Modelação de fenómenos sociais: uma ponte entre a realidade e a aprendizagem de funções

Modelling social phenomena: a bridge between reality and the learning of functions

Alice Faro e Santos
Agrupamento de Escolas Manuel Teixeira Gomes
CIED, Universidade do Minho
Portugal
alicefarosantos@gmail.com

Floriano Viseu
Instituto de Educação da Universidade do Minho
Portugal
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo. Fortalecer, nos alunos, a compreensão conceptual e de procedimentos matemáticos, o pensamento crítico, a literacia matemática, e desenvolver aptidões para a interpretação da realidade social – e, com isso, criar possibilidades para que desconstruam as relações de poder e as desigualdades de recursos e de oportunidades – é o repto central da educação matemática para a justiça social. Com base neste princípio orientador, este estudo visa caraterizar as atividades de alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, no âmbito da aprendizagem de funções. Na concretização deste objetivo, adotou-se uma metodologia qualitativa e interpretativa, com um design de estudo de caso relativo a uma turma de 8º ano. Os dados foram recolhidos através da observação não participante e da gravação vídeo de aulas, da resolução dos alunos às tarefas propostas e de notas de campo. Os resultados mostram que os alunos percorreram as etapas do processo de modelação, com autonomia variável consoante as dificuldades, envolvendo-se em atividades como a leitura crítica de dados e discussões reflexivas. A resolução das tarefas e a sua discussão promoveu a mobilização do conhecimento reflexivo e de experiências socioculturais, favorecendo o desenvolvimento da consciência sociopolítica.
Palavras-chave: alunos de 8º ano; aprendizagem da matemática; funções; justiça social; modelação matemática.

Abstract. Strengthening students' conceptual understanding and mathematical procedures, critical thinking, mathematical literacy, and developing skills to interpret social reality—and thereby creating possibilities for students to deconstruct power relations and inequalities in resources and

Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 34(1) 6-31
https://doi.org/10.48489/quadrante.41279
Recebido: abril 2025 / Aceite: julho 2025

opportunities—is the central challenge of mathematics education for social justice. Based on this guiding principle, this study aims to characterize students' activities while solving modelling tasks focused on social justice, in the learning of functions. To achieve this aim, a qualitative and interpretative methodology was adopted, with a case study design, relating to an 8th grade class. The data were collected through non-participant observation, video recording, students' written resolutions of the tasks and field notes. The results show that students went through the stages of the modelling process with varying degrees of autonomy depending on their difficulties, engaging in activities such as critical reading of data and reflective discussions. Solving the tasks and discussing them promoted the use of reflective knowledge and socio-cultural experiences, fostering the development of socio-political awareness.
Keywords: 8th grade students; functions; mathematics learning; mathematical modelling; social justice.

Introdução

Este estudo aproxima-se das solicitações de investigadores internacionais que reconhecem a importância de explorar as relações entre a Matemática e o mundo real que ocorrem em ambientes educativos (Greefrath & Carreira, 2024) e, simultaneamente, de reforçar a utilidade da matemática para a compreensão, pelos alunos, das suas próprias experiências pessoais e dos fenómenos sociais, transcendendo a disciplina para um ensino descolonizador (Powell, 2022). O cruzamento da modelação matemática com o conceito de justiça social surge vinculado aos assuntos do quotidiano passíveis de serem modelados e que possibilitem, aos alunos, analisarem problemas para que se tornem participantes ativos da sociedade (Vithal et al., 2024). Numa perspetiva sociocrítica, através desta ligação, os alunos podem refletir criticamente sobre os problemas da sociedade, com vista a desenvolverem um discurso reflexivo, criando significados necessários para a transformação estrutural da própria sociedade (Rosa & Orey, 2015).

Deste modo, no 3º ciclo do ensino básico, o estudo de funções oferece um dos cenários para a concretização da conjugação entre modelação matemática e justiça social. A opção pela modelação matemática na aprendizagem de funções é ancorada no currículo e sustentada nas potencialidades que a mesma tem para os alunos, como seja, entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real e perspetivar o estudo da Álgebra como oportunidade para modelar matematicamente uma vasta gama de fenómenos (NCTM, 2007). Tais potencialidades são corroboradas pelas diretrizes das Aprendizagens Essenciais da Matemática (AEM) (MEC, 2021), que colocam a modelação matemática, no 3º Ciclo do Ensino Básico (CEB) associada às conexões matemáticas. Pensa-se, deste modo, que a interseção obtida entre modelação matemática, justiça social e funções poderá responder à pertinência da modelação e da leitura crítica de dados (Carreira & Blum, 2021; Rubel et al., 2021), à importância de tomar decisões fundamentadas através de modelos matemáticos (Siller et al., 2024; Skovsmose, 2021), bem como de modelar situações da realidade através de funções (Greefrath & Carreira, 2024; MEC, 2021; NCTM, 2007). Pelo exposto, estabelece-se como objetivo deste estudo caracterizar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação com foco na justiça social, na aprendizagem de funções no 8º ano.

Quadro teórico

A modelação matemática em contexto educativo

O conceito de modelo matemático tem estado presente em muitas áreas de conhecimento onde a Matemática é preponderante, principalmente na resolução de problemas. O seu significado assume-se como uma descrição ou representação de uma situação do mundo real, por meio de representações cuja combinação ocorre por meio do processo de modelação (Blum & Niss, 2024; D'Ambrosio, 2009).

Blum e Borromeo Ferri (2009) especificam que o uso da modelação e de modelos matemáticos possibilita o desenvolvimento de competências críticas e a compreensão, pelos alunos, dos seus próprios contextos e aspetos sociais, para além de contribuir para a formação de cidadãos responsáveis e interventivos numa sociedade que requer, cada vez mais, competências em modelação.

Uma vez reconhecido, pela comunidade científica, o papel da modelação no campo educacional (Carreira & Blum, 2021; Galbraith, 2024), diversos estudos dirigem-se para os processos cognitivos que lhe são inerentes. Neste sentido, Viseu e Menezes (2014) apresentam a modelação em sala de aula como uma atividade que consiste em interpretar os elementos e as relações de uma dada situação, solucionar a situação com base na Matemática, proceder à análise dos resultados, compará-los com o fenómeno em estudo e, por fim, obter conclusões. Vista como um processo, a modelação matemática implica uma série de ações que fazem com que a construção ou interpretação de um modelo não se efetue de forma instantânea na sala de aula, o que na literatura ficou conhecido como ciclo de modelação (Villa-Ochoa, 2015).

De acordo com Kaiser e Schwartz (2006), o ponto de partida do processo de modelação é uma situação do mundo real. Com o ciclo de modelação construído por Blum e Leiβ (2007), representado na Figura 1, os autores apresentam um diagrama cíclico dividido em sete passos. Parte-se da situação real e através da compreensão da tarefa chega-se à situação a modelar até se obter o modelo real por meio da simplificação e estruturação do domínio extra-matemático. O terceiro passo diz respeito à matematização com a qual se obtém o modelo matemático. Trabalhando matematicamente atingem-se resultados matemáticos que são, posteriormente, interpretados em termos de resultados reais. Ao validar esses resultados, poder-se-á verificar se será ou não necessária uma segunda volta ao ciclo que tenha em conta outros fatores.

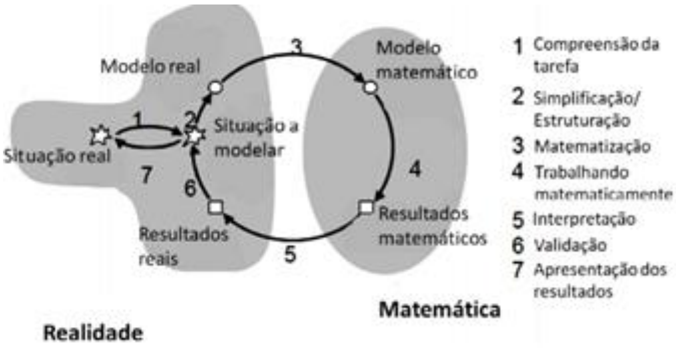


Figura 1. Modelo proposto por Blum e Leiβ (2007, p.225)

Ainda com o propósito de clarificar o processo de modelação, elencam-se as seis fases estabelecidas por Verschaffel et al. (2002), com o intuito de sequenciar as atividades inerentes ao processo. A primeira fase é compatível com a compreensão da situação; segue a fase da construção de um modelo matemático que traduza a situação para um formato matemático; a terceira fase requer o trabalho com o modelo, obtendo-se alguns resultados; a quarta fase, incide na interpretação dos resultados que implica chegar a uma solução de acordo com o contexto original; na quinta fase avalia-se o modelo, para que, na última fase se comunique a solução do problema inicial.

Tendo em consideração os pressupostos descritos por diferentes autores, neste estudo condensou-se o processo de modelação em três etapas: (1) compreensão, simplificação e estruturação da situação; (2) matematização e trabalho com o modelo; e (3) interpretação dos resultados e validação do modelo matemático. Neste sentido, a competência de modelação pode ser caracterizada como a capacidade para construir modelos, realizando adequadamente as várias etapas do ciclo de modelação, assim como a capacidade de analisar ou comparar determinados modelos (Blum & Leiβ, 2007; Kaiser & Brand, 2015).

Estimular os alunos para uma cidadania responsável exige que os mesmos desenvolvam competências de modelação (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Geiger et al., 2022). De forma genérica, Blomhøj e Jensen (2003) apresentam a competência de modelação matemática como a habilidade autónoma para percorrer todos os aspetos do processo de modelação num determinado contexto. Na visão de Greer e Verschaffel (2007), podem-se considerar três níveis de modelação matemática: a modelação implícita; a modelação explícita; e a modelação crítica. As competências implícitas são referentes a atividades de modelação nas quais os alunos se envolvem sem estarem verdadeiramente conscientes de que as mesmas são essenciais para a modelação. Por sua vez, às competências explícitas está inerente uma atenção explícita ao processo de modelação. Já no caso das competências críticas, as mesmas traduzem a reflexão crítica sobre os papéis e consequências da modelação, tanto na Matemática como num contexto interdisciplinar ou na sociedade.

Quando a modelação é assumida como uma estratégia pedagógica ou uma alternativa metodológica que traz para a sala de aula os problemas da vida real e da cultura dos alunos (Brandt et al., 2016), há que ter em conta que se estabelece uma dinâmica que tem várias matizes, que passam pelo aluno, pelo professor, pelo contexto, pelo ambiente de aprendizagem, pela atividade, pelos tipos de tarefas e sua autenticidade, pelos tipos de representação, pela construção do conhecimento, numa enumeração difícil de finalizar. Deste modo, um dos pontos a destacar tem a ver com a criação de uma cultura em sala de aula que sustente as atividades de modelação. O conhecimento do professor torna-se, com frequência, um dos principais desafios encontrados quando se analisam estudos realizados neste sentido (Asempapa, 2018; Blum & Borromeo Ferri, 2009). Isto porque, para modelar fenómenos do mundo exterior, é necessário entender esses fenómenos e, portanto, o conhecimento do mundo real é imprescindível. Esta ideia leva, por consequência, à necessidade de um ensino mais aberto e, desde logo, menos previsível.

No que diz respeito aos benefícios para os alunos, enfatiza-se que, ao usarem modelos para interpretar e explicar sistemas complexos, ao desenvolverem fluência representacional e ao raciocinarem matematicamente de diversas formas, os alunos estão a aprimorar o pensamento crítico, na medida em que precisam de pensar no problema criticamente antes de o enfrentar (Lesh & Hager, 2001). É de realçar que as atividades de modelação oferecem oportunidades para que os alunos expressem as suas ideias e pensem em múltiplas representações acerca de uma mesma situação (English & Watters, 2005). Asempapa (2015) refere o discurso de sala de aula como sendo mais um benefício das atividades de modelação. As experiências de modelação são ideais para promover comunicação, levando à exploração colaborativa e ao trabalho em equipa através de experiências sociais. Seguindo uma perspetiva Vygotskiana, Alrø e Skovsmose (2021) acreditam que a "qualidade da comunicação em sala de aula influencia a qualidade da aprendizagem da matemática" (p. 11). Mais perentoriamente, os autores destacam que um diálogo é motivado por expectativas de mudança e, portanto, o compromisso é fundamental e a cooperação é "um parâmetro central da comunicação dialógica" (Alrø & Skovsmose, 2021, p. 14).

Educação matemática para a justiça social

É pressuposto do presente estudo que uma educação matemática que valorize a justiça social proporciona aos alunos um meio para desenvolverem aptidões para a interpretação da realidade social, atenuando, simultaneamente, a perpetuação da disciplina de Matemática como um fator determinante de insucesso e exclusão escolar. Com este desiderato, surge um imperativo ético associado à educação matemática que diz respeito ao papel da disciplina de Matemática na reprodução de desigualdades (Gutiérrez, 2018). A aceitação de um *status quo* baseado num ensino da Matemática que seleciona e estratifica, que separa aqueles que têm acesso à Matemática daqueles que não o têm, vinca as diferenças entre a cultura dominante e a dominada (Young, 2022). A disciplina de Matemática desempenha, assim, um papel determinante na separação entre os aptos e os inaptos da sociedade, decidindo quem evolui e quem fica para trás, como uma guardiã da porta (Skovsmose & Valero, 2002). De modo a desassociar a Matemática das estruturas de poder, surgiram alguns movimentos que refletem sobre as dimensões cultural, crítica e política da educação matemática e que possuem a literacia matemática como denominador comum (D'Ambrosio, 2009; Frankenstein, 2012; Gutstein, 2018; Skovsmose, 2023). A Matemática é, portanto, especificamente usada como uma ferramenta analítica para examinar e desafiar as injustiças sociais (Gutstein, 2018). Assim, importa sublinhar o carácter polissémico da noção de justiça para se chegar à sua pluridimensionalidade – redistribuição (Rawls, 2013); reconhecimento (Young, 2022); e representação (Fraser, 2022) – no desenvolvimento de processos de ensino justos (Belavi & Murillo, 2020).

A justiça como redistribuição ou equidade (Rawls, 2013) centra-se na distribuição justa de bens primários, como direitos, liberdades, oportunidades e assenta em dois princípios fundamentais: o princípio da igual liberdade para todos e o princípio da diferença. A justiça como reconhecimento (Young, 2022) sustenta que a distribuição não se pode restringir à riqueza ou bens materiais que se possuem e se repartem, esquecendo aspetos de identidade ou cultura, destacando-se o reconhecimento da diversidade social e cultural e o combate às opressões estruturais. A teoria de justiça de Fraser (2022) é integradora das anteriores, mas acrescenta a dimensão da paridade participativa para representar o princípio normativo que permita a participação em pé de igualdade de todas as pessoas de uma sociedade, nos espaços públicos de debate.

Pelo exposto, pensa-se que este eixo analítico tridimensional contribuiu para dar cumprimento à narrativa constitucional relativa à Educação, que consiste em possibilitar a igualdade de oportunidades no acesso e êxito escolares. Uma das respostas para a sua concretização pode ser dada através do currículo. Com a garantia da participação, da disponibilização das mesmas oportunidades de aprendizagem e do envolvimento de todos os alunos, com um currículo comum, encontra-se assegurada a igualdade de oportunidade no acesso e no ensino. A ser verdadeira esta proposição, a pergunta que se coloca reside na exequibilidade do envolvimento de todos os alunos. Até porque se considera que existe uma ligação entre proporcionar o envolvimento de todos os alunos, como um bem básico, e o valor da autoestima da teoria de justiça de Rawls (2013). Para este autor, o valor da autoestima é um bem básico, cabendo às funções de um Estado que pretende ser justo o dever de criar condições para que todos os cidadãos se possam respeitar a si próprios (Rawls, 2013). A par desta ideia está, também, a viabilidade na igualdade equitativa de oportunidades quanto ao sucesso, ou seja, ao conhecimento. Neste ponto, os resultados dos alunos em Matemática incluem não somente a persistência no trabalho escolar como também a atitude que possuem face à Matemática e a capacidade para utilizarem a Matemática em contextos reais (Gutiérrez, 2012), sendo o mais importante assegurar que, independentemente dos contextos de origem, todos os alunos tenham as mesmas possibilidades de obterem resultados significativos (Gutiérrez, 2018).

Práticas emergentes da modelação matemática e da educação matemática para a justiça social

No domínio da modelação matemática, as abordagens e perspetivas multiplicam-se, nomeadamente no contexto educativo. Neste âmbito, salienta-se a perspetiva sociocrítica que se estabelece como um cenário de investigação que alicie os alunos a participar ativamente nos seus processos de aprendizagem (Skovsmose, 2007). De forma resumida, com esta abordagem, a sala de aula é configurada para ser um lugar democrático, um espaço de interação, de onde emerge a ação dialógica, fruto das discussões reflexivas originadas pelos alunos, o pensamento crítico e a autonomia (Araújo, 2009; Barbosa, 2006).

Sublinha-se, portanto, a existência de uma conexão entre a educação matemática para a justiça social e a modelação matemática sociocrítica, na medida em que ambas as perspetivas assentam numa abordagem comum. Uma abordagem que defende que o ensino da Matemática deve fornecer experiências relevantes, significativas e que envolvam os alunos na Matemática, enquanto possibilitam maiores oportunidades para os alunos mais desfavorecidos a poderem realizar (Wright, 2016). Esta visão apresenta-se como uma alternativa a um ensino da Matemática que contribua para a reprodução das desigualdades e perpetuação dos privilégios na sociedade.

A relevância da modelação matemática na atualidade continua a ser indiscutível. Certos acontecimentos e fenómenos assim o têm mostrado, como a pandemia de COVID-19ou o intenso debate gerado em torno do acordo de Paris sobre o clima. Trata-se de acontecimentos que mostram a necessidade de tomar decisões informadas e fundamentadas em factos, que, por sua vez, se baseiam em modelos matemáticos (Siller et al., 2024; Skovsmose, 2021). Por estes mesmos motivos, a par da modelação é também requerida uma leitura crítica dos dados (Rubel et al., 2021), fundamentada na crescente prevalência das representações de dados nos meios de comunicação de massas. Esta proliferação de rápido consumo levanta questões de fiabilidade e ética que exigem uma atitude crítica perante os mesmos. Assim, não apenas a compreensão da modelação matemática e dos modelos matemáticos deve ser promovida em todo o ensino como também é necessária uma leitura crítica dos dados, baseada numa educação matemática crítica (Rubel et al., 2021). Um exemplo destas propostas, em sala de aula, é o uso da modelação para pensar sobre diferentes formas de intervir para reduzir as emissões de CO_2, assumindo como possibilidades discutir as taxas de impostos sobre os alimentos que impliquem uma maior emissão de CO_2 dependendo do transporte ou do seu cultivo (Gildehaus & Liebendörfer, 2021).

Do mesmo modo, um vasto conjunto de investigadores internacionais tem mostrado como é possível conjugar assuntos de justiça social, no seio do currículo de Matemática, nomeadamente na área da Álgebra, seja conectando a Matemática à realidade dos alunos, seja ligando-a à sua cultura e comunidade (Gutstein & Peterson, 2013). O projeto "Equações radicais: literacia matemática e direitos civis", que dura há duas décadas, é um projeto de Álgebra, destinado a alunos do 3º Ciclo, cuja finalidade é auxiliar estudantes afroamericanos a atingir um nível mais elevado de competências matemáticas (Moses & Cobb, 2001). Outro exemplo, mostra a possibilidade de trabalhar o estudo de funções com alunos de 8º ano, analisando as variáveis, recorrendo às representações gráficas e algébricas para calcular o salário diário e mensal de alguns trabalhos do setor de serviços, descobrir os custos associados à procura de habitação ou comparar salários mínimos de profissionais (Dean, 2013).

Por último, delineia-se uma interseção entre o eixo tridimensional da justiça e a modelação matemática sociocrítica a partir de dois aspetos fundamentais. O primeiro diz respeito à incorporação das experiências dos alunos como forma de enfatizar a relevância cultural da Matemática (Wright, 2016), o que constitui um dos objetivos de uma educação crítica. Nesse mesmo sentido, permitir que as vozes dos alunos sejam ouvidas e que as suas histórias sejam contadas, configura, em si, uma forma de justiça (Simic-Muller, 2019). O segundo aspeto é evidenciado pela própria modelação matemática sociocrítica, que propõe o desenvolvimento do pensamento crítico através da utilização da Matemática em situações reais. Este processo valoriza as discussões reflexivas em espaços interativos, nos quais professores e alunos dialogam sobre uma atividade de modelação (Barbosa, 2006). Com ambos, é sublinhada, fundamentalmente, a justiça como reconhecimento e a justiça como participação.

Metodologia

Para responder aos propósitos do estudo adotou-se uma metodologia de índole qualitativa (Denzin & Lincoln, 2018), inserida num paradigma interpretativo (Amado, 2017; Erickson, 1986), na procura de compreender os significados das atividades realizadas pelos alunos na resolução de tarefas de modelação, pautadas por assuntos de justiça social, na aprendizagem de funções. Foi seguido um design de estudo de caso, composto pelos alunos de uma turma de 8º ano. Ao acompanhar as orientações descritas por Cohen et al. (2018), McMillan e Schumacher (2014) e Yin (2017), a pesquisa empírica incide sobre uma entidade bem definida, decorrendo o caso ao longo de dois períodos letivos, tempo que permitiu uma extensão que privilegia o conhecimento dos intervenientes e possibilita uma análise mais detalhada. O contexto natural em que ocorreu foi, essencialmente, a sala de aula de Matemática, na medida em que foi, nesse meio, onde foram implementadas as tarefas de modelação. Bogdan e Biklen (2013) apontam que, na fase inicial da investigação, os investigadores procuram locais ou pessoas que possam ser objeto de estudo ou fontes de dados. Deste modo, procedeu-se ao esclarecimento a vários professores da intenção de criar um cenário de aprendizagem de funções assente em tarefas de modelação cujos contextos se baseassem em fenómenos sociais. Após esta primeira abordagem e com a disponibilidade demonstrada por parte de uma professora, partiu-se para o processo de seleção da turma. Decidiu-se escolher a turma em que a professora era a diretora de turma por haver mais um tempo semanal disponível para a realização de aulas e ainda, pelo acesso privilegiado aos encarregados de educação para a concretização dos trâmites de salvaguarda ética.

Caracterização dos participantes

A turma de 8º ano, constituída por vinte e dois alunos, pertence a um contexto escolar, localizado no barlavento algarvio, que se caracteriza por um contexto local onde não figuram clivagens acentuadas, e por uma missão escolar de promoção da qualidade e sucesso individual educativo. Quanto ao modo como encaram a escola, este grupo de alunos mostra-se desanimado, encontrando no ambiente escolar um hábito e um meio para o convívio social. Da obrigatoriedade da frequência escolar esperam colher os frutos para um futuro próspero. Mais de um terço dos alunos assume ter dificuldades a Matemática, que remontam a anos anteriores e que, por esse motivo, sentem ser muito difíceis de ultrapassar. Na aprendizagem da Matemática este grupo de alunos escolhe a resolução de exercícios como o tipo de tarefa privilegiado. Os alunos tendem a associar a importância que atribuem à aprendizagem da Matemática com a utilidade que a mesma poderá ter no futuro, estabelecendo nesta premissa uma condição quase axiomática. Provavelmente, por essa razão, é difícil indicarem exemplos da utilidade da Matemática na vida real que não se relacionem com as compras. No que diz respeito aos conteúdos de funções que recordam, a maioria diz não se lembrar de nenhum e referem a expressão algébrica como a grande vulnerabilidade sentida. Na voz do grupo turma uniformiza-se a noção de justiça social com a de igualdade na distribuição de recursos, sejam eles de saúde, educação ou de carácter identitário. Apesar deste reconhecimento, a generalidade dos alunos não vê conexão entre a disciplina de Matemática e o debate sobre estes assuntos, muito menos no caso específico do estudo de funções.

A professora da turma de 8º ano coloca como principal objetivo o cumprimento integral do programa, bem como orienta as tarefas escolares seguindo o manual adotado e apoiando-se em plataformas educativas, otimizando, desta forma, a gestão do tempo. O ensino de funções é visto pela docente como um desafio dentro do domínio do ensino de Álgebra, admitindo a modelação como ausente das suas práticas.

As tarefas de modelação

As tarefas de modelação são sustentadas num quadro conceptual que combina modelação matemática, a educação matemática para a justiça social e teoria normativa de justiça. Para a elaboração das tarefas confluem alguns dos documentos que compõem o atual currículo nacional, nomeadamente, o Perfil dos Alunos Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) e as Aprendizagens Essenciais de Matemática (AEM) (MEC, 2021) do 3º Ciclo do Ensino Básico. Na Tabela 1 encontram-se descritas as tarefas de modelação de acordo com o número de aulas dedicadas, as respetivas AEM e a dimensão mais representativa de justiça social em cada uma.

Tabela 1. Quadro representativo das tarefas de Modelação

Tarefas de modelação	N.º de aulas	Vertente de justiça social	Tema e Tópicos de acordo com AEM
T1: Distribuição de água no planeta	4	Justiça redistributiva	
T2: Distribuição real de água em diferentes países	3	Justiça redistributiva	
T3: Água e desigualdade de género	5	Justiça como reconhecimento	*Álgebra (8.º Ano)* Funções afins Modelação Sistemas do 1.º grau a duas incógnitas
T4: Previsão da escassez hídrica	5	Justiça como reconhecimento	
T5: Por que motivo os preços importam?	5	Justiça redistributiva, reconhecimento	
T6: Comparação da pegada hídrica entre países	4	Justiça como participação	

A construção das tarefas contou com a colaboração da professora para a definição de um tema social que lhes fosse transversal, 'Defender a Água', conferindo-lhes um carácter de projeto e guiadas por aquilo que o quadro teórico chama de autenticidade do contexto das tarefas, dada pela sua dimensão pragmática e crítica (Villa-Ochoa et al., 2017).

Métodos de recolha e análise de dados

Para a concretização do objetivo deste estudo - caraterizar as atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação, com foco na justiça social, no tópico de funções – os dados foram recolhidos através dos seguintes métodos: entrevista; observação não participante de aulas; gravação vídeo de aulas; resoluções dos alunos às tarefas propostas; e notas de campo. A observação das aulas teve lugar na turma que compõe o estudo de caso e acompanhou o trabalho desenvolvido pelos alunos e respetiva professora de Matemática. As aulas observadas decorreram durante o 2º período e em algumas aulas do 3º período, perfazendo 32 aulas de 50 minutos. Nestas aulas, a professora reviu conceitos, anteriormente lecionados, como foi o caso da proporcionalidade direta, e conteúdos específicos de funções relativos ao 7º ano, introduziu novos conteúdos sobre funções, nomeadamente da função afim, e concluiu com o ensino de sistemas de equações de 1º grau a duas incógnitas. Na sistematização do estudo destes tópicos, a professora sustentou a sua prática com tarefas de modelação. A gravação vídeo de aulas observadas permitiu aceder a fragmentos que traduzem as interações realizadas na sala de aula. As resoluções dos alunos traduzem as suas produções escritas relativas às tarefas que lhes foram propostas. As notas de campo refletem situações registadas, pela investigadora, em diferentes momentos vivenciados no estudo.

Os dados recolhidos foram sujeitos a uma análise de conteúdo (Bardin, 2016). A fragmentação da informação obtida nessa análise (Bardin, 2016; Miles et al.,2020) deu origem, após o seu refinamento, a duas categorias que refletem a análise das atividades dos alunos na resolução de tarefas de modelação e representam a forma como está organizado o caso: 'Processos estabelecidos nas etapas de modelação'; e 'Conhecimento reflexivo'. A primeira categoria é estruturada em torno de três etapas: (1) compreensão, simplificação e estruturação da tarefa; (2) matematização e trabalho com o modelo matemático; e (3) interpretação dos resultados e validação do modelo matemático. No que diz respeito à segunda categoria, 'Conhecimento reflexivo', a informação está organizada segundo a importância que os alunos atribuem à aplicação da Matemática para a resolução das tarefas (Gutstein, 2018; Rubel et al., 2021; Skovsmose, 2023) e o debate crítico que é gerado (Barbosa, 2006; Simic-Muller, 2019).

Para a organização da informação que estrutura a narrativa, elaborou-se a seguinte codificação: (i) gravação de observação de aula (GOAx), gravação de observação de aula, relativa ao Grupo x (GOAx_Gx), gravação de observação de aula, relativa ao Aluno/a Grupo x (GOAx_Aluno,Gx), em que x traduz o número da aula observada; (ii) resolução, nome do aluno, Grupo x (RE_Aluno,Gx); e (iii) nota de campo, observação de aula, data (NCOA_data). Para garantir os princípios éticos, obteve-se a autorização dos Encarregados de Educação dos alunos e da Diretora do Agrupamento de Escolas, e cumpriram-se os princípios éticos da AERA (2011) para a investigação educacional, assegurando o anonimato dos participantes.

Resultados

Para dar conta dos resultados obtidos, segue-se um olhar sobre as dinâmicas específicas criadas na exploração das tarefas, segundo um itinerário submetido às etapas do processo de modelação, bem como se abordam as apreciações feitas pelos alunos segundo duas vertentes: a importância que os mesmos atribuem à aplicação da Matemática para a resolução da tarefa e o debate crítico gerado. As tarefas foram resolvidas em grupos de trabalho, havendo quatro grupos de quatro alunos e dois grupos de três alunos. Das tarefas propostas, seleciona-se a tarefa 'Previsão da escassez hídrica' para evidenciar as atividades ligadas ao processo de modelação. Relativamente à análise da mobilização do conhecimento reflexivo, consideram-se as tarefas 'Previsão da escassez hídrica'; e 'Por que motivo os preços importam?'.

Processos estabelecidos nas etapas de modelação

Para analisar as práticas ligadas ao processo de modelação, analisa-se a exploração da tarefa 'Previsão da escassez hídrica'.

Tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica'

Na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' (Figura 2), a situação do mundo real é baseada no número de pessoas que, todos os anos, se encontram sujeitas a escassez hídrica. Sendo que esse número tem tendência crescente e linear, espera-se que os alunos determinem a estrutura matemática que melhor represente a situação, usando, posteriormente, o modelo para estabelecer uma previsão da evolução da escassez hídrica ao longo do tempo. A tarefa foi resolvida em grupos de trabalho, ao longo de cinco aulas.

TAREFA 4 – PREVISÃO DA ESCASSEZ HÍDRICA

"No ano do relatório, 2017, existiam 600 milhões de pessoas vitimas de escassez hídrica. Presentemente, 2018, cerca de 800 milhões de pessoas oriundas de 43 países vivem abaixo do limiar mínimo que define a situação de falta de água.
O ritmo a que o declínio hídrico é registado está bem patente nas atuais previsões de evolução futura. Por volta do ano 2030, mais de 3 mil milhões de pessoas poderão viver em países sujeitos a pressão sobre os recursos hídricos."

Relatório de Desenvolvimento Humano, 2017

(a) Admitindo, que o número de pessoas que não têm acesso a água potável aumenta todos os anos em igual número, **prevê** qual será o número total de pessoas que estarão sujeitas a recursos de água muito limitados, no ano 2050.
(b) De acordo com os resultados obtidos, quais as razões que apontas para tal previsão?
(c) Consideras que esta crise de escassez hídrica será transversal a todo o mundo ou haverá países que sejam mais afetados? Porquê? Que soluções apresentarias para que esta realidade mudasse?

Figura 2. Excerto da tarefa "Previsão da Escassez Hídrica"

(1) Compreensão, simplificação e estruturação da tarefa

Num primeiro momento, os alunos leram o texto que contextualizava a situação. Alguns alunos revelaram dificuldade em iniciar a interpretação da tarefa, o que os levou a colocar algumas questões à professora:

Tomás:	Professora, aqui diz que temos de prever o número de pessoas que estarão limitadas a recursos de água, em 2050, mas não percebo o que temos de fazer para chegar até aí. E são muitos milhões.
Professora:	Primeiro têm de ver que dados têm no enunciado e que são importantes.
Tomás:	Acho que estes números 600 milhões e 800 milhões são os importantes, não é?
Professora:	Façam um esquema se quiserem e registem na vossa folha.
Ângela:	Oh professora, mas depois também tem aqui 2030 e nós queremos em 2050, não em 2030, são muitas datas, não estou a perceber.
Professora:	Pois sim, tem muitas datas, se calhar têm de ver se existe aí um padrão.
Ana:	Acho que já estou a ver o que a professora quer dizer. (GOA15)

Deste diálogo, infere-se que alguns alunos tiveram alguma dificuldade em analisar a situação para conseguirem interpretar o enunciado do problema de contexto real, bem como se intui que a complexidade da informação revelada no texto não facilitou essa compreensão, como parece ser o caso do seguinte aluno: "Vocês, sabem o que é declínio hídrico? E limiar mínimo"? (GOA15_Vítor, G2). A par destas dificuldades, a barreira maior surgiu na seleção da informação e no reconhecimento das quantidades que seriam importantes para conseguirem chegar ao modelo. Por sua vez, das resoluções escritas, verifica-se que alguns alunos sublinharam a informação que consideraram relevante para a compreensão do problema, como o fez Daniela (G5) (Figura 3).

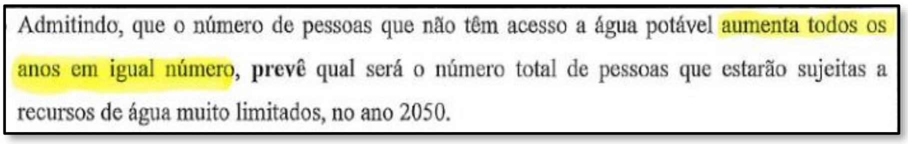

Admitindo, que o número de pessoas que não têm acesso a água potável aumenta todos os anos em igual número, **prevê** qual será o número total de pessoas que estarão sujeitas a recursos de água muito limitados, no ano 2050.

Figura 3. Forma de destaque de informação relevante de Daniela (G5)

Outros alunos registaram dados que os auxiliaram a estruturar a tarefa, como expressam as resoluções de Andreia (G4) e Rodrigo (G1) (Figura 4).

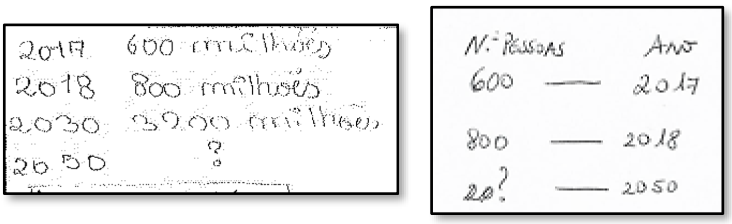


Figura 4. Estruturação da informação por Andreia (G4) e por Rodrigo (G1)

São poucos os resultados que evidenciam que os alunos estabelecem relações entre as quantidades. Ainda assim, no caso de Ana (G1), confirma-se, através da sua resposta, que conseguiu estruturar, simplificar e interpretar o contexto (Figura 5), apoiando-se, primeiramente, dos dados quantitativos para inferir uma hipótese que permitisse sustentar a passagem à estrutura matemática.

a) 800 - 600 = 200 Milhões -> Aumento por ano
2050 - 2018 = 32 anos

Figura 5. Representação matemática da situação real de Ana (G1)

Contudo, afere-se, pelas respostas dadas pelos diferentes grupos de alunos, que foi apenas um número reduzido de alunos ($n = 7$) que, através da informação disponível, identificou as variáveis (Figura 6).

nº de pessoas em milhões que são vitimas da escasez hidrica (y).

Figura 6. Identificação de uma das variáveis na resposta de Guilherme (G2)

Em suma, na passagem da compreensão da situação real para a sua representação, os alunos mostraram serem capazes de interpretar a situação real. No entanto, na simplificação da tarefa encontraram-se alguns entraves, talvez por não terem por hábito trabalhar com quantidades elevadas.

(2) Matematização e trabalho com o modelo matemático

Na alínea a) é ainda pretendido que os alunos desenvolvam o modelo com o qual irão trabalhar. Na passagem da representação para o modelo, os alunos simplificaram o problema, verificando a existência de duas variáveis que se relacionam, o número de pessoas que existem no mundo sujeitas a falta de água e o tempo em que tal situação ocorre, em anos. Porém, constata-se que os alunos refletem pouco na hora de estabelecerem relações entre as variáveis, como se deduz da seguinte discussão em grupo:

Tomás: Quais são os anos que temos de escolher para chegar ao modelo? Vocês sabem?
Vítor: Eu acho que temos de começar com o ano de 2017 e os 600 milhões de pessoas.
Tomás: Sim, e depois, que fazemos com isso?
Guilherme: Depois acho que temos de contar os anos que passam até 2050.
Vítor: Mas isso é só contar os anos, eu não sei é o que se faz depois…
Guilherme: Então se a diferença são 33 anos, depois é só multiplicar por 600.
Vítor: Humm, não sei se é assim. Isso dá 19 800. (GOA16_G2)

Deste diálogo, infere-se que os alunos tiveram dificuldades em averiguar qual seria o modelo que melhor se ajustaria à situação. Observando estes obstáculos, a professora questionou o grupo turma:

Professora: Será que o modelo pode seguir uma função linear?
Alunos: Sim!
Professora: Então, qual vai ser a constante de proporcionalidade?
Alunos: Vai ser de 200 milhões. (GOA16)

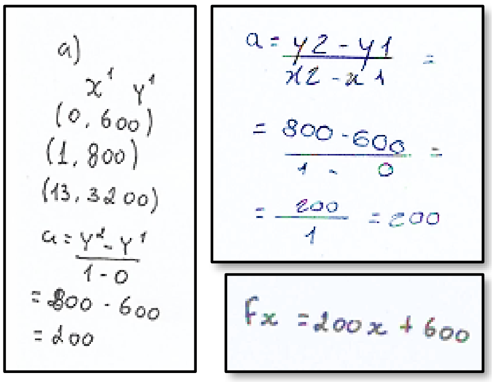
No entanto, deduz-se que a professora pretendia que se aproximassem da representação matemática e pediu-lhes que descrevessem a situação recorrendo à família de funções que conheciam:

Professora: Então, nesta perspetiva, se vocês estão a considerar que é uma função linear, em que o aumento é de 200 milhões e já está? Então tentem chegar à expressão.
Ana: À expressão algébrica?
Pedro: Eu acho que basta usar a regra de 3 simples, é isso?
Professora: Mais ou menos, há aqui mais qualquer coisa. Pensem nos anos. O estudo foi realizado em que ano? Olha, pensem no exemplo que eu vos dei quando entrámos num táxi, lembram-se?
Ângela: Oh professora, mas isso não é para a função afim?
Professora: Eu não digo mais nada, agora são vocês que têm de fazer, mas diria, Ângela, que pode ser um bom caminho. (GOA16)

Com esta conversação conjetura-se que a professora direcionou a atenção da turma para a função afim. A partir do momento em que se estabeleceu este diálogo, os alunos começaram à procura da expressão algébrica da função afim que poderia modelar a situação, como se pode inferir com a discussão entre um dos grupos:

Andreia: Se a professora diz que é afim é uma função do tipo $y = mx + b$ e então só temos de calcular o declive e ver qual é o b.
Frederico: Então o declive não é 200?
Andreia: Não sei, temos de calcular.
Maria: Mas essa é a variação, não precisamos de calcular, é isso.
Andreia: Mas vamos calcular o declive porque assim é certo.
João: Ui, e como calculamos isso, já não percebo nada.
Andreia: Temos de encontrar dois pontos e depois dividimos um pelo outro. (GOA16_G4).

Perante as respostas que estes alunos deram, confirma-se que a resposta escrita reflete o discurso verbal. Aplicando a definição de declive de uma reta a partir das coordenadas de dois dos seus pontos, o grupo determinou o declive efetuando o quociente entre a diferença das ordenadas e a diferença das abcissas de dois pontos. Deduz-se da resposta apresentada pelo Grupo 4 (Figura 7) que atribuíram ao ano de 2017 o valor 0 e a 2018 o valor 1, obtendo assim os pontos de coordenadas (0,600) e (1,800), justificando com representação matemática que $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o que lhes permitiu obter $a = \frac{800-600}{1-0} = 200$. Posteriormente, concluíram que $f(x) = 200\,x + 600$.



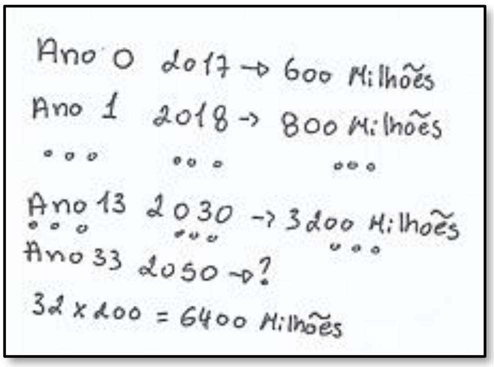
a)
x^1 y^1
(0, 600)
(1, 800)
(13, 3200)
$a = \frac{y^2 - y^1}{1 - 0}$
$= 800 - 600$
$= 200$

$a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} =$
$= \frac{800 - 600}{1 - 0} =$
$= \frac{200}{1} = 200$

$Fx = 200x + 600$

Figura 7. Respostas dados pelos alunos Andreia, Maria, Frederico e João (G4)

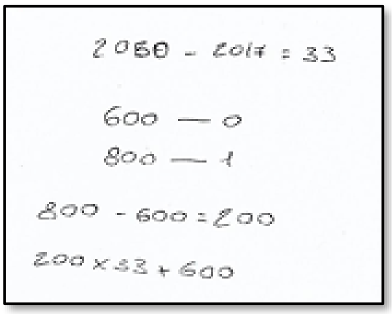
Como fica patente alguns alunos não conseguiram definir a situação através de um modelo algébrico. Exemplo disso encontra-se na resposta de Ana e dos restantes elementos do seu grupo, que, como não conseguiram criar o modelo algébrico, tentaram criar um processo numérico que os conduzisse à solução do problema (Figura 8).



Ano 0 2017 → 600 Milhões
Ano 1 2018 → 800 Milhões
... ...
Ano 13 2030 → 3200 Milhões
... ...
Ano 33 2050 → ?
32 x 200 = 6400 Milhões

Figura 8. Resposta de Ana (G1) à alínea a)

Porém, no caso do Grupo 6, verificou-se que, apesar de não terem criado o modelo matemático recorrendo à representação algébrica, conseguiram construir uma representação válida, como evidencia a resposta de um dos elementos visível na Figura 9.



2050 - 2017 = 33
600 — 0
800 — 1
800 - 600 = 200
200 x 33 + 600

Figura 9. Resposta de Pedro (G6) à alínea a)

Nesta fase do processo, depreendem-se dificuldades ao nível da mobilização do raciocínio algébrico ou ainda pelo facto de muitos alunos não dominarem o conceito de função afim.

(3) Interpretação dos resultados e validação do modelo

Através do modelo, os alunos chegariam à conclusão de que, em 2050, o número de pessoas com acesso limitado a uma fonte de água segura será de 7200 milhões, o que se traduziu nas respostas de alguns grupos, como constam as respostas dadas pelos elementos do Grupo 2 à alínea b), como exemplifica a resposta do Guilherme (Figura 10).

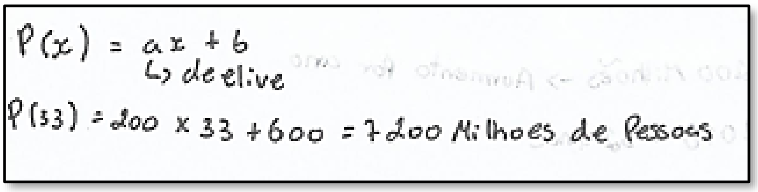


Figura 10. Modelo matemático de Guilherme (G2)

Resultados similares são encontrados noutras respostas. Porém, em algumas delas detetam-se certas incongruências, como evidencia o registo de Frederico, que não inclui na contagem de anos o ano inicial (Figura 11), ainda que depois reconheça que há uma diferença de 33 anos entre o inicial e o final.

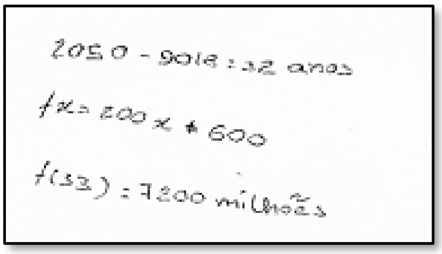


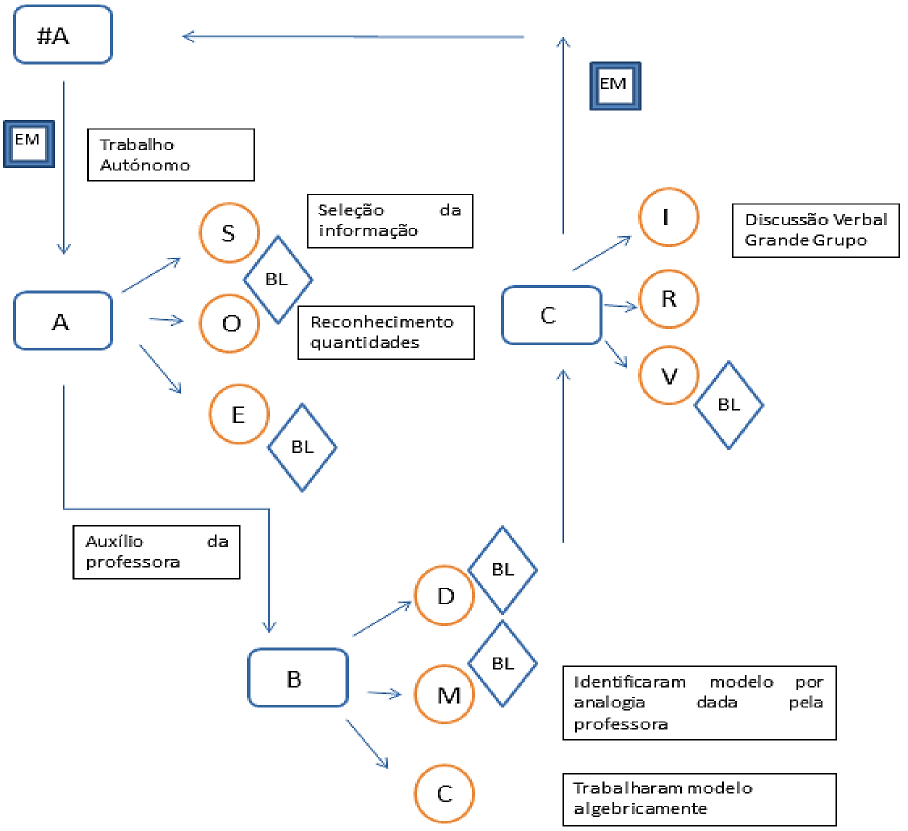
Figura 11. Resposta de Frederico (G4) à alínea b)

Num momento de discussão coletiva, a professora instiga-os a refletirem sobre o valor obtido assim como a apresentarem razões que sustentem a sua previsão (NCOA_mar2018). Do diálogo seguinte, depreende-se que os alunos não mobilizaram os resultados matemáticos que obtiveram para auxiliarem a argumentação. Apesar de apontarem causas para a crescente escassez hídrica, não parecem apoiarem-se nos resultados matemáticos.

Professora: Como vocês estão a ver aí na tarefa, de acordo com os resultados obtidos, quais as razões que vocês apontam para esta previsão? Já repararam na quantidade de pessoas que não terão acesso a água potável? É só um pouco mais ou é muito mais?

Andreia:	É muito mais. Eu acho que tem a ver com a pecuária. Não podemos esquecer que contamina muito, os rios, os lençóis freáticos. Isso leva à diminuição da água potável.
Daniela:	Sim, a poluição que cada vez é maior.
Professora:	Mais alguma ideia?
Pedro:	Oh professora, será que pode ser o aumento de população? E também as mudanças climáticas?
Tomás:	Sim, o aquecimento global. (GOA18)

No desenvolvimento da tarefa de modelação 'Previsão da escassez Hídrica' mapeou-se a seguinte tendência de atividades cognitivas e processos realizados pela grande parte dos alunos, no decurso das etapas de modelação (Figura 12).



Legenda: #A - Problema Real; A – Modelo Real; B – Modelo Matemático; C – Interpretar Resultados; EM – Conhecimento Extramatemático, BL - Bloqueio
S – Simplificar; O – Organizar; E – Reconhecer Estratégias; D- Definir Variáveis; M – Modelo Matemático; T –Trabalhar matematicamente; I – Interpretar modelo; R – comparar Resultados; V - Validar

Figura 12. Mapa Síntese da relação entre as etapas de modelação, atividades cognitivas e estratégias da tarefa 'Previsão da escassez hídrica'

De forma global, na resolução da tarefa de modelação percecionaram-se algumas dificuldades de cunho interpretativo, nomeadamente, na clarificação do contexto e na seleção da informação, o que gerou dificuldades na definição de estratégias e na identificação das variáveis. No que diz respeito ao ajuste da situação ao modelo foi necessária a intervenção da professora que forneceu um exemplo comparativo. Esta intervenção possibilitou que os alunos conseguissem representar e trabalhar com o modelo de forma algébrica e, posteriormente, validá-lo.

Conhecimento reflexivo

A capacidade de mobilização dos conhecimentos matemáticos para a interpretação da prática social é manifestada, pelos alunos, na forma verbal e escrita em diversos momentos. Analisam-se esses momentos considerando duas tarefas de modelação (Tabela 2).

Tabela 2. Relação entre tarefas propostas de 8º ano e questões sociais

Tarefas de Modelação	**Questões sociais**
Previsão Escassez Hídrica	De acordo com os resultados obtidos, quais as razões que apontas para tal previsão?
Por que motivo os preços importam?	Quem paga mais em cada uma das situações? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social?

Relativamente à tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' (Figura 2), depois de descoberto o modelo preditivo, era pretendido que, com base nos resultados, os alunos refletissem sobre os motivos que os levassem àquela previsão, que indicia uma agudização da escassez hídrica ao longo dos anos. Acontece que alguns alunos apresentam motivos e apontam soluções, mas sem os sustentar nos resultados obtidos, como exemplificam as respostas da Catarina, da Beatriz e do David: "o aumento da população mundial" (RE_Catarina, G3); "poluição e mudanças climáticas" (RE_Beatriz, G1); "as soluções para esta realidade podem ser: investimentos pesados da parte dos Governos em obtenção, tratamentos e preservação dos recursos hídricos" (RE_David, G3). A ausência de fundamentação das suas respostas com os resultados obtidos faz com que as mesmas pudessem ser proferidas sem a exploração da tarefa.

Uma das questões na tarefa 'Por que motivo os preços importam?' (Figura 13) levava a concluir quem paga mais pelo acesso à água em duas situações contrastantes e a discutir se esta seria uma situação de desigualdade social.

TAREFA 5 – POR QUE MOTIVO OS PRECOS IMPORTAM?

Situação 1

Em Barranquilla, na Colômbia, o preço médio da água é de 0,55 euros por metro cúbico, junto dos prestadores de serviços, ao qual adiciona-se o valor de 4 euros pelo aluguer do contador enquanto que, junto dos camionistas, é de 5,50 euros por metro cúbico.

Situação 2

Nos bairros degradados de Acra, capital do Gana, as pessoas que compram água aos vendedores normalmente gastam 3 euros por uma taxa fixa paga ao vendedor e 3,20 euros por cada metro cúbico de água. Um habitante de Nova Iorque, cidade dos Estados Unidos da América, paga 1,2 euros por metro cúbico de água consumido e 5 euros pelo aluguer do contador.

Relatório de Desenvolvimento Humano

(a) Encontra um modelo que descreva ambas as situações e que permita obter quanto terá de pagar um consumidor cujo gasto de água tenha sido 10 metros cúbicos.

(b) Os resultados obtidos estão de acordo com o excerto do Relatório de Desenvolvimento Humano?

(c) Quem paga mais em cada uma das situações? Considerando os valores encontrados, achas que estamos perante uma questão de desigualdade social? Porque motivo?

(d) Cerca de um terço das pessoas sem acesso a uma fonte de água potável vivem com menos de um 1 dólar por dia. E o dobro destas pessoas vive com menos de 2 dólares por dia, como é o caso, de parte, da população do Gana. Compara estes dados com os da situação 2. Que concluis?

Figura 13. Excerto da tarefa "Por que motivo os preços importam?"

Os registos escritos correspondentes às respostas concentram-se na prerrogativa de que "o preço da água devia ser igual em todo o mundo" (RE_Tomás, G2) e que "as pessoas de uma classe mais baixam têm de pagar mais para terem acesso à água potável" (RE_Vítor, G2) ou ainda que "as pessoas que têm mais dinheiro pagam menos pela água" (RE_Ângela, G6). Nestes casos, os alunos exploraram pouco os resultados matemáticos obtidos para argumentarem o seu ponto de vista, tendo-se limitado a respostas breves. Na resposta de Rodrigo (Figura 14), assim como nas dos restantes elementos do seu grupo, já é mais evidente um raciocínio matemático para justificar a sua opinião, na medida em que compara as duas situações dadas.

As civilizações mais pobres estão perante uma questão de desigualdade porque Nova Iorque, uma cidade com melhores condições, paga menos de água do que as pessoas de civilizações mais pobres.

Figura 14. Justificação de Rodrigo (G1) à questão reflexiva da Tarefa 'Por que motivo os preços importam?'

Após as suas argumentações da ocorrência de desigualdade social os alunos aprofundaram o discurso, dando sugestões de formas de intervenção no combate à desigualdade do acesso à água. As suas posições debruçam-se sobre a responsabilidade das organizações governamentais e não governamentais na recolha de fundos. Na perspetiva de Ana, "os governos deveriam realizar campanhas, angariarem dinheiro para doarem a água aos países que não a têm" (RE_Ana, G1); e de Tiago, "para que não seja só uma parte da população a ter acesso à água, as organizações têm de lutar contra essa desigualdade, e fazerem uma distribuição mais justa pela população mais desfavorecida" (RE_Tiago, G6).

Discussão dos resultados e conclusões

Sobre as atividades desenvolvidas pelos alunos na resolução das tarefas de modelação contextualizadas por fenómenos sociais, infere-se que, relativamente às etapas de modelação na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica', surgiu um certo bloqueio na simplificação e no reconhecimento de estratégias. Os alunos sentiram necessidade de recorrer à professora, de modo a conseguirem compreender o contexto da tarefa. Entre as possíveis explicações para o sucedido, como a complexidade do texto ou a quantidade de informação contida, poderá estar também o facto de a intervenção pedagógica na prática de modelação estar ainda em fase inicial (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Para simplificar o problema, os alunos trabalharam em grupo tendo, para isso, efetuado registos escritos e sublinhado partes do texto. É de realçar, que alguns alunos da turma sublinharam, de forma indiscriminada, todas as quantidades presentes nos dados das tarefas. Esta atuação evidencia o que Frankenstein (2012) alega de contrato social entre a Matemática e os estudantes, o qual implica a necessidade de usar todos os números apresentados para resolver qualquer problema. Pensa-se que as atividades de compreender e simplificar a tarefa correspondem a um dos três níveis de modelação que Greer e Verschaffel (2007) denominam de modelação implícita. Trata-se de um nível referente a atividades de modelação nas quais os alunos se envolvem sem estarem verdadeiramente conscientes de que as mesmas são essenciais para a modelação.

As atividades desenvolvidas para definir o modelo matemático entraram no nível a que Greer e Verschaffel (2007) designam por modelação explícita. Nesta perspetiva, os alunos foram induzidos pela docente a identificar as variáveis. Apesar de incentivados para essa atividade de modelação, os resultados mostram-se frágeis, deixando notar uma barreira na identificação das variáveis. Assim, a professora, por meio de uma analogia, instruiu-os em relação ao caminho a seguir, o que propiciou aos alunos conseguirem encontrar o modelo.

A maneira como, em geral, os alunos trabalharam o modelo indicia a sua usual operacionalização com expressões algébricas (Stillman, 2019), que resultam da exploração dos dados que traduzem o contexto dos problemas na sua representação simbólica. As suas competências de modelação, ao relacionarem-se com outras competências matemáticas (Blum & Niss, 2024), acabam por se homogeneizar.

A interpretação dos resultados é uma atividade que os alunos concretizam em situações de modelação, num diálogo importante entre o mundo matemático e o mundo real (Galbraith & Stillman, 2006). Os alunos, nem sempre utilizaram os resultados obtidos para transitarem entre esses resultados e os resultados reais (Borromeo Ferri, 2006). Quando mobilizaram a competência reflexiva, os alunos optaram pela representação verbal estabelecida em grande grupo. A validação do modelo foi uma barreira, sugerindo a existência de um obstáculo no retorno à situação real (Blum, 2015).

Os dados recolhidos mostram que os alunos conseguiram efetuar uma leitura reflexiva das situações propostas, embora em diferente profundidade, surgindo a leitura crítica dos dados (Rubel et al., 2021) como uma das atividades em que os alunos mais se envolveram, indiciando o terceiro nível de modelação de Greer e Verschaffel (2007), a modelação crítica. A relação desigual de acesso aos recursos básicos foi patente na tarefa 'Previsão da Escassez Hídrica' quando os alunos chegaram ao valor de 7200 milhões de pessoas que estarão, em 2050, sujeitos a recursos hídricos muito limitados. Esta reflexão estendeu-se à tarefa 'Por que motivo os preços importam', uma vez que acabaram por concluir que este cenário é mais suscetível de ocorrer nas regiões do mundo onde "as pessoas mais pobres têm que pagar mais para terem acesso à água potável" (RE_Ana, G1).

Os alunos mostraram, atendendo ao seu nível de escolaridade, serem capazes de escrever o mundo com a Matemática (Gutstein, 2003), desenvolvendo consciência socio-política (Gutiérrez et al., 2024). Como denotado nos registos orais e escritos, encontram-se sugestões da aplicação de modelos lineares para redistribuição de bens primários, com critérios assentes no 'Princípio de Diferença' (Rawls, 2013).

Outro fator que emerge da realização das tarefas foi a mobilização das experiências socioculturais dos alunos, o que, em termos da perspetiva sociocrítica da modelação, combina a individualidade das experiências dos alunos com a reflexão crítica sobre essas experiências (Rosa & Orey, 2015). Neste estudo, estas manifestações passaram por conexões entre as temáticas das tarefas com: catástrofes ambientais à data recentes; o impacto ambiental das suas práticas diárias; a igualdade de género nas suas vivências familiares; a comparação das suas experiências pessoais face a situações de níveis extremos de pobreza. Tais conexões traduzem uma pedagogia culturalmente relevante (Rubel & Nicol, 2020).

Dentro de uma perspetiva de análise sociocrítica (Araújo, 2009; Jurdak, 2016; Simic-Muller, 2019), para além das capacidades de modelação mencionadas, as interações verbais e o trabalho em grupo, o qual permitiu o estímulo da autonomia (Schukajlow & Blum, 2023), foram atividades às quais os alunos atribuíram importância e que sentiram fundamentais para minimizarem as dificuldades com que se depararam.

Em rigor, sublinha-se que o eixo tridimensional de justiça – redistribuição, reconhecimento e participação – não se limitou à descrição ou modelação dos fenómenos sociais inscritos nas tarefas de modelação. Esta estrutura permitiu, sobretudo, que emergisse da própria atividade dos alunos na resolução das tarefas, o uso da Matemática, e em concreto dos modelos, como ferramenta para abordar e reconhecer que a justiça social ultrapassa a esfera económica, abrangendo também questões de identidade, reconhecimento, voz, território e ambiente (Rawls, 2013; Young, 2022; Fraser, 2022). Esta aferição revelou-se em diferentes formas de expressão dos alunos, como no exemplo: "Eu acho que tem a ver com a pecuária. Não podemos esquecer que contamina muito, os rios, os lençóis freáticos. Isso leva à diminuição da água potável" (GOA18_Andreia). Esta evidência aponta para um novo caminho no âmbito da modelação matemática sociocrítica, direcionado para uma vertente que se identifica como modelação normativa crítica. Esta perspetiva propõe uma dupla orientação: por um lado, normativa, ao ancorar-se em critérios alicerçados na teoria multidimensional de justiça social (redistribuição, reconhecimento e participação); por outro, crítica, ao convocar o questionamento das estruturas de poder e das desigualdades que atravessam os contextos analisados (Gutiérrez, 2018; Skovsmose & Valero, 2002).

Neste sentido, delineia-se um campo de atuação pedagógica para que os professores possam orientar a escolha dos temas e definir ações estratégicas e metodologias. Para os alunos, o convite à problematização dos contextos reais, a reflexão sobre as estruturas sociais e o questionamento das desigualdades são aspetos que fomentam a formação da cidadania e a promoção do pensamento crítico. Estes contributos para a prática pedagógica são pilares fundamentais dos documentos curriculares atuais, nomeadamente nas AEM, que reconhecem o pensamento crítico como uma competência transversal, sobretudo em três capacidades matemáticas: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e as conexões (MEC, 2021).

Referências

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2021). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Autêntica.

Amado, J. (Coord.) (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (2ª Ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 55–68. https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37948/28976

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education, 8*(1), 16–29. https://journalofmathed.scholasticahq.com/article/90005

Asempapa, R. S. (2018). Assessing teachers' knowledge of mathematical modeling: Results from an initial scale development. *Journal of Mathematics Education, 11*(1), 1–16. https://doi.org/10.26711/007577152790017

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Belavi, G., & Murillo, F. J. (2020). Democracia y justicia social en las escuelas: Dimensiones para pensar y mejorar la práctica educativa. *REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 18*(3), 5–28. https://doi.org/10.15366/reice2020.18.3.001

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123–139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Ellis Horwood.

Blum, W., & Niss, M. (2024). Origin and development of the notion of mathematical modelling competency/competencies. In H.-S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching mathematical modelling education in disruptive times. International Perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 185–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_14

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos* (1ª Ed., 6ª reimp.). Porto Editora.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Brandt, C. F., Burak, D., & Kluber, T. E. (Orgs.) (2016). *Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. Editora UEPG.

Carreira, S., & Blum, W. (2021). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: *Parte 1. Quadrante, 30*(1), 1–7. https://doi.org/10.48489/quadrante.24926

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical modeling: Cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 89–98.

Dean, J. (2013). Living Algebra, living wage. In E. Gutstein, & B. Peterson (Eds.), *Rethinking Mathematics: Teaching Social Justice by the Numbers* (pp. 67–68). Rethinking Schools.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.) (2018). *The Handbook of Qualitative Research*. Sage.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*, 58–79. https://doi.org/10.1007/BF03217401

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. Wittrockk (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed.), (pp. 119–161). McMillan.

Frankenstein, M. (2012). Quantitative form in arguments. In S. Mukhopadhyay, & W. M. Roth (Eds.), *Alternative forms of knowing (in) mathematics. Celebrations of diversity of mathematical practices* (pp. 23 - 297). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-921-3_14

Fraser, N. (2022). *Justiça interrompida: Reflexões críticas sobre a condição "pós-socialista"*. Boitempo Editorial.

Galbraith, P. (2024). Modelling, teaching, and reflecting: What more I have learned? In H.-S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_10

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 143–162 https://doi.org/10.1007/BF02655886

Geiger, V., Galbraith, P., Niss, M., Delzoppo, C. (2022). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 313–336. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10039-y

Gildehaus, L., & Liebendörfer, M. (2021). CiviMatics: Mathematical modelling meets civic education. *Exploring New Ways to Connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 1, 167–171). https://doi.org/10.5281/zenodo.5391966

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies — Overview. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 219–224). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_22

Greefrath, G., & Carreira, S. (2024). Mathematical applications and modelling in mathematics education. In J. Wang (Ed.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (Vol.1, pp. 417–421). ICMI. https://doi.org/10.1142/9789811287152_0046

Gutiérrez, R. (2012). Context matters: How should we conceptualize equity in mathematics education? In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, & D. Pimm (Eds.), *Equity in Discourse for Mathematics Education. Mathematics Education Library* (pp. 17–33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2813-4_2

Gutiérrez, R. (2018). Why we need to rehumanize mathematics. In *Annual Perspectives in Mathematics Education: Rehumanizing mathematics for students who are Black, Latinx, and Indigenous* (pp. 1–10). National Council of Teachers of Mathematics.

Gutiérrez, R., Kokka, K., & Myers, M. (2024). Political conocimiento in teaching mathematics: Mathematics teacher candidates enacting their ethical identities. *Journal of Mathematics Teacher Education, 27*, 755–781. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09627-5

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, latino school. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 37–73. https://doi.org/10.2307/30034699

Gutstein, E. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs* (pp. 131–143) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_8

Gutstein, E., & Peterson, B. (Eds.) (2013). *Rethinking mathematics: Teaching social justice by the numbers* (2.ª edição). Rethinking Schools.

Jurdak, M. (2016). Real-world problem solving from the perspective of critical mathematics education. In M. Jurdak (Ed.), *Learning and teaching real world problem solving in school mathematics* (pp 109–120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08204-2_7

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G.A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129–149). Springer International Publishing.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *ZDM–Mathematics Education, 38*, 196–208. https://doi.org/10.1007/BF02655889

Lesh, R., & Heger, M. (2001). Mathematical abilities that are most needed for success beyond school in a technology-based age of information. *The New Zealand Mathematics Magazine, 38*, 1–17.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2014). *Research in education evidence-based inquiry*. Pearson.

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2020). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook*. Sage.

MEC - Ministério da Educação e Ciência (2021). *Aprendizagens Essenciais da Matemática para o Ensino Básico*. MEC–DGE.

Moses, R., & Cobb, C. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Beacon Press.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

Powell, A. B. (2022). Decolonizing mathematics instruction: Subordinating teaching to learning. *Bolema, 36*(73), 1–10. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73e01

Rawls, J. (2013). *Uma teoria da justiça* (3.ª edição). Editorial Presença.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2015). Social-critical Dimension of Mathematical Modelling. In G. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 385–395). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_32

Rubel, L. H., & Nicol, C. (2020). The power of place: spatializing critical mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(3), 173–194. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1709938

Rubel, L. H., Nicol, C., & Chronaki, A. (2021). A critical mathematics perspective on reading data visualizations: Reimagining through reformatting, reframing, and renarrating. *Educational Studies Mathematics, 108*, 249–268. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10087-4

Schukajlow, S., & Blum, W. (2023). Methods for teaching modelling problems. In G. Greefrath, S. Carreira, & G. Stillman (Eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp 327–339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1_20

Siller, H.-S., Geiger, V., & Kaiser, G. (2024). Researching mathematical modelling education in disruptive times—An introduction. In H. S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp 3–11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_1

Simic-Muller, K. (2019). "There Are Different Ways You Can Be Good at Math": Quantitative Literacy, Mathematical Modeling, and Reading the World. *PRIMUS, 29*(3–4), 259–280. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1530705

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: Incerteza, matemática, responsabilidade*. Cortez.

Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educational Studies in Mathematics, 108*(1), 369–383. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0

Skovsmose, O. (2023). *Critical Mathematics Education.* Springer.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia. Quadrante, 11(1), 7–28. https://doi.org/10.48489/quadrante.22748

Stillman, G. (2019). State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In G. Stillman, & J. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education ICME-13 Monographs* (pp. 1-20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. P. E. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257–276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_16

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16), 133–148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matematica. *Espaço Plural, 18*(36), 219–251. https://e-revista.unioeste.br/index.php/espacoplural/article/view/19718

Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 347–374. https://doi.org/10.12802/relime.13.1734

Vithal, R., Brodie, K., & Subbaye, R. (2024). Equity in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 153–164. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01504-4

Wright, P. (2016). Social justice in the mathematics classroom. *London Review of Education 14*(2), 104–118. https://doi.org/10.18546/LRE.14.2.07

Yin, R. K. (2017). *Case study research – Design and methods* (6th Edition). Sage.

Young, I. M. (2022). *Justice and the politics of difference*. Princeton University Press.