

Pontos de vista de Jean-Marie Kraemer sobre o ensino e a aprendizagem dos números

Jean-Marie Kraemer's views on the teaching and learning of numbers

Fátima Mendes 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Centro de Investigação em Qualidade de Vida
Portugal
fatima.mendes@ese.ips.pt

Catarina Delgado 

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Centro de Investigação em Qualidade de Vida
Portugal
catarina.delgado@ese.ips.pt

Resumo. Este artigo procura ilustrar o trabalho desenvolvido por Jean-Marie Kramer no âmbito da Educação Matemática e destacar as suas principais ideias associadas ao ensino e a aprendizagem dos números. A primeira secção retrata o seu percurso profissional inicial, evidenciando as experiências que orientaram as suas áreas de interesse na investigação. A segunda secção foca-se nos contributos para a investigação e formação de professores portugueses relacionados com o ensino e a aprendizagem dos números. A estrutura desta secção é orientada por um conjunto de princípios que Jean-Marie Kramer considera fundamentais para planificar o ensino dos números e, a partir destes, realçam-se algumas das suas perspetivas sobre esta temática.

Palavras-chave: aprendizagem dos números; estratégias de resolução; planificação do ensino; tarefas.

Abstract. This article aims to illustrate the work of Jean-Marie Kramer in the field of Mathematics Education and to highlight his key ideas related to the teaching and learning of numbers. The first section outlines his early professional career, emphasising the experiences that shaped his areas of research interest. The second focuses on his contributions to Portuguese research and teacher training in relation to the teaching and learning of numbers. The structure of this section is organised around a set of principles that Jean-Marie Kramer considers fundamental for planning the teaching of numbers. Based on these principles, some of his perspectives on the subject are also highlighted.

Keywords: number learning; resolution strategies; teaching planning; tasks.

Um percurso profissional focado na promoção da aprendizagem da matemática

Jean-Marie Kraemer iniciou a sua carreira como professor do ensino primário em França, tendo trabalhado com alunos dos países do Magrebe. Já nos Países Baixos ainda trabalhou alguns anos como professor, em Haia, antes de participar em projetos relacionados com a educação matemática. No final dos anos 70 do século passado, e durante cerca de uma década, participa em diferentes projetos de investigação e inovação pedagógica, relacionados com a aprendizagem da matemática, tanto no âmbito da geometria como da aritmética, fazendo também formação de professores nessas áreas. Em particular, trabalhou num projeto (OMS) cuja finalidade era promover melhores resultados na aprendizagem dos filhos dos operários de Roterdão. Jean-Marie Kraemer fez parte da equipa “Rekenen & Wiskunde” que desenvolveu os manuais de matemática, sendo o principal responsável pela vertente de geometria, que se centrava na geometria informal de ver e representar o mundo (Gravemeijer & Kraemer, 1984). Nesta altura, Jean-Marie Kraemer torna-se presidente da NVORWO, a associação neerlandesa para a melhoria do ensino da matemática, tanto ao nível do ensino primário como no que diz respeito à formação de professores.

Na década de 80, surge a Educação Matemática Realista (EMR) (Gravemeijer, 1994) que, tal como refere Jean-Marie Kraemer, tem como propósito “fundamentar a compreensão dos alunos em problemas contextuais e promover a matematização progressiva da sua própria atividade matemática, a fim de assegurar o desenvolvimento tanto da compreensão dos alunos como da sua proficiência em aplicações.” (Kraemer, 2011, p. 353) e vem alterar o modo como se pensavam as primeiras aprendizagens das crianças. Tendo a EMR como enquadramento e trabalhando de perto com investigadores como Koeno Gravemeijer e Marteen Dolk, Jean-Marie Kraemer pertenceu ao CITO, Instituto dos Países Baixos que monitoriza o grau de proficiência de diferentes áreas curriculares até ao final do 1.º ciclo do ensino básico. Nesse contexto, teve oportunidade de perceber que, embora a EMR tivesse sido implementada em quase todas as escolas dos Países Baixos, acompanhada pela introdução de novos manuais, as alterações nas aprendizagens numéricas dos alunos não foram as esperadas. Em particular, no que diz respeito à subtração com números com dois algarismos, os alunos revelaram algumas dificuldades:

[Os alunos] continuavam a não ser bem-sucedidos em tarefas como $62 - 48$ e também pareciam ter dificuldade em resolver subtrações apresentadas como problemas contextuais em que a subtração não surge como “tirar”. Isto gerou questões sobre o modo como os alunos procedem quando resolvem problemas de subtração simples ou problemas de subtração em contexto e porque é que isto causa dificuldades. (Kraemer, 2011, p. 353)

Estas questões parecem tê-lo motivado para a realização de uma investigação aprofundada sobre os procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas de subtração,

com e sem contexto, com números até 100, que culminou na sua tese de doutoramento (Kraemer, 2011). O trabalho desenvolvido centrou-se na análise sistemática e aprofundada de 1850 resoluções de tarefas de subtração de cerca de 300 alunos do 3.º ano. A tese que daí resultou revela alguns aspetos do modo de trabalhar de Jean-Marie Kraemer, sistemático, colocando-se na perspetiva do outro, atento aos pormenores, querendo saber o porquê e, sobretudo, contribuindo para o conhecimento sobre como pensam e aprendem os alunos no que respeita às primeiras aprendizagens numéricas. Um aspeto a destacar, ao longo de todo o seu percurso profissional, foi a preocupação que sempre manifestou com o modo como pensam os alunos 'fracos' em matemática. O reconhecimento de que todos podem aprender, e que nem sempre aprendem da mesma maneira, é uma ideia forte no discurso de Jean-Marie Kraemer, que se mantém atual, numa perspetiva de educação inclusiva (UNESCO, 2009).

A este propósito, destacamos o referido pelo próprio no final do sumário da sua tese:

Com base nos resultados da nossa investigação, aconselhamos os educadores matemáticos a reconsiderar a abordagem realista, tal como é atualmente trabalhada para a subtração até 100, e a reforçá-la, tentando encontrar um melhor equilíbrio entre o trabalho sobre o método da decomposição (*splitting*) e o método por 'saltos' (*jump*) juntamente com um esforço para melhorar o método de raciocínio e prestar mais atenção às "grandes ideias", como a unitização e as propriedades aritméticas. Isto no âmbito de uma cultura de sala de aula que estimula o trabalho colaborativo na compreensão matemática partilhada. (Kraemer, 2011, p. 358)

O trabalho realizado, embora em holandês, dá-nos conta de diferentes estratégias de resolução de tarefas de subtração, evidenciando o modo como o contexto e os números utilizados podem influenciar a resolução dos alunos. Além disso, tal como refere na citação anterior, realça a importância de incentivar estratégias de resolução para além da decomposição decimal dos números, como o calcular por 'saltos'. Todos estes aspetos têm subjacentes as 'grandes ideias' e as propriedades associadas à subtração, bem como a construção de uma cultura de sala de aula que propicie a aprendizagem da matemática. A cultura de sala de aula a que se refere Jean-Marie Kraemer assenta no desenvolvimento de normas sociais e socio matemáticas (Cobb et al., 2001) que possibilitam aos alunos construir o seu conhecimento de forma partilhada.

Contributos para a investigação e para a formação de professores portugueses

Em Portugal, Jean-Marie Kraemer foi consultor do projeto de investigação *Desenvolvendo o sentido de número: perspetivas e exigências curriculares*, um projeto diretamente ligado à inovação curricular no ensino dos números e das operações no pré-escolar, 1.º ciclo e 2.º ciclos e ao desenvolvimento de novas práticas de planificação e de ensino neste domínio.

Este projeto, realizado entre 2005 e 2007, envolveu professores das Escolas Superiores de Educação de Leiria, Lisboa e Setúbal e professores do 1.º ciclo do ensino básico e teve como principais objetivos:

- Construir materiais curriculares facilitadores de desenvolvimento do sentido de número;
- Compreender o modo como as crianças desenvolvem o sentido de número, sobretudo no contexto da resolução de problemas;
- Identificar práticas profissionais e o tipo de currículo que favorecem o desenvolvimento do sentido de número.

Enquanto consultor, Jean-Marie Kraemer apoiou a equipa do projeto na conceção de sequências de tarefas, sobre temas essenciais dos programas do 1.º e 2.º ciclos, bem como das orientações curriculares para a educação pré-escolar, e na análise e reflexão das produções dos alunos resultantes da exploração dessas tarefas na sala de aula. Neste processo, trouxe para a equipa formas de pensar particulares que têm subjacentes cinco princípios, que enuncia no texto “Desenvolvendo o sentido de número: cinco princípios para planificar” (Kraemer, 2008). É a partir de quatro desses princípios que iremos destacar algumas das suas ideias no âmbito do ensino e da aprendizagem dos números.

Observar e registar a forma de ver, pensar e calcular dos alunos tal como eles veem, pensam e calculam

Observar e registar o modo como os alunos pensam e calculam são ações que o professor deve desenvolver no sentido de compreender como é que modelam os seus cálculos. Contudo, uma vez que os alunos usam representações muito diversas nas suas resoluções, umas mais informais, outras mais formais, é essencial que o professor seja capaz de modelar resoluções. Esta prática, que sugere ser desenvolvida pelo professor, está muito associada à sua experiência no CITO (Kraemer, 2003). Em diferentes dos artigos publicados em português, o autor apresenta vários exemplos de como se podem modelar as resoluções dos alunos a partir de um mesmo problema. Um desses exemplos surge a propósito da seguinte tarefa que inclui o diálogo entre duas crianças sobre o montante de dinheiro que obtêm se todos os dias lavarem o carro dos pais, recebendo uma moeda na segunda-feira e, em cada dia, o dobro das moedas do dia anterior (Figura 1). A partir desta situação são modeladas diferentes formas de resolução de alunos para calcular o número de moedas que receberão no sábado (Figura 2) (Kraemer, 2001).

Mas o que significa, para Jean-Marie Kraemer, modelar as resoluções dos alunos? Trata-se, sobretudo, como evidencia a Figura 2, de interpretar o que dizem os alunos e recorrer a modelos representativos dos diferentes modos de pensar e calcular (por exemplo, a primeira representação mostra a adição repetida de 16, com recurso à reta numérica, a segunda representação esquematiza o dobro de 16 através da decomposição deste número

em $10 + 6$ e do dobro de cada um destes números e, a última, diz respeito ao algoritmo da adição).

O problema apresentado

A ficha mostra as crianças a lavar o carro dos pais.

Elas imaginam a recompensa que poderão ter:

Rapariga — cada dia duas vezes mais moedas que na véspera ... E isto durante 2 semanas ... ! Imaginas a montanha de moedas? ...

Rapaz — segunda uma, terça duas, quarta ... Huummm! Estás convencida que eles vão nessa?

Como reagiram os alunos de Trudy?



Figura 1. Tarefa *Uma recompensa especial* - enunciado (Kraemer, 2001)

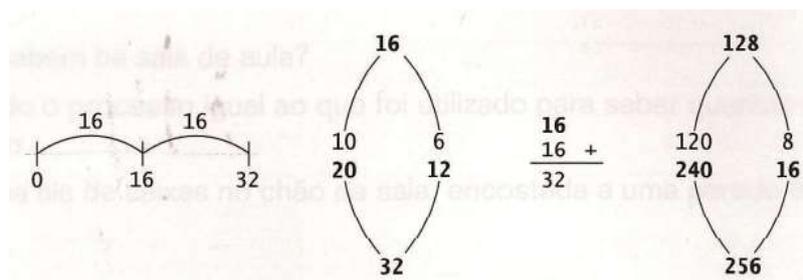


Figura 2. Modelação de diferentes resoluções da Tarefa *Uma recompensa especial* (Kraemer, 2001)

Ainda associado a este princípio, o autor destaca a dificuldade de interpretar algumas das resoluções dos alunos e, em alguns casos, de as considerar num nível mais elevado do que na realidade são, daí o professor tentar ver, pensar e calcular colocando-se na perspetiva do aluno (Kraemer, 2008).

Analisar e organizar as soluções a partir das noções, procedimentos e representações usadas pelos alunos

Paralelamente à ação de modelar as resoluções das crianças associadas a uma mesma tarefa, é essencial que o professor as analise e organize, de acordo com as estratégias e representações usadas pelos alunos, ordenando-as, da mais informal à mais formal. Esta organização auxilia o professor a identificar tendências de desenvolvimento e a compreender o que cada aluno pode conservar e ou alterar de modo a progredir para um maior

nível de sofisticação na sua maneira de pensar, calcular e representar (Kraemer, 2008). As brochuras associadas ao Projeto *Desenvolvendo o sentido de número* (Equipa do Projeto Desenvolvendo o Sentido de Número, 2005; 2007) incluem um conjunto de tarefas que podem ser usadas em contexto de educação pré-escolar e 1.º ciclo do ensino básico que apresentam, para cada uma, possíveis estratégias de resolução de alunos com diferentes níveis de sofisticação, tanto em termos de cálculo como no que respeita às representações usadas. A conceção das tarefas aí apresentadas e a análise detalhada das resoluções dos alunos que resultaram da sua experimentação em sala de aula, tiveram o apoio inestimável de Jean-Marie Kraemer, que desde o início, não se limitou ao papel de consultor, mas de membro integrante da equipa.

Pensar como as condições da tarefa podem estimular os alunos a transformar as suas noções, procedimentos e representações num nível mais alto de compreensão

Este princípio, associado ao design de tarefas, reflete, provavelmente, o que Jean-Marie Kraemer mais gostava de fazer e em que mais se destacava: construir tarefas que apoiassem os alunos a progredir na sua compreensão sobre as ideias e conceitos, estratégias de resolução e representações usadas. Em Kraemer (2008), destacam-se como condições chave de uma boa tarefa partir do processo de matematização de cada aluno (Gravemeijer, 1994) e das ideias matemáticas, estratégias que usam os alunos para matematizar (Fosnot & Dolk, 2001).

Saliente-se, contudo, a grande importância conferida por Jean-Marie Kraemer à seleção dos contextos associados às tarefas, que deve ser realizada de forma criteriosa, de modo que estes tenham determinadas características. No mesmo sentido, Fosnot e Dolk (2001), referem que os contextos, para além de permitirem o uso de modelos por parte dos alunos, devem também fazer-lhes “sentido”, bem como criar surpresa e suscitar questões. Permitir o uso de modelos significa que as tarefas devem incluir imagens ou situações que lhes suscitem o uso de um determinado modelo. Fazer “sentido” para os alunos inclui, entre outros aspetos, poderem ser propostas situações reais ou imaginárias com as quais os alunos sejam capazes de lidar e de analisar a razoabilidade dos resultados a que chegam. Além disso, devem fazer “sentido” para a construção de estruturas e de relações, que podem emergir do contexto proposto. Finalmente, criar surpresa e suscitarem questões diz respeito a serem suficientemente interessantes e desafiantes de modo a provocar nos alunos a vontade de explicar o que está a acontecer e de encontrar respostas a questões do tipo: *Porque é assim? Será que é assim? E o que acontece se...* A tarefa apresentada na Figura 1 é um exemplo de uma tarefa que cumpre os requisitos enunciados.

Avaliar e diagnosticar para ajustar as suas fronteiras e as dos alunos

Para Jean-Marie Kraemer, ensinar traduz-se numa “experimentação cíclica e contínua que permite ao professor estabelecer as suas próprias fronteiras e as dos seus alunos” (Kraemer, 2008, p. 26). Neste ciclo, que se representa na Figura 3, assume particular relevância a avaliação e o diagnóstico como forma de obter informação que permite ao professor uma melhor clarividência das aprendizagens dos alunos, fundamental para tomar decisões e efetuar eventuais ajustes na sua planificação (Kraemer, 2008). Trata-se, sobretudo, de pensar na avaliação como uma forma de compreender o que os alunos sabem e como pensam e de ajustar a sua prática a este conhecimento para os apoiar a evoluir nas aprendizagens (Kraemer, 2002; 2005).

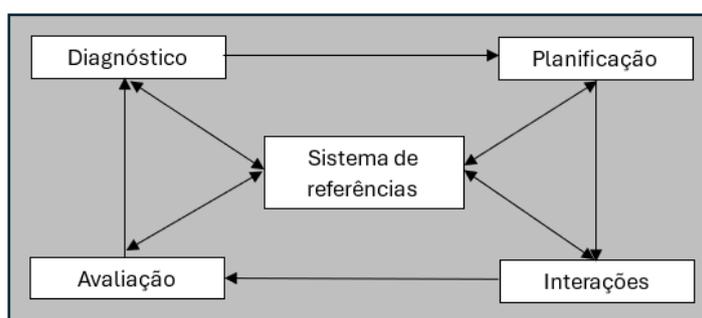


Figura 3. Ciclo de experimentação que integra as atividades chave do professor (Kraemer, 2008, p. 26)

A análise sistemática das resoluções dos alunos auxilia o professor a avaliar a sua progressão em termos das aprendizagens e a decidir o que faz sentido propor a seguir, numa perspetiva de melhoria contínua das suas competências. *Avaliar para adaptar as aprendizagens à medida dos conhecimentos dos alunos* é o título de um artigo (Kraemer, 2003) em que reflete sobre diferentes níveis e funções da avaliação tendo subjacente a sua experiência no contexto dos Países Baixos. Desse artigo, destacamos uma ideia que nos parece fundamental: “A avaliação contínua da progressão dos alunos permite construir um sistema de referências e aprender a usá-lo, em diferentes contextos, no quotidiano” (Kraemer, 2003, p. 33).

Tal como referimos anteriormente, para Jean-Marie Kraemer, a conceção de sequência de tarefas, ou seja, de um conjunto de tarefas encadeadas umas nas outras que permitam aos alunos atingir os objetivos de aprendizagem que o professor fixou, é essencial no processo de planificação do ensino. Esta conceção alicerça-se, não só nos processos de avaliação e diagnóstico, mas também no que designa por construção de sistemas de referência. Para melhor ilustrarmos esta ideia, partilhamos a operacionalização da conceção de uma sequência de tarefas para trabalhar os números na representação decimal, que ficou conhecida pela “Proposta de trabalho dos decimais do Jean-Marie” (Figura 4).

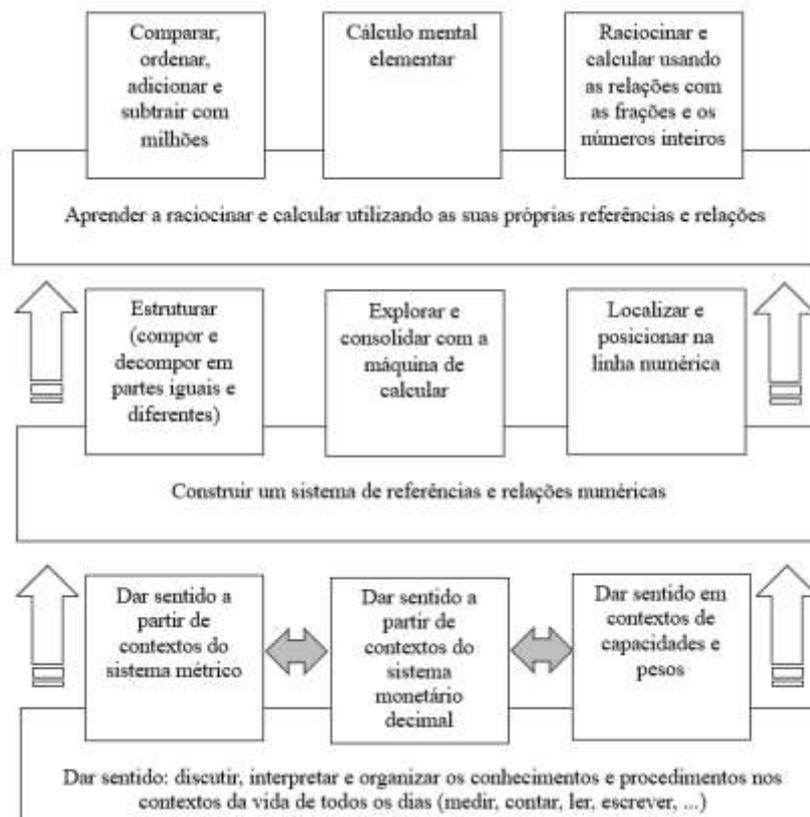


Figura 4. Operacionalização da proposta de trabalho dos decimais (Kraemer, 2007, p. 26)

O esquema da Figura 4 deve ser lido de baixo para cima, opção comumente observável em esquemas propostos por Jean-Marie Kraemer que traduzem a ideia de progressão. Para iniciar a abordagem dos números na representação decimal, começa-se por dar sentido aos ‘novos’ números; em seguida, o foco está na construção de um sistema de referências e relações numéricas que facilitem o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Por fim, as tarefas devem permitir a utilização dessas referências e relações. Uma concretização desta proposta, através de um conjunto de tarefas, foi compilada numa brochura usada na formação contínua de professores de matemática do 1.º e 2.º ciclos pela equipa da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal (EPFCMESES, 2010).

A concluir

O contributo de Jean-Marie Kraemer, embora focado, sobretudo, numa determinada época, mantém toda a atualidade e tem ecos em documentos curriculares, na formação inicial e contínua de professores, em tarefas que fazem parte de manuais escolares e em diversas investigações realizadas sobre a temática do ensino e da aprendizagem dos números (e.g. Delgado, 2014; Cebola, 2019; Ferreira, 2012; Mendes, 2012). A sua experiência e reflexão aprofundadas, sobre o modo como os alunos resolvem tarefas numéricas e como se constroem tarefas e sequências de tarefas que promovam a sua aprendizagem, muito

contribuíram para a formação de professores e investigadores no âmbito de projetos de investigação e de programas de formação contínua em matemática para professores do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico. Destacamos a importância atribuída ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental nos primeiros anos de escolaridade e à sua relação com o cálculo algorítmico, foco do artigo de Brocardo et al. (2003), em que participou, aspetos ainda hoje amplamente discutidos em contextos de formação inicial e contínua de professores. A concluir, arriscamos afirmar que o panorama português relacionado com o ensino e a aprendizagem dos números foi enriquecido através dos contributos de Jean-Marie Kraemer em diversos contextos de formação de formadores e de professores.

Referências

- Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J. M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11–15.
- Cebola, G. (2019). *Flexibilidade na comparação multiplicativa: um estudo com alunos do 2.º ciclo*. [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/42867>
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1), 113–163. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS10-1-2_6
- Delgado, C. (2014). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: um estudo no 1.º ciclo*. [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/10559>
- Equipa do Programa de Formação Contínua em Matemática da Escola Superior de Educação de Setúbal (EPFCMESES) (2010). *Números decimais: uma proposta de abordagem*. Escola Superior de Educação. Instituto Politécnico de Setúbal.
- Equipa do projeto DSN. (2005). *Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares. Materiais para professores e educadores*. Associação de Professores de Matemática.
- Equipa do projeto DSN. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número. Perspetivas e exigências curriculares (Vol. II)*. Associação de Professores de Matemática.
- Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade*. [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/5996>
- Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work. Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Heinemann.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K., & Kraemer, J.-M. (1984). *Met het oog op ruimte: een meetkundige wereldoriëntatie*. (De olho no espaço: uma orientação geométrica do mundo). Zwijssen.
- Kraemer, J.-M. (2001). Pôr a mão na massa (La main à la pâte). *Educação e Matemática*, 65, 19–26.
- Kraemer, J.-M. (2002). Evaluer pour mieux comprendre les enfants et améliorer sa pratique. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 95–116. <https://doi.org/10.1023/A:1022428829082>
- Kraemer, J.-M. (2003). Avaliar para adaptar as aprendizagens à medida dos conhecimentos dos alunos. *Educação e Matemática*, 74, 33–41.
- Kraemer, J.-M. (2005). Challenges of assessment today. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 231-246). APM. https://www.apm.pt/files/files/Ebooks/PauloAbrantes/EBOOK_Homenagem_PA.pdf
- Kraemer, J.-M. (2007). A introdução dos números decimais. In Equipa do Projecto DSN, *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares* (pp. 23-26). APM.

- Kraemer, J.-M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3–28). Escolar Editora.
- Kraemer, J.-M. (2011). *Opllossingsmethoden voor aftrekken tot 100. [Dissertatie 2 (Onderzoek NIET TU/e / Promotie TU/e)*, Eindhoven School of Education]. Technische Universiteit Eindhoven. <https://doi.org/10.6100/IR721544>
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo*. (Tese de doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/5893>
- UNESCO (2009). *Policy guidelines on inclusion in education*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000177849>