Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas al seleccionar y usar ejemplos en la factorización de expresiones algebraicas

Mathematics teacher's specialized knowledge manifested in selecting and using examples in the factorization of algebraic expressions

Nicolás Sánchez Acevedo
Universidad Central de Chile; Universitat de València
Chile; España
nicolas.sanchez@ucentral.cl

Luis Carlos Contreras
Universidad de Huelva
España
lcarlos@uhu.es

Carlos Segura Cordero
Universitat de València
España
carlos.segura@uv.es

Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@uaz.edu.mx

Resumo. Presentamos un acercamiento al conocimiento especializado de una profesora de matemáticas en 3° grado de secundaria (16 a 17 años) puesto en juego en la factorización de expresiones algebraicas (contenido previo a ecuaciones cuadráticas). Por medio de un enfoque cualitativo y un estudio de caso instrumental recopilamos la información a través de videograbaciones de las lecciones y entrevistas semiestructuradas. Tal información fue analizada usando el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Los resultados muestran evidencias e indicios de que la profesora selecciona y usa ejemplos movilizando conocimiento específico de los temas, de la enseñanza de las matemáticas y de las características del

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 34(1) 128-148
https://doi.org/10.48489/quadrante.38106
Recebido: October 2024 / Aceite: June 2025

aprendizaje de las matemáticas. Los resultados permiten avanzar en posibles relaciones de conocimiento especializado en la factorización de expresiones algebraicas a partir de la selección y uso de ejemplos, que es un contenido previo a las ecuaciones cuadráticas.
Palavras-chave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas; selección y uso de ejemplos; factorización de expresiones algebraicas; estudio de caso.

Abstract. We present an approach to the specialized knowledge of a secondary mathematics teacher (teaching students aged 16 to 17) in the context of algebraic expression factorization (a topic that precedes quadratic equations). Using a qualitative approach and an instrumental case study, we gathered data through video recordings of lessons and semi-structured interviews. This data was analyzed using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. The results provide evidence that the teacher selects and uses examples by leveraging specific knowledge about the content, mathematics teaching, and the characteristics of students' mathematical learning. These findings contribute to our understanding of the possible relationships between specialized knowledge in algebraic expression factorization and the teacher's selection and use of examples, a topic that lays the groundwork for quadratic equations.
Keywords: mathematics teacher's specialized knowledge; exemplification, factorization, case study.

Introducción

El conocimiento del profesor es trascendental en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la trayectoria escolar de los estudiantes, pues es quien tiene la capacidad de decidir cómo y qué enseñar, lo que, entre otras acciones, implica reflexionar sobre qué ejemplos y representaciones seleccionar para resolver diversas situaciones al abordar un contenido específico (Shulman, 1986). También es el responsable de la enseñanza de conceptos, procesos y teoremas matemáticos, ofreciendo diferentes posibilidades en la comprensión sobre cómo abordar los contenidos de aprendizaje (Karaağaç, 2005; Marton & Morris, 2002). Esto no es trivial, pues se ha evidenciado que algunas de las dificultades que manifiestan los estudiantes pueden deberse a una enseñanza centrada sólo en el uso de definiciones, procedimientos, demostraciones y teoremas (Sánchez-Acevedo et al., 2024), sin apenas ejemplificaciones, aspecto que resulta ser restrictivo para el aprendizaje de los estudiantes (Goldenberg & Mason, 2008).

En efecto, diversos trabajos sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas (e.g., Ball et al., 2008; Shulman, 1986) dan cuenta de la importancia que tienen los ejemplos en la enseñanza de las matemáticas. En particular, se ha planteado la relevancia de los ejemplos como una de las componentes del conocimiento del profesor en la labor de comunicarse de manera efectiva con los estudiantes y promover aprendizajes que permitan establecer relaciones de conocimiento (Zakaryan et al., 2018). Los ejemplos sirven como fuente de analogías, uso de metáforas, ejemplos de aplicaciones, demostraciones y reformulaciones con miras a promover el aprendizaje de los estudiantes (Rowland et al., 2009).

Aun cuando la mayoría de los profesores usan de alguna manera los ejemplos (Chick & Harris, 2007), no todo profesor de matemáticas es consciente de que los ejemplos usados en las clases desempeñan un papel predominante en el proceso de enseñanza. El aprendizaje de conceptos, procedimientos, estrategias y definiciones depende, en gran medida, de una adecuada selección y uso de ejemplos (Figueiredo & Contreras, 2013), como también de la atención que se otorga al objeto de enseñanza que se quiere representar (Kullberg et al., 2024; Marton et al., 2003).

Zodik y Zaslavsky (2007) destacan que el docente puede dar diferentes usos a los ejemplos de manera versátil, pues estos dependen de sus distintos propósitos en la enseñanza de objetos matemáticos. Asimismo, se señala que dichos ejemplos deben dar sentido y promover la comprensión de estos objetos (Kullberg et al., 2024) en función del aprendizaje de los estudiantes.

Uno de los temas que ha mostrado ser complejo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el álgebra en contexto escolar (Noto et al., 2020; Ying et al., 2020), dado los procesos de abstracción que requiere. Los estudios de Noto et al. (2020) y Ying et al. (2020) dan cuenta de que el álgebra escolar es un área compleja de enseñanza, y por consiguiente, de aprendizaje, pues son estos quienes han presentado dificultades tanto en la comprensión de expresiones simbólicas como en la interpretación de variables y operaciones. Estas dificultades evidencian la relevancia de que el profesor de matemáticas cuente con un conocimiento especializado, tanto del contenido algebraico como del contenido didáctico que se asocia a la enseñanza. En este sentido, el conocimiento del profesor se vuelve relevante para anticipar errores, elaborar explicaciones y argumentos, seleccionar representaciones ad hoc que permitan a los estudiantes el tránsito desde el ámbito numérico al algebraico-simbólico.

Algunas investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza del álgebra en contexto escolar, específicamente en el contenido de las factorizaciones, se han preocupado de explorar algunas relaciones entre las variables en el aprendizaje de los estudiantes, causas y el papel del profesor de matemáticas y su conocimiento para la enseñanza. Los trabajos de Barreto (2009), Flores et al. (2017) y Jiménez et al. (2011) se han centrado en promover la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes en el tema de álgebra escolar y del contenido de expresiones algebraicas; Fitzmaurice y Hayes (2020) y Mok (2009) se han centrado tanto en las prácticas de los profesores como en el uso de recursos para la enseñanza (tanto en activo como en formación); Girit y Akyuz (2017) y Yildiz y Akyüz (2019) han estudiado los conocimientos del profesor en la enseñanza de las factorizaciones.

En el contexto del aprendizaje de las factorizaciones en el álgebra escolar, Barreto (2009) estudió el uso de bloques geométricos en la enseñanza de productos notables y las factorizaciones, evidenciando que contribuyen a la comprensión visual de expresiones algebraicas. A pesar de su potencial, su aplicación ha sido escasa en el aula escolar, principalmente por lineamientos curriculares rígidos de enseñanza. A partir de los resultados, se propone realizar integraciones entre las representaciones visuales y simbólicas para mejorar el aprendizaje conceptual del álgebra. Flores et al. (2017) diseñaron una aplicación móvil con actividades de álgebra para secundaria. A partir de las aplicaciones, los estudiantes mejoraron su participación en clases, así como su habilidad de resolución de ejercicios, aun cuando persistieron las dificultades conceptuales. Los autores aconsejan no limitar el uso de tecnología, pero con foco en la retroalimentación, así como en el diseño de tareas que promuevan comprensión de estos contenidos.

En el contexto del aula escolar y las prácticas de los profesores de matemáticas, Mok (2009) describió el desarrollo de una sesión de clases en el tema de factorización de polinomios, desarrollada por un profesor en una escuela de Hong Kong, con el fin de analizar las prácticas docentes y su impacto en el aprendizaje del álgebra. A través de un análisis didáctico, se encontraron evidencias de que el enfoque utilizado era fuertemente procedimental y con una limitada profundización conceptual de las factorizaciones. Si bien el profesor utilizó ejemplos representativos, estos no fomentaron la exploración de estructuras algebraicas. Se recomienda, en clases de álgebra, incorporar variaciones en los ejemplos y estrategias que favorezcan la comprensión conceptual en la enseñanza del álgebra y las factorizaciones de expresiones algebraicas.

Finalmente, en el contexto del conocimiento del profesor de matemáticas, Girit y Akyüz (2019) examinaron cómo dos profesores enseñaban la manipulación de expresiones algebraicas en contexto escolar. Como parte de los resultados, evidenciaron debilidades en el uso de representaciones y explicaciones conceptuales por parte de los profesores. Con ello, se recomienda reforzar la formación en conocimientos específicos de álgebra escolar para la enseñanza, así como profundizar en el conocimiento sobre el uso de recursos manipulativos (baldosas algebraicas) para una mayor apropiación conceptual. Yildiz y Akyüz (2019) analizaron las prácticas y el conocimiento de profesores de matemáticas en el diseño y enseñanza del álgebra en secundaria. A partir de los hallazgos, se identificaron carencias en el conocimiento del contenido y en las estrategias que promovían los profesores para una comprensión conceptual. Estos autores recomiendan incluir tareas centradas en representaciones, por medio de un conocimiento sólido que justifique las decisiones de enseñanza, las que también pueden servir de base para la formación del profesorado. Específicamente, Fitzmaurice y Hayes (2020) estudiaron la comprensión de la factorización de ecuaciones cuadráticas en futuros profesores. Encontraron un predominio del conocimiento procedimental, pero escasa comprensión conceptual. Con ello, proponen llevar a cabo la integración de actividades en la formación inicial que conecten procedimientos con significados algebraicos, considerando sus conocimientos del contenido como didácticos.

Por lo tanto, de los estudios descritos emergen dos temas relevantes de investigación que pueden ser abordados de manera conjunta: (i) el papel que cumplen los ejemplos (su selección y uso) en la enseñanza de la matemática, y (ii) el álgebra escolar en el tema de las factorizaciones. Pero, además, hemos de añadir que los trabajos sobre el conocimiento del profesor de matemática en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la factorización, desde una perspectiva especializada (Carrillo et al., 2018), son escasos.

A pesar de la atención que se ha puesto al conocimiento del profesor de matemáticas en los procesos de enseñanza, se evidencia un vacío específico en la relación entre el conocimiento del profesor de matemáticas y la selección y uso de ejemplos (Figueiredo et al., 2012), en relación con el contenido de las factorizaciones algebraicas. Si bien algunos estudios han abordado el papel de los ejemplos en contexto escolar (Mok, 2009), y otros se han centrado en el conocimiento del contenido o didáctico del profesorado (Girit & Akyuz, 2017; Yildiz & Akyüz, 2019), las investigaciones que articulan ambas perspectivas (conocimiento del profesor de matemáticas y selección y uso de ejemplos) son escasas, más aún desde una perspectiva especializada (Adler & Pournara, 2020; Sánchez-Acevedo et al., 2023), considerando la atención que requiere el álgebra escolar.

En particular, se requiere mayor indagación sobre cómo los profesores seleccionan, justifican y utilizan ejemplos para representar este contenido, y de qué manera estas decisiones se vinculan con su conocimiento del contenido matemático y del contenido para la enseñanza (Zodik & Zaslavsky, 2007). Comprender esta relación puede ofrecer orientaciones para el diseño de procesos formativos que fortalezcan la enseñanza del álgebra en el sistema escolar.

De acuerdo con esto, nos planteamos como objetivo caracterizar el conocimiento especializado de una profesora de matemáticas de secundaria en la selección y uso de ejemplos durante la enseñanza de las factorizaciones de expresiones algebraicas.

Fundamentos teóricos

En este apartado presentamos los fundamentos teóricos de la investigación. En primer lugar, el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, de sus siglas en inglés, Carrillo et al., 2018), y, en segundo lugar, la noción de ejemplos y de ejemplo planeado para la enseñanza (Zodik & Zaslavsky, 2008).

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Desde que los trabajos de Lee Shulman (1986) destacaron la necesidad de un conocimiento didáctico del contenido para enseñar la materia, diversos investigadores en educación matemática han desarrollado modelos más específicos para describir con mayor profundidad tanto el conocimiento matemático como el didáctico matemático para la enseñanza (e.g. Ball et al, 2008; Rowland et al., 2009).

El trabajo de Ball et al. (2008), relacionados con el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) entregan una refinación en relación con modelos de conocimientos previos, en la que proponen una categorización del conocimiento matemático observado-en/requerido-para la enseñanza que emerge de la observación en el aula de clases (Escudero-Ávila, 2015), así como de la reflexión en la que los profesores deben conocer los contenidos matemáticos. En el modelo MKT (Ball et al., 2008) se diferencian dos dominios de conocimiento: *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) y el *Subject Matter Knowledge* (SMK). Ambos dominios incluyen tres subdominios específicos, relacionados con los conocimientos que refieren a la enseñanza, y aquellos relacionados con los contenidos matemáticos.

En el SMK, uno de los subdominios, el *Specialized Content Knowledge* (SCK), se define como aquel conocimiento matemático, del profesor, que está por sobre lo que cualquier adulto debe conocer (Ball et al., 2008), donde se incluye *saber por qué se hace así*, que es un conocimiento mayor al relacionado con el *sólo saber hacer*. Este subdominio, de acuerdo con Herbst y Kosko (2012) supuso un gran aporte en la comprensión del conocimiento específico y puramente matemático en la profesión docente.

A partir de algunos problemas de delimitación y definición de este esté subdominio, por ejemplo, con el CCK (Escudero-Ávila, 2015; Sosa, 2011; Vasco, 2015), es que Carrillo et al. (2013), Carrillo et al. (2013) enfocan el conocimiento del profesor desde su especialización profesional, tomando en cuenta el contenido matemático como aspecto central y específico del profesor de matemáticas, estableciendo una integración de conocimiento *de y sobre la matemática* necesaria para la enseñanza (Escudero et al., 2012; Flores et al., 2013; Carrillo, Flores et al., 2013).

Desde esta perspectiva, el conocimiento del profesor de matemáticas tiene un carácter especializado, tanto en lo matemático como en lo didáctico, considerando a las creencias y concepciones como elementos que permean ambos dominios (Montes, 2015). Esta perspectiva fundamenta el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) (Carrillo et al., 2018), que aporta una mirada analítica del conocimiento especializado que se moviliza en el aula de Matemática (Rojas et al., 2015).

El MTSK está organizado por tres dominios. El Conocimiento Matemático (MK), el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), y un tercer dominio de concepciones y creencias acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje (Figura 1).

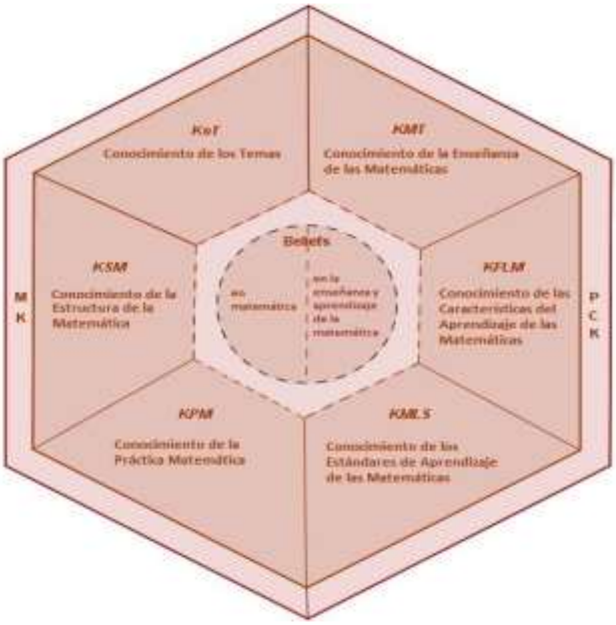

Figura 1. Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018)

El dominio matemático (MK) considera el conocimiento matemático como una disciplina científica y está compuesto por tres subdominios que describimos:

- El *Conocimiento de los Temas (KoT)* se refiere al conocimiento profundo y sustentado en el contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. En este subdominio se encuentran las conexiones intraconceptuales, relacionadas con un mismo tema, e identificamos las siguientes categorías: definiciones, propiedades y sus fundamentos, procedimientos asociados a un tema matemático, registros de representación y, fenomenología y aplicaciones. Sus categorías son: procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. Si se considera la expresión de trinomio cuadrado $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ es un ejemplo de factorización (procedimiento) con coeficiente enteros. Asimismo, si este trinomio se representa se representa geométricamente, como se ve en la Figura 2:

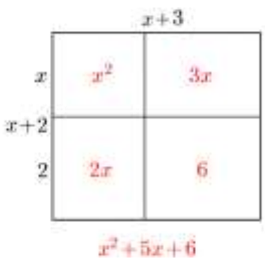

Figura 2. Representación de la factorización del trinomio del ejemplo

Sería un conocimiento de registros de representación, al ilustrar, vía un registro gráfico, la representación de la factorización del trinomio. Al profundizar en la intencionalidad del uso del ejemplo, la relación entre el trinomio y su factorización podría ser conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones en el contexto de cálculo de áreas en geometría.

- El *Conocimiento de la Estructura de la Matemáticas (KSM)* se refiere al conocimiento sobre las conexiones de simplificación, las conexiones de complejización y las conexiones transversales y auxiliares entre los diversos temas que conforman el andamiaje matemático, a nivel interconceptual. Si se considera el ejemplo $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ de factorización un conocimiento de simplificación, en el ámbito numérico, sería la factorización $(3 + 5)(3 + 2) = 3^2 + (5 + 2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 40$.
- El *Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)* se refiere al conocimiento sobre la práctica de hacer matemáticas, es decir, el uso de símbolos, el papel de la demostración, cómo se define, etc. desde un punto de vista lógico-matemático. En este subdominio es relevante el uso del lenguaje formal, de la simbología matemática y su sintaxis (Espinoza-Vázquez et al., 2018). Mientras KoT y KSM forman parte del conocimiento sustantivo de la matemática, KPM es el conocimiento sintáctico. Actualmente, el modelo no cuenta con categorías definidas en este subdominio de conocimiento, pero hay algunos indicadores descriptivos (Carrillo et al., 2018). Algunos de estos son: jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso de lenguaje formal, prácticas particulares del quehacer matemático (p.e., modelación).

El dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK) se relaciona de manera directa con el conocimiento matemático para fundamentar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y está compuesto por tres subdominios que describimos:

- El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)* se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre el contenido como objeto para la enseñanza, su conocimiento sobre la pertinencia, potencialidad y limitaciones de algunos recursos didácticos en la enseñanza de los temas matemáticos. En este subdominio identificamos las categorías de teorías de enseñanza, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y, recursos materiales y virtuales. Un conocimiento en este subdominio es la selección intencionada se secuencias de ejemplos sobre factorizaciones, por ejemplo, de monomio por binomios, transitando desde el ámbito numérico al algebraico. Asimismo, el uso de la teoría de la variación (Kullberg et al., 2017), para que los estudiantes perciban el cambio de aspectos críticos, en medio de aquellos aspectos, de un objeto de enseñanza, que permanecen invariantes.

- El *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las matemáticas (KFLM)* se refiere al conocimiento del profesor sobre cómo aprenden los estudiantes, considerando en la interacción con el objeto matemático. En este subdominio identificamos las categorías sobre teorías de aprendizaje, formas de interacción con el contenido matemático, fortalezas y dificultades del aprendizaje, y los aspectos afectivos y emocionales del aprendizaje matemático. En este subdominio, el conocimiento del profesor, en la categoría de fortalezas y dificultades, se asocia con los errores que tienen los estudiantes para factorizar expresiones algebraicas, o dada una factorización, dejar en su expresión algebraica original.
- El *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)* se refiere al conocimiento del profesor de todo aquello (matemático) que se establece normativamente que el estudiante debe aprender en cierto nivel educativo. Esto puede desprenderse de documentos curriculares, estándares oficiales, tanto nacionales como internacionales. En este subdominio identificamos las categorías de: desarrollo procedimental y conceptual esperado, expectativas de aprendizaje, y secuenciación de los temas con contenidos anteriores o posteriores. En este subdominio, está el conocimiento sobre los niveles en los que se imparte el tema de factorizaciones de expresiones algebraicas, objetivos de aprendizajes relacionados, nivel de profundidad con el que se enseñan las factorizaciones, y en la secuenciación, cuáles son los contenidos previos que permiten la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas.

Los ejemplos en matemáticas

Existen diferentes aproximaciones a la noción de ejemplo en matemáticas. Watson y Mason (2005) usan el término *ejemplo* como un aspecto de utilidad para el estudiante, es decir, como la forma en que estos pueden generar ejemplos, y cómo estos pueden ser o no matemáticamente correctos. Sinclair et al. (2011) explican que un ejemplo es una instancia particular de una idea general, siendo un ejemplo un caso de un aspecto matemático con propiedades específicas, con una solución razonada y elaborada a un problema del que se quiere tener respuesta, o también, un caso de un teorema o método de razonamiento.

Así, y dependiendo de la noción de ejemplo adoptada, esto permite proporcionar un contexto a partir de variaciones que facilita a los estudiantes la distinción de características relevantes. De acuerdo con esto, podemos considerar que un ejemplo no es un objeto que exista de forma independiente, como tampoco lo es el término ejemplificación, dado que este no transmite ningún contenido sin que haya una contextualización de lo que se pretende ejemplificar. Además, aquello que se ejemplifica puede surgir de una diversidad de situaciones.

La idea esencial de un ejemplo es la acción de ver algo como un ejemplo de alguna cosa (objeto o noción matemática). Por ejemplo, en el caso de la factorización de expresiones algebraicas, la expresión algebraica factorizada $x^2 + x = (x + 1)$ puede verse como un ejemplo de diferentes cosas: como la acción de factorizar un monomio y un binomio, o como un caso de factorización de un trinomio cuadrado con coeficiente $\mathrm{c} = 0$, que depende del objetivo donde se quiere centrar la atención. Esto plantea la distinción de que un ejemplo tenga sentido en un contexto dado y particular de su enseñanza e intencionalidad (Marton & Morris, 2002).

Sobre los tipos de ejemplos se han propuesto diversas clasificaciones, algunas relacionadas con los aspectos a resaltar del concepto u objeto matemático; otras, de acuerdo con los objetivos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (e.g. Rowland, 2008; Alcock, 2008). En este trabajo se pone el foco en los tipos de ejemplos planeados, que corresponden a la tipología propuesta por Zodik & Zaslavsky (2008), quienes diferencian entre ejemplos planeados, ejemplos modificados y ejemplos espontáneos. Así, los ejemplos planeados corresponden a aquellos que son planificados de antemano por el profesor, y que son incluidos intencionadamente en la planificación de la lección. Estos pueden ser generales, que son aquellos que dan una estructura de lo que se hará en el aula, y posteriormente, en la implementación, el profesor determina las posibles dimensiones y el rango de cambio (Kullberg et al., 2017) dentro del cual seleccionar los detalles, involucrando a los estudiantes en el proceso. Esta clasificación depende del grado de espontaneidad, y tiene como sustento el conocimiento del contenido matemático, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento de la epistemología de los estudiantes (Shulman,1986).

Metodología

Nos situamos desde un paradigma interpretativo, bajo una aproximación cualitativa (Denzin & Lincoln, 2003). El diseño de investigación es un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999) que nos permite adentrarnos en la comprensión del conocimiento especializado por una profesora de Matemáticas de secundaria en la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas. Este es un contenido previo al inicio del tema de ecuaciones cuadráticas.

Selección de la profesora

La profesora participante, a quien llamamos Jenny, se desempeñaba al momento de la investigación como docente de tercero medio (estudiantes de entre 16 y 17 años) en una escuela particular subvencionada ubicada en una localidad de Chile. Jenny es profesora de Matemáticas y Física, con una trayectoria de cinco años de experiencia profesional en el sistema escolar. Además, participa activamente en otras iniciativas vinculadas a contextos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, dando cuenta del papel y compromiso que manifiesta con la mejora de su práctica docente.

Fue seleccionada como caso de estudio por reunir características propias de un buen informante en investigación cualitativa: accesibilidad, disposición al trabajo reflexivo, compromiso con la enseñanza de las matemáticas y motivación por comprender fenómenos didácticos en profundidad (Loughran et al., 2008). En particular, la elección respondió al criterio de conveniencia señalado por Creswell (2014), ya que la profesora mostró un fuerte interés por explorar críticamente su propio conocimiento sobre la enseñanza del contenido de factorización de expresiones algebraicas en relación con la selección y uso de ejemplos. Asimismo, su perfil profesional permitió acceder a un conocimiento especializado manifestado en la práctica, especialmente a través del uso de ejemplos y relaciones matemáticas, aspectos relevantes en el análisis del conocimiento especializado presentado en esta investigación.

Recolección y análisis de datos

La recolección de datos se realizó por medio de la observación no participante (Creswell, 2007), y se videograbaron (Savola, 2008) siete clases (lecciones) en el contexto de la enseñanza de la ecuación cuadrática, de las cuales, en este trabajo mostramos aquella relacionada con la factorización de expresiones algebraicas, contenido previo a las técnicas de factorización de ecuaciones cuadráticas para determinar las soluciones. Esta lección se organizó en dos partes, y tuvo por objetivo: *reforzar las técnicas de factorización de expresiones algebraicas e introducir las ecuaciones cuadráticas*. La idea de esta introducción de repaso (conocimientos previos) fue realizada por la profesora con el objetivo de sentar una base de conocimiento en los estudiantes para comenzar a trabajar con técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas. La lección se centró en ejemplos diversos de factorización de expresiones algebraicas simples (binomios y trinomios), como trinomios cuadrados perfectos y con termino común.

Este último contenido, para posteriormente introducir las técnicas de factorización para determinar las soluciones de ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros, considerando los lineamientos curriculares demandados para este nivel educativo (Ver Tabla1).

Se analizaron las secciones de la lección de clases en que la profesora utilizó ejemplos para explicar conceptos o procedimientos relacionados con la factorización de expresiones algebraicas. Las videograbaciones fueron transcritas de forma literal, al igual que las entrevistas. Posteriormente, ambas fuentes se segmentaron en episodios de análisis, definidos como el conjunto de intervenciones de la Jenny relacionadas con los ejemplos específicos usados para enseñar un concepto (por ejemplo, desde que se presenta un trinomio hasta que se explica su factorización). Cada episodio fue dividido, a su vez, en unidades de información, entendidas como fragmentos de comunicación oral o escrita donde se manifiesta conocimiento especializado.

Tabla 1. Estructura de la clase de factorización e introducción a ecuaciones cuadráticas

Estructura de la lección	Descripción
Primera parte de la lección	Se ejemplifican las técnicas de factorización de binomios (un ejemplo) y trinomios perfectos (un ejemplo) y con término común (un ejemplo)
Segunda parte de la lección	Se introduce el concepto de ecuación cuadrática, posteriormente de haber trabajado el repaso de factorizaciones

Se utilizó el análisis de contenido (Bardin, 1996), con base en el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK; Carrillo et al., 2018). Se buscó identificar indicios y evidencias de conocimiento especializado, los cuales se distinguieron siguiendo el criterio propuesto por Escudero-Ávila et al. (2015): se consideró evidencia cuando fue posible confirmar la presencia de un conocimiento, y se consideró indicio cuando la información sugería la presencia o ausencia de dicho conocimiento, pero sin certeza. Para marcar esta distinción, se utilizó **negrita** para señalar evidencias y *cursiva para los indicios*, junto con las siglas del subdominio correspondiente (por ejemplo, KoT, KFLM, KMT, etc.).

El análisis lo llevamos a cabo en tres fases: descripción de las unidades de información, identificación del tipo de conocimiento manifestado y valoración de si se trataba de indicio o evidencia (Johnson et al., 2014).

La validez del análisis se reforzó mediante triangulación de fuentes (videograbación + entrevista) y triangulación por consenso entre investigadores (Stake, 2007), quienes revisaron de manera conjunta los episodios codificados hasta llegar a acuerdos interpretativos.

Resultados

A continuación, se analiza el conocimiento especializado de Jenny movilizado en la selección y uso de ejemplos de la factorización de expresiones algebraicas. Para este efecto, nos centramos en analizar los conocimientos que consideramos tienen una mayor riqueza (Bryman, 2012) en relación con el tema de factorización; es decir, los ejemplos que movilizaron una mayor cantidad de conocimientos especializados didácticos y matemáticos. Se dejaron de lado aquellos ejemplos que reportaron conocimientos ya evidenciados en los de mayor riqueza. El análisis considera los tres ejemplos seleccionados y utilizados por la profesora, en el orden temporal en que fueron presentados en la primera parte de clase, y que fueron parte del repaso de conocimientos previos.

Ejemplo 1. Factorice la siguiente expresión $4x^2 - 10xy$

Este primer ejemplo planeado (primera unidad de información) por Jenny es utilizado para recordar la factorización de expresiones algebraicas simples, en este caso, de un monomio por un binomio. En el siguiente fragmento se puede ver cómo Jenny muestra a los estudiantes la identificación del factor común de la expresión algebraica, tratando también, que los estudiantes vayan comprobando que el factor identificado (2x) permite construir la expresión original:

Profesora	¿Qué tienen en común en letra primero? La equis, [Anota en la pizarra $4x^2 - 10xy = x$] factor, ah… ¡número!, luego el factor común en número es el dos, ¡muy bien! porque ¿dos por cuánto le da cuatro? ¿Y dos por cuánto le da diez? Por lo tanto, tienen en común el dos, entonces sería, dos equis [Anota como factor común el $2x$]

Este fragmento permite evidenciar que Jenny conoce los **procedimientos (KoT)** relacionados con la factorización de expresiones algebraicas, puesto que identifica el factor común, y, además, muestra la justificación del factor común para llegar a la expresión original $4x^2 - 10xy = 2x(2x-5y)$. Seguidamente, un estudiante no comprende por qué el factor común lleva una x, preguntando: *"profesora, porque es una equis"*, con lo que la profesora responde:

Profesora	Porque tengo una equis al cuadrado, y una equis al cuadrado, es una equis por una equis [escribe $x^2 = x \cdot x$] ¿cierto? Queda dos ahí [Refiriéndose el término dentro del factor $2x$]

La respuesta de la profesora refuerza el procedimiento para explicar el proceso de factorización de la expresión algebraica **(KoT-procedimientos)**. Además, usa el término $4x^2$ del binomio $4x^2 - 10xy$ para descomponer el término $x^2 = x \cdot x$, usando la propiedad de multiplicación de potencias de igual base **(KoT-propiedades)**. El uso explícito de la propiedad de potencias, mostrándola al estudiante, nos da indicios de que la profesora habría utilizado esta *estrategia de enseñanza (KMT)* para potenciar y profundizar la comprensión en el aprendizaje de la factorización de los estudiantes. Con la finalidad de indagar en la forma que la profesora explica la factorización al estudiante, preguntamos en la entrevista lo siguiente sobre errores o dificultades de los estudiantes:

Alumno:	¿Qué es lo que la motivó a detallar la explicación de la factorización con $x^2 = x \cdot x$?
Profesora:	Un error es que confunden algunas propiedades, por ejemplo, en los trinomios […] por ejemplo se confunden con los signos. En este

caso, era para que vieran que el x^2 no es x+x y no cometan errores desde la multiplicación de encontrar factores.

La respuesta de la profesora evidencia su conocimiento de los errores que cometen los estudiantes **(KFLM-dificultades)** en la descomposición de factores, usando propiedades de potencias. Además, el uso del ejemplo espontáneo $x^2 = x \cdot x$ podría ser un indicio de conocimiento sobre *conexiones de simplificación (KSM)*, pues Jenny podría conocer qué y cómo se conecta el tema de factorizaciones de expresiones algebraicas con el tema de potencias y propiedades.

Ejemplo 2. Factorice la siguiente expresión $x^2 + 7x - 18$

Luego de haber mostrado el ejemplo de factorización del binomio (ejemplo anterior), en este segundo ejemplo (segunda unidad de información) se pretende ilustrar la factorización de un trinomio con término común. Aquí, Jenny presenta un trinomio ($x^2 + 7x - 18$) que es factorizable como un binomio con término común. Este ejemplo planeado, nos entrega indicios de conocimiento sobre *estrategias de enseñanza (KMT)*, pues pareciera que busca que los estudiantes, usando la estrategia de ensayo y error, identifiquen los factores $b = \alpha + \beta$ y $c = \alpha \cdot \beta$ del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ para encontrar la factorización $(x + \alpha)(x + \beta) = 0$. Luego que presenta el ejemplo en la pizarra, Jenny induce la búsqueda de dos números para realizar la factorización:

Profesora:	¿dos números que multiplicados den 18?
Es:	Nueve por dos.
P:	¿Habrá alguna otra forma?
Es:	Dieciocho por uno y Tres por seis [anota en la pizarra anota las respuestas en la pizarra, 9·2, 18·1 y 3·6]
P:	¿Cuál de esos, sumados o restados, me sirve para que me dé siete?

De las preguntas que plantea Jenny a los estudiantes podemos evidenciar que conoce cómo se realiza el procedimiento habitual para factorizar el trinomio **(KoT - procedimientos)** del ejemplo, dado que plantea preguntas para que los estudiantes determinen los factores. A partir de las tres combinaciones de pares de números, Jenny profundiza para que los estudiantes identifiquen cuál de los tres pares de factores permitiría realizar la combinación, y los estudiantes responden: *"el nueve y el dos permite obtener el 7 sumando o restando ambos números para encontrar los factores en el trinomio* $x^2 + 7x - 18$*"*. La selección de este ejemplo, y las reiteradas preguntas que realiza a los estudiantes para perfilar el par de números que permite la factorización, además del *juego con los signos*, nos daría indicios de conocimiento de Jenny sobre cómo los estudiantes realizan la factorización de trinomios *(KFLM – formas de interacción)*, considerando los factores $b = \alpha + \beta$ y $c = \alpha \cdot \beta$.

Como parte de la misma factorización, cuando Jenny y los estudiantes verifican que los factores 9 y 2 generan los coeficientes 7 y 18 del trinomio, enfatiza sobre las condiciones de los signos que se deben cumplir:

Profesora: Resulta que me tiene que dar menos dieciocho. [Repitiendo] para que me dé menos dieciocho, tiene que haber un signo positivo y uno negativo, entonces tengo que restar el nueve y el dos; a uno le tengo que poner positivo y al otro el negativo ¿Sí? Para que me cumpla y me dé más siete equis. ¿A cuál le voy a poner el más? [Anota 9 2] ¡Al nueve! Al nueve. [Confirmando] Y el menos ¿al? [Completando la expresión anterior + 9 - 2]

Del fragmento se evidencia que Jenny conoce cómo realizar el procedimiento para factorizar trinomios cuadrados **(KoT-procedimiento)** de la condición que $c = \alpha\beta$, y que estos mismos factores den $b = \alpha + \beta$, incluyendo la aplicación de las leyes de signos sobre los factores.

Ejemplo 3. Factorice la siguiente expresión $x^2 + 6x + 9$

Este tercer ejemplo planeado (tercera unidad de información), y dada la secuenciación de los ejemplos (binomio simple, trinomio binomio con término común y cuadrado perfecto), pareciese que Jenny selecciona los ejemplos de manera consciente para reforzar estos tres tipos de factorizaciones *(KMT - ejemplos)*. En el caso de este tercer ejemplo, Jeny intenciona la inducción de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto. La profesora abre el siguiente diálogo con los estudiantes:

Profesora: ¿Cuál sería la raíz de equis a la dos?
Estudiante: Equis
Profesora: Y ¿cuál es la raíz de nueve?
Estudiante: Tres.
Profesora: Entonces se coloca el equis y el tres ¿Con qué signo?
Estudiante: Positivo.
Profesora: Positivo ¡Muy bien! A la dos. [Completa el paréntesis con los datos anteriores, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$]

Del diálogo con los estudiantes, podemos evidenciar que, en la explicación del desarrollo de la factorización, la profesora moviliza conocimientos correspondientes a **procedimientos (KoT)**, pues conoce el algoritmo para factorizar el trinomio cuadrado perfecto, reconociendo el papel juega el término central [6x] en este tipo de trinomios. Además, se puede ver que Jenny plantea dos preguntas específicas para la factorización del trinomio cuadrado perfecto: *"¿Cuál sería la raíz de equis a la dos?"* (aludiendo el primer término cuadrado del trinomio) y *"¿cuál es la raíz de nueve?"* (aludiendo el tercer término cuadrado del trinomio), lo que podría ser un indicio de una *estrategia de enseñanza (KMT)* el planteamiento de preguntas reiteradas hacia los estudiantes para que ellos identifiquen, de manera más directa, este tipo de factorización en comparación con la del tipo del ejemplo dos.

A partir del diálogo entre la profesora y los estudiantes, y el resultado de la factorización $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, un estudiante pregunta a Jenny: *"¿por qué en la factorización no hace uso del número 6? (refiriéndose al término 6x que no aparece en la factorización de* $(x + 3)^2$*)"*. De esto, la profesora responde al estudiante:

Profesora: Lo que pasa es que cuando tú lo pasas de aquí hacia acá, te va a dar ese valor. ¿Primero al cuadrado? [Anota en la medida que resuelve $x^2 + 2 \cdot 3 + 9$] equis a la dos, más porque ese signo es, el doble del primero por el segundo, más el tres al cuadrado… nueve. Esto es como si tú multiplicas, equis más tres, por equis más tres… ¿Cierto? Porque es dos veces [Anota como ejemplo (x+3)(x+3)]. En el fondo tú, cuando multiplicas todo por todo. [Resuelve el ejemplo $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9$] equis por equis, equis a la dos. Equis por tres, tres equis. Tres por equis, tres equis. Más tres por tres, nueve. Entonces tú al final sumas esto [Señala la suma de 3x+3x], términos semejantes y eso me da… [Anota 6x] Y ahí te da ese término que te falta [apunta al 6x de la expresión $x^2 + 6x + 9$].

A partir de la respuesta de la profesora al estudiante, notamos que moviliza conocimientos sobre las características del resultado de la factorización **(KoT - procedimientos)**, conectando este ejemplo con el anterior **(KMT - ejemplos)**, mostrando dos maneras distintas de factorizar: la directa (en este ejemplo), es decir, el binomio de Newton, con el producto $(x + \alpha)(x + \alpha)$, que era la estrategia en el ejemplo anterior. El uso de estos ejemplos le permite a Jenny profundizar en la comprensión del estudiante, justificando por qué el factor 6x del trinomio no aparece explícitamente en la factorización $(x + 3)^2$.

El detalle de la explicación que hace la profesora al estudiante sobre la factorización nos da indicios sobre posibles *dificultades (KFLM)* de los estudiantes en el proceso de factorización del trinomio cuadrado perfecto, puntualmente en la invisibilización del término central del trinomio $x^2 + 6x + 9$ al quedar la factorización $(x + 3)^2$. A partir de estas posibles dificultades, preguntamos en la entrevista a Jenny:

Investigador: ¿Por qué utilizó los ejemplos de factorización de la manera en que los seleccionó?

Profesora: Estos ejemplos, para empezar con la factorización, los ordeno porque cuando voy a mitad de camino, y hay problemas ahí, […] prefiero asegurarme de que los estudiantes lo recuerden y les haga sentido después en las factorizaciones, así evito errores que son casi habituales, ejemplo de leyes de signos o potencias. Además, trato de ocupar los ejemplos más típicos, los errores, me anticipo a posibles errores, pues sé cuáles son. Por lo tanto, trato de usar algunos ejercicios, por ejemplo, el típico del 6, el del 3 por 2 en el trinomio $x^2 + 5x + 6$, o viceversa que les complica y se complican con el tema en sí, que algunos dijeron que era -6.

La respuesta de Jenny evidencia que conoce algunos de los errores habituales que cometen los estudiantes (**KFLM - dificultades)**. Así, el orden de la secuenciación de estos ejemplos **(KMT-ejemplos)**, en el inicio del tema de la ecuación cuadrática, permite [a la profesora] estructurar la enseñanza con el fin de evitar errores típicos en el aprendizaje de los estudiantes, ya sean procedimentales o conceptuales. Además de conocer una secuenciación en la selección y uso de ejemplos para el reforzamiento de la factorización, notamos evidencias de conocimiento sobre la potencialidad que tienen algunos ejemplos **(KMT - ejemplos)**, por sobre otros, para enseñar ciertos contenidos matemáticos. Además, el uso de estos ejemplos se debe a que conoce las **formas de interacción de los estudiantes con el contenido (KFLM)** cuando menciona que sabe que en la factorización algunos estudiantes antepondrían el signo negativo en el término central (-6).

En el epígrafe siguiente, presentamos la sistematización de los resultados del Conocimiento Especializado de Jenny a partir de la selección y uso de ejemplos en la enseñanza del tema de factorización de expresiones algebraicas.

Caracterización del conocimiento especializado de Jenny a partir de la selección y uso de ejemplos

A partir de los ejemplos seleccionados y utilizados por Jenny, organizamos su conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico (PCK) especializado, considerando indicadores específicos a partir de evidencias e indicios identificados. La Tabla 2 presenta una síntesis del MTSK de Jenny en el contexto de la enseñanza de las factorizaciones de expresiones algebraicas.

Tabla 2. Indicadores de MTSK de Jenny a partir de la selección y uso de ejemplos de factorización de expresiones algebraicas

Ejemplo seleccionado y usado	**Categorias de conocimiento**		**Indicadores - Jenny conoce**
Ejemplo 1. Factorice la siguiente expresión $4x^2 - 10xy$	MK	KoT (procedimientos)_1	Que para factorizar se debe extraer el factor común 2x por el binomio 2x – 5y.
		KoT (procedimientos)_2	El proceso inverso de la factorización multiplicando el monomio por el binomio.
		KoT (propiedades)_1	La propiedad del producto de potencias de igual base $x^2 = x \cdot x$.
		KSM (conexiones de simplificación)_1	*Que el tema de la factorización de expresiones algebraicas se conecta con el tema de las potencias por medio de sus propiedades*
	PCK	*KMT (estrategias de enseñanza)_1*	*Que el uso de la propiedad de producto de potencia de igual base refuerza la comprensión de la factorización de la expresión algebraica.*
		KFLM (dificultades)_1	Que los estudiantes cometen errores al aplicar las propiedades de potencias en

			la factorización de la expresión algebraica.
Ejemplo 2. Factorice la siguiente expresión $x^2 + 7x - 18$	MK	KoT (procedimientos)_1	La factorización de trinomios cuadrados que tiene término común.
	PCK	*KMT (estrategia de enseñanza)*	*Que el ensayo y error es una estrategia para factorizar trinomios como binomios con término común.*
		KFLM (formas de interacción)_1	*La forma en que los estudiantes interactúan con los signos de los coeficientes b y c del trinomio para obtener el producto de binomios.*
Ejemplo 3. Factorice la siguiente expresión $x^2 + 6x + 9$	MK	KoT (procedimientos)_1	El algoritmo para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.
		KoT (procedimientos)_2	Las características de la factorización, $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9$ donde $3x + 3x$ corresponde al término central del trinomio.
	PCK	*KMT (ejemplos)_1*	*Ejemplos específicos para intencionar la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.*
		KMT (estrategias de enseñanza)_1	*El papel que tienen las preguntas y contra preguntas para que los estudiantes identifiquen tipos de factorizaciones de acuerdo con el trinomio.*
		KFLM (dificultades)_1	*Que los estudiantes tienen dificultades para conceptualizar que el binomio cuadrado perfecto se invisibilice el término central 6x del trinomio.*
		KFLM (dificultades)_2	Que los errores de los estudiantes al factorizar se asocian con el uso de signos y de propiedades de potencias.
		KMT (ejemplos)_2	La secuenciación de ejemplos permite estructurar la clase para ir de expresiones algebraicas sin patrones a expresiones algebraicas que presentan patrones como los trinomios.
		KMT (ejemplos)_3	Que ciertos ejemplos cumplen un papel relevante en la relación objetivo de enseñanza, objetivo del ejemplo y el contenido matemático de enseñanza.
		KFLM (formas de interacción)_1	Que formas de proceder de los estudiantes en la factorización de trinomios.

Conclusiones

Este estudio exploró el conocimiento especializado de una profesora de matemáticas en relación con la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas. Dicho contenido está presente en diferentes niveles del currículo escolar y se relaciona con conceptos fundamentales del álgebra escolar como ecuaciones de primer grado, de segundo grado, funciones y polinomios (Zodik & Zaslavsky, 2007; Ying et al., 2020). A partir del análisis de tres ejemplos utilizados por la profesora durante el repaso de la lección de clase, se identificaron evidencias del conocimiento matemático y didáctico especializado que se articula al diseñar, adaptar y presentar ejemplos en clase, considerando el aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento de la profesora de los estudiantes.

Los ejemplos analizados permitieron activar conocimientos previos del estudiantado, representar propiedades algebraicas específicas, que se conectan con temas y propiedades previas, como las potencias y sus propiedades. Además, esta organización permite preparar el tránsito hacia tareas la selección y uso de ejemplo que se vinculan con la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas (contenido posterior). En este sentido, los hallazgos destacan el papel de los ejemplos como herramientas cognitivas y comunicativas que conectan procedimientos, representaciones y significados (Goldenberg & Mason, 2008; Figueiredo & Contreras, 2013; Marton et al., 2003).

Este estudio aporta una mirada relacionada entre ejemplos matemáticos, contenidos de factorización de expresiones algebraicas y conocimiento especializado, aspectos que, si bien se han abordado en diferentes trabajos, esto ha sido de forma aislada (Ball et al., 2008; Chick & Harris, 2007; Shulman, 1986). En este trabajo se ha considerado analizar la ejemplificación como una práctica profesional situada, que moviliza múltiples subdominios del conocimiento especializado del profesor en torno a contenidos específicos del álgebra escolar (Adler & Pournara, 2020; Carrillo et al., 2018), específicamente relacionados con el conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM), de la enseñanza (KMT) y de las dificultades del aprendizaje (KFLM).

Desde una perspectiva especializada y profesionalizante, tanto las evidencias como los indicios de conocimiento sugieren la necesidad de diseñar propuestas de enseñanza, sustentada en ejemplos claros y coherentes con el objetivo de lo que se pretende enseñar que fortalezcan la *intencionalidad* y *conciencia* del conocimiento del profesorado para analizar y justificar el uso de ejemplos en función de los objetivos de aprendizaje, el contenido a enseñar y las características del estudiantado. Esto resulta relevante, considerando que algunas dificultades del alumnado pueden estar relacionadas con una enseñanza centrada únicamente en definiciones y procedimientos, sin una mediación que ejemplifique los aspectos que se pretenden ejemplificar (Sánchez-Acevedo et al., 2024).

Finalmente, los resultados de esta investigación permiten avanzar en dos aspectos: (i) las posibles relaciones de conocimiento (Zakaryan et al., 2018) que emergen en la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas entre los subdominios manifestados, así como con otros subdominios de conocimiento, lo que permitiría afinar la caracterización de la enseñanza de las factorizaciones en el contexto del álgebra escolar; y (ii) avanzar en la identificación y caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y la ejemplificación de las expresiones algebraicas en particular, y del álgebra escolar, en general.

Referencias

Adler, J., & Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (pp. 329–353). Sense.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barreto, Y. (2009). Uso de material concreto en la enseñanza del álgebra. *Revista de Educación Matemática, 21*(2), 45–56.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985–2994). ERME.

Carrillo, J., Contreras, L. C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193–200). Comares.

Carrillo, J., Escudero, D., Flores, E., & Contreras, L. C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge: Theoretical framework and research synthesis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97571-8

Chick, H., & Harris, K. (2007). Teacher's pedagogical content knowledge for the mathematics classroom. En J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 139–148). MERGA.

Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En *Memorias de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35–42). Cinvestav.

Figueiredo, C. A., & Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (3), 7–25.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2012). Consideraciones acerca de la ejemplificación en la clase de matemáticas. *Revista EMA, 17*(1), 7–29.

Fitzmaurice, O., & Hayes, B. (2020). Prospective mathematics teachers' understanding of the factorisation of quadratic equations. *Irish Educational Studies, 39*(2), 173–189. https://doi.org/10.1080/03323315.2019.1657500

Flores, P., García, D., & Vega, L. (2017). Aplicación móvil para el aprendizaje del álgebra en secundaria. *Revista Iberoamericana de Tecnología Educativa, 13*(1), 25–32.

Girit, D., & Akyuz, D. (2017). Investigating pre-service mathematics teachers' pedagogical content knowledge on algebra. *European Journal of Science and Mathematics Education, 5*(2), 123–135.

Goldenberg, E. P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183–194. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9147-4

Herbst, P., & Kosko, K. (2012). *Mathematics knowledge for teaching high school geometry*. http://goo.gl/WCA5X8

Jiménez, C., Rodríguez, A., & López, J. (2011). Comprensión de expresiones algebraicas en estudiantes de secundaria. *Revista de Investigación Educativa, 29*(1), 117–134.

Karaağaç, M. K. (2005). The role of teacher knowledge in student learning. *Mathematics Education Review, 16*(1), 23–32.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2024). The importance of distinguishing aspects in students' learning: Algebraic expressions. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00496-5

Marton, F., & Morris, P. (2002). What matters? Discovering critical conditions of classroom learning. *Teaching and Teacher Education, 18*(3), 329–344.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2003). The space of learning. En F. Marton & A. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Mok, I. A. C. (2009). Teaching quadratic factorization: A case study in a Hong Kong secondary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(4), 507–520.

Noto, M. S., Rahmawati, R., & Lestari, H. P. (2020). Students' difficulties in algebra: A case in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series, 1657*, 012001. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012001

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. SAGE.

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., & Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 114–121). Universidad de Granada.

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., & Contreras, L. C. (2024). Conocimiento especializado del profesor y la enseñanza del álgebra escolar. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 34*(1), 89–110.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Yildiz, A., & Akyüz, D. (2019). Teachers' knowledge and practices for teaching algebra in secondary schools. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(3), 269–294. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9408-4

Ying, Z., Lin, T.-J., & Wang, H.-C. (2020). Students' algebra learning difficulties and strategies: Evidence from Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1253–1272. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10017-9

Zakaryan, D., Leikin, R., & Waisman, I. (2018). Characteristics of teachers' examples in the context of generalizing patterns. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(4), 731–752. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9789-2

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education, 9*(1), 143–155. https://doi.org/10.1080/14794800701453751