uma ação que se articula à prática de dados, à decomposição, ao reconhecimento de padrões e à estruturação matemática da situação-problema como parte da abstração. Dessa forma, como apontado por Kaminski (2023), a abstração é um componente central e base para fazer emergir as outras habilidades do pensamento computacional em atividades de modelagem matemática.

Por outro lado, no pensamento computacional como meio de análise de modelos matemáticos, observa-se que a simulação emerge como eixo articulador das outras dimensões. De acordo com Weintrop et al. (2016), as simulações e os modelos computacionais podem tornar os conceitos mais acessíveis e auxiliar na compreensão dos fenômenos pelos alunos. Os modelos computacionais são entendidos nesse estudo como representações não estáticas de fenômenos que podem ser simuladas por um computador (Weintrop et al., 2016). Assim, construir os modelos computacionais (campos de direção associados ao modelo matemático expresso por uma equação diferencial, por exemplo), requer dos estudantes abstração, reconhecimento de padrões, decomposição, produção de algoritmo, entre outros aspectos.

Considerações finais

Neste artigo, buscamos investigar a seguinte questão de pesquisa: Como, em atividades de modelagem matemática, pode se desencadear pensamento computacional? A partir da triangulação de dados provenientes de dois cenários diferentes de pesquisa, constatam-se duas categorias que mostram como o pensamento computacional pode ser desencadeado em atividades de modelagem matemática.

A primeira categoria consiste no pensamento computacional como um meio para resolver problemas da realidade. Nesse caso, coletar, analisar, formular hipóteses e selecionar variáveis, construir diferentes modelos matemáticos e interpretar e avaliar esses modelos constitui-se uma oportunidade para mobilização de dimensões para o desenvolvimento do pensamento computacional, como a abstração, decomposição, produção de algoritmos, depuração e generalização. Essas dimensões se mostram no uso de recursos computacionais e matemáticos para estruturação matemática da situação-problema e são desencadeadas a partir da matematização, que articula a abstração às outras dimensões. De acordo com Ang (2021), ao analisar dados para construir um modelo matemático, o reconhecimento de padrões em um conjunto de dados é uma dimensão importante que possibilita a construção de relações matemáticas em atividades de modelagem matemática.

O pensamento computacional caracterizado dessa forma se aproxima do entendimento de Navarro e Sousa (2023), que destaca a existência de nexos conceituais entre pensamento algébrico, pensamento algorítmico e pensamento computacional. A modelagem matemática pode potencializar formas de pensamento para resolver problemas da realidade, possibilitando a interpretação de dados, levantamento e sistematização de hipóteses, busca de regularidades e apropriação de abstrações. Movimentos entendidos por Navarro e Sousa (2023) como modos de promover o pensamento computacional na Educação Matemática.

A segunda categoria diz respeito ao pensamento computacional como um meio de análise de modelos matemáticos. Nessa categoria, os estudantes são convidados a analisar o fenômeno por meio de um modelo matemático já existente (Javaroni & Soares, 2012; Soares & Borba, 2011). A simulação do fenômeno por meio do modelo matemático e do modelo computacional se mostra como eixo articulador das outras dimensões do pensamento computacional, sendo a abstração caracterizada pelo reconhecimento de padrões nas simulações. A análise do modelo matemático, mediado pelas simulações, pode se dirigir tanto para a finalidade de extrair informações acerca do modelo, quanto para otimizar o modelo matemático, como destacam Greefrath e Siller (2017). Segundo Ang (2021), simulação de um fenômeno requer construir algoritmos, abstrair e sistematizar informações essenciais do fenômeno.

Para Greefrath e Siller (2017), simulações são utilizadas para investigar uma operação, um processo ou um experimento com a ajuda de modelos matemáticos. Nesse sentido, como apontam os autores, simulações e modelagem matemática estão inseparavelmente conectadas. Construir simulações em atividades de modelagem matemática requer dimensões para o desenvolvimento do pensamento computacional, que podem servir como meio para análise de modelos matemáticos.

Concorda-se com Kaminski (2023) que as habilidades indicadas na análise dos dados não são exclusivas do pensamento computacional, mas são necessárias para o seu desenvolvimento. Tais habilidades ou dimensões podem emergir em diferentes práticas de diferentes áreas do conhecimento mediadas pela modelagem matemática. Há assim, uma simbiose entre o pensamento computacional e a modelagem matemática, conforme destacado também por Villa-Ochoa et al. (2022).

A partir dos resultados obtidos, pode-se dizer que o pensamento computacional em atividades de modelagem matemática incorpora e amplia as funções das tecnologias digitais (investigação, experimentação, visualização, simulação, controle, cálculo) caracterizadas por Greefrath *et al*. (2018), na medida em que não se limita a elas, mas pode utilizá-las em processos de pensamento para formulação, resolução e análise de problemas.

Notas

[1] Para detalhes do método, ver Bassanezi (2002).

Referências

Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, *50*, 19–30. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4

Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VIDYA*, *42*(2), 121–145. https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4236

Almeida, L. M. W., Castro, E. M. V., & Silva, M. H. S. (2021). Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. *Alexandria*, *14*(2), 383–406. https://doi.org/10.5007/1982-5153.2021.e77227

Almeida, M. E. B., & Valente, J. A. (2019). Pensamento computacional nas políticas e nas práticas em alguns países. *Revista Observatório*, *5*(1), 202–242. https://doi.org/10.20873/uft.2447-4266.2019v5n1p202

Ang, K. C. (2021). Computational thinking and mathematical modelling. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 19–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_2

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Duarte, T. (2009). *A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica)*. CIES e-WORKING PAPER N. 60/2009. Centro de Investigação e Estudos de Sociologia – ISCTE. https://repositorio.iscte-iul.pt/bitstream/10071/1319/3/CIES-WP60%20_Duarte.pdf

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados.

Gadanidis, G., Hughes, J. M., Minniti, L., & White, B. J. (2017). Computational thinking, grade 1 students and the binomial theorem. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*, 77–96. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0019-3

Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, *50*, 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Greefrath, G., & Siller, H. S. (2017). Modeling and simulation with the help of digital tools. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modeling and applications* (pp. 529–539). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_44

ISTE/CSTA. (2011). *Computational Thinking Teacher Resource*. (2ª Ed.). https://cdn.iste.org/www-root/2020-10/ISTE_CT_Teacher_Resources_2ed.pdf.

Javaroni, S. L., & Soares, D. D. S. (2012). Modelagem matemática e análise de modelos matemáticos na educação matemática. *Acta Scientiae*, *14*(2), 260–275. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/232

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_58

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*, 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kaminski, M. R. (2023). *O pensamento computacional no âmbito da modelagem matemática na perspectiva da aprendizagem significativa*. Tese de doutorado. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil.

Meyer, J. F. D. C. A. (2020). Modelagem matemática: O desafio de se fazer a Matemática da necessidade. *Com a Palavra, o Professor*, *5*(11), 140–149. https://doi.org/10.23864/cpp.v5i11.559

Navarro, E. R., & Sousa, M. C. (2023). *Qual o conceito de pensamento computacional para a educação matemática?*. Dialética.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge.

Papert, S. (1994). *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática*. (2.ª ed.). Artes Médicas.

Pollak, H. O. (2012). What is mathematical modeling?. In H. Gould, D. R. Murray, & A. Sanfratello (Eds.), *Mathematical Modeling Handbook*. COMAP. https://www.comap.com/membership/member-resources/item/mathematical-modeling-handbook

Pollak, H. O. (2015). The place of mathematical modelling in the system of mathematics education: Perspective and prospect. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 265–275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_21

Santos, K. D. S., Ribeiro, M. C., Queiroga, D. E. U. D., Silva, I. A. P. D., & Ferreira, S. M. S. (2020). O uso de triangulação múltipla como estratégia de validação em um estudo qualitativo. *Ciência & Saúde Coletiva*, *25*(2), 655–664. https://doi.org/10.1590/1413-81232020252.12302018

Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, *22*, 142–158. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003

Soares, D. S., & Borba M. C. (2011). Fenômeno biológico, sistema dinâmico e noções de Cálculo I: Uma proposta. In L. M. W. Almeida, J. L. Araújo, & E. Bisognin (Orgs.), *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática* (pp. 227–247). Editora da Universidade Estadual de Londrina.

Soares, D. S., & Borba, M. C. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM*, *46*, 575–587. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0568-5

Sousa, B. N. P. A., & Tortola, E. (2021). Modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *12*(2), 1–25. https://doi.org/10.26843/rencima.v12n2a12

Villa-Ochoa, J. A., Carmona-Mesa, J. A., Quiroz-Vallejo, D. A., Castrillon-Yepes, A., & Farsani, D. (2022). Computational thinking in mathematical modeling projects. A case study with future mathematics teachers. In Á. Rocha, C. Ferrás, E. J. Delgado, & A. M. Porras (Eds.), *Information Technology & Systems: Proceedings of ICITS 2022*, (pp. 460–470). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-96293-7_38

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, *25*(1), 127–147. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

Wing, J. M. (2011). Research Notebook: Computational Thinking—What and Why. *The Link: The Magazine of CMU's School of Computer Science*, *6*, 20–23. https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why